Electromagnetismo
Grupo C. Curso 2005-2006

Andrés Cantarero

Las fuerzas y el momento del campo electromagnético

- Las fuerzas en el campo electrostático
- Las fuerzas en el campo magnetostático
- El momento de los campos electromagnéticos. Teorema de conservación.

Momento mecánico

La densidad de fuerza (de Lorentz) es

$$f = \rho \boldsymbol{E} + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}$$

Integrando obtenemos la fuerza total, que no es mas que la derivada del momento (cantidad de movimiento) mecánico de la distribución de cargas y corrientes

$$\frac{d\boldsymbol{P}_{\mathrm{mec}}}{dt} = \int \left[\rho \boldsymbol{E} + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}\right] d^3\boldsymbol{r}$$

Sustituyendo las fuentes en función de los campos (ecuaciones de Maxwell),

$$\frac{d\boldsymbol{P}_{\mathrm{mec}}}{dt} = \int \left[\varepsilon_0 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}) - \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}) - \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\times\boldsymbol{B}\right] d^3\boldsymbol{r}$$

Momento electromagnético

Si hallamos la derivada temporal del producto de E por B,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}) = \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{E}\times\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\times\boldsymbol{B} - \boldsymbol{E}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E})$$

Luego el término

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\times\boldsymbol{B} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial t}$$

Podemos asociar la variación temporal del vector de Poynting sobre c^2 al momento electromagnético

$$\frac{d\boldsymbol{P}_{\mathrm{elec}}}{dt} = \frac{d}{dt}\int \frac{\boldsymbol{S}}{c^2} d^3\boldsymbol{r}$$

El tensor de tensiones

La variación temporal del momento total es

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \int \left[\varepsilon_0[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}) - \boldsymbol{E}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E})] + \frac{1}{\mu_0}[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})]\right] d^3\boldsymbol{r}$$

Reescribiendo

$$E_\alpha \partial_\beta E_\beta - \epsilon_{\alpha\beta\gamma} E_\beta \epsilon_{\gamma\sigma\kappa} \partial_\sigma E_\kappa = E_\alpha \partial_\beta E_\beta - E_\beta \partial_\alpha E_\beta + E_\beta \partial_\beta E_\alpha$$

Esto nos permite simplificar

$$\frac{dP_\alpha}{dt} = \int \frac{\partial}{\partial x_\beta}\Bigg[\underbrace{\varepsilon_0\left(E_\alpha E_\beta - \frac{1}{2}E^2\delta_{\alpha\beta}\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2}B^2\delta_{\alpha\beta}\right)}_{T_{\alpha\beta}}\Bigg] d^3\boldsymbol{r}$$

Tensor de tensiones de Maxwell $\longrightarrow T_{\alpha\beta}$

Tensor de tensiones

$$\frac{dP_\alpha}{dt} = \iiint \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} d^3\boldsymbol{r} = \oiint T_{\alpha\beta} dS_\beta$$

En forma matricial,

$$\boldsymbol{T} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E^2 - E_x^2 & -E_xE_y & -E_xE_z \\ -E_yE_x & \frac{1}{2}E^2 - E_y^2 & -E_yE_z \\ -E_zE_x & -E_zE_y & \frac{1}{2}E^2 - E_z^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\mu_0}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}B^2 - B_x^2 & -B_xB_y & -B_xB_z \\ -B_yB_x & \frac{1}{2}B^2 - B_y^2 & -B_yB_z \\ -B_zB_x & -B_zB_y & \frac{1}{2}B^2 - B_z^2 \end{pmatrix}$$