Electromagnetismo

Grupo C. 2005-2006

Andrés Cantarero

La energía magnética

- Aspectos energéticos de las corrientes eléctricas.
- Energía magnética.
- Energía de un sistema de corrientes filiformes estacionarias.
- Energía de una distribución de corrientes. Densidad de energía magnética.
- Energía de un dipolo magnético.
- Energía de imanación en los medios materiales.

Aspectos energéticos relacionados con la corriente eléctrica

- Cuando calculamos la energía potencial electrostática, mirábamos cuál es el trabajo necesario para ensamblar un conjunto de cargas
- Aquí hemos de mirar cuál es el trabajo necesario para ensamblar un conjunto de corrientes.
- Pero hay una diferencia: en primer lugar hemos de establecer las corrientes desde cero a su valor final. En ese transitorio hay fuerzas electromotrices que van a suponer la realización de un trabajo por parte de las fuentes de corriente

Trabajo para establecer una corriente

Supongamos un circuito único. La potencia necesaria para mantener una corriente i cuando ésta está cambiando de forma infinitesimal (para que podamos suponer que se cumple $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ en todo momento) es

$$P = \frac{dW}{dt} = -i\mathcal{E} = i \frac{d\Phi}{dt} = Li \frac{di}{dt}$$

Si por un circuito circula una corriente i y queremos variar el flujo, necesitaremos realizar un trabajo

$$\delta W = i\delta\Phi = i \iint \delta \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = i \oint \delta \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

o bien, a partir de la segunda expresión,

$$\delta W = L\delta \left(\frac{i^2}{2} \right)$$

Energía de un conjunto de corrientes

La última expresión es fácilmente generalizable a un sistema de corrientes,

$$\delta W = \sum_{i,j} L_{ij} I_i \delta I_j$$

siendo L_{ij} los coeficientes de inducción mutua y $L_{ii} = L_i$ el de autoinducción.

Obtenemos fácilmente la energía potencial magnética del sistema de corrientes

$$U = \frac{1}{2} \sum_{ij} L_{ij} I_i I_j$$

A diferencia de la energía electrostática, aquí sí aparece un término con $i=j$, que se corresponde con la autoinducción

Energía potencial magnética

Para extender el estudio a un volumen ocupado por corrientes, consideremos la contribución al trabajo de un pequeño lazo de corriente en ese volumen, que puede escribirse en la forma

$$\Delta(\delta W) = J\Delta S \oint \delta \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

Integrando a todo el volumen ocupado por las corrientes,

$$\delta W = \iiint \delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} d^3\mathbf{r} = \iiint \delta \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} d^3\mathbf{r}$$

Si el medio es lineal, el trabajo necesario para establecer las corrientes, o bien la energía magnética almacenada, puede escribirse como

$$U = \frac{1}{2} \iiint \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} d^3\mathbf{r} = \frac{1}{2} \iiint \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} d^3\mathbf{r}$$

La densidad de energía magnética es $u = \frac{1}{2\mu} B^2$

Energía de un dipolo magnético

La energía de interacción de una distribución localizada de corrientes en un campo exterior dado por su potencial vector es

$$U = \iiint \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} d^3r$$

Si el campo es uniforme,

$$\frac{1}{2} \iiint (\mathbf{B} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{J} d^3r = \frac{1}{2} \iiint \mathbf{B} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{J}) d^3r = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{m}$$

La fuerza sobre un dipolo en un campo no uniforme es

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

Energía de imanación

La diferencia energética debido a la presencia de un medio material es

$$\delta U = \int (\mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} - \mathbf{H}_0 \cdot \delta \mathbf{B}_0) d^3r$$

siendo $\mathbf{H}_0$ y $\mathbf{B}_0$ los campos en ausencia del medio material.

Suponiendo que el medio es lineal, es inmediato demostrar que

$$U_m = \frac{1}{2} \int \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_0 d^3r$$

siendo $\mathbf{M}$ la imanación del medio