

Electromagnetismo

Grupo C. Curso 2005-2006

Andrés Cantarero

La energía electromagnética

- Conservación de la energía. Teorema de Poynting y vector de Poynting
- Teorema de Poynting para campos armónicos. Expresión compleja
- Energía radiada por un dipolo eléctrico y un dipolo magnético

Ecuación de continuidad

Buscamos una expresión que nos de cuenta de la conservación de la energía electromagnética. Dicha ley de conservación queremos que se cumpla no sólo para un volumen finito sino puntualmente.

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = -\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u_K}{\partial t}$$

El flujo de energía varía en un punto si ésta cambia con el tiempo. Separemos la densidad de energía en energía potencial más energía cinética.

$\mathbf{S}$ Energía por unidad de superficie y unidad de tiempo

u Energía por unidad de volumen

u_K Energía por unidad de volumen

Energía cinética K

Si una partícula con carga q se mueve, el cambio de energía cinética es igual al trabajo hecho por la carga:

$$dK = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} dt$$

Dado que el campo magnético no realiza trabajo,

$$\frac{dK}{dt} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \longrightarrow \frac{\partial u_K}{\partial t} d^3\mathbf{r} = (\rho d^3\mathbf{r})\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = -\frac{\partial u}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \longleftarrow \frac{\partial u_K}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$$

$\mathbf{J}$ y los campos

Poniendo la densidad de corriente en función de los campos,

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \varepsilon_0 \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

De la relación vectorial

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

podemos escribir

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = -\nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right)$$

$\downarrow$
 $\mathbf{S}$

$\downarrow$
 u

Teorema de Poynting

En forma diferencial,

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = 0$$

En forma integral,

$$\oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} + \frac{d}{dt} \iiint u d^3\mathbf{r} + \sigma \iiint E^2 d^3\mathbf{r} = 0$$

En un medio material,

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad u = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$$

Campos armónicos

Si los campos son complejos, en cantidades cuadráticas es necesario hallar valores medios

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-j\omega t} \rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos \omega t$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{-j\omega t + j\varphi} \rightarrow \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{S}(t) dt = \frac{1}{2} \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0 \cos \varphi$$

De forma equivalente, $\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*$

Teorema de Poynting complejo

De las ecuaciones de Maxwell,

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} - j\omega \mathbf{B} = 0 \quad ; \quad \nabla \times \mathbf{H}^* - j\omega \mathbf{D}^* = \mathbf{J}^*$$

Multiplicando la primera por $\mathbf{H}^*$ y la segunda por $\mathbf{E}$ y sumando,

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) - j\omega (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^* + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^*) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^*$$

Las densidades de energía y potencia son

$$u = \frac{1}{2} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^* + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^*) \quad p = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^*$$