

Electromagnetismo. Grupo C. Curso 2005-2006.

Andrés Cantarero

- El problema electrostático. Unicidad de la solución.
- La solución formal, mediante la función de Green, del problema electrostático con condiciones de contorno.
- El método de las imágenes.
- El método de separación de variables.

Unicidad de la solución

Sean dos potenciales que cumplen la ecuación de Laplace y satisfacen las mismas condiciones de contorno:

$$\nabla^2 V_1 = 0 \quad ; \quad \nabla^2 V_2 = 0$$

Definamos la función $\Phi = V_1 - V_2 \implies \nabla^2 \Phi = 0$

Sobre el contorno, $\Phi = 0$ o bien $(\nabla \Phi)_{\text{normal}} = 0$, dependiendo de las condiciones de contorno

Integrando al contorno y aplicando el teorema de la divergencia,

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_S \Phi \nabla \Phi dS = \int_V \nabla \cdot [\Phi \nabla \Phi] d^3r \\ &= \int_V [(\nabla \Phi)^2 + \Phi \nabla^2 \Phi] d^3r = \int_V (\nabla \Phi)^2 d^3r \end{aligned}$$

$\Phi = 0$ si lo es sobre la superficie, o bien constante si el campo es nulo en la superficie

Segunda identidad de Green

La divergencia de una función F puede escribirse en la forma

$$\int \nabla \cdot \mathbf{F} d^3r = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint F_n dS$$

Definamos las funciones

$$\mathbf{F} = \Phi \nabla \Psi \quad \mathbf{G} = \Psi \nabla \Phi$$

Hallando la divergencia de ambas funciones y restando,

$$\oint \left[\Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right] dS = \int [\Phi \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Phi] d^3r$$

se obtiene la Segunda identidad de Green

Ecuación de Poisson

La ecuación de Poisson, $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$, puede escribirse en forma integral. Basta con tomar, en la segunda identidad de Green,

$$\Phi = V \quad \text{y} \quad \Psi = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

y recordar que $\nabla^2 \Psi = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \quad \leftarrow \text{Integral de Coulomb} \\ &+ \frac{1}{4\pi} \oint \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial V(\mathbf{r}')}{\partial n'} - V(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dS' \end{aligned}$$

Contribución de las cargas sobre la superficie de contorno

Contribución de densidad dipolar sobre la superficie de contorno

La función Ψ se denomina función de Green y se escribe habitualmente como $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$

Problema de Dirichlet

Hay ambigüedad en la elección de $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad \text{con} \quad \nabla^2 F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$$

Si conocemos el potencial en el contorno (problema de Dirichlet o condiciones de contorno de Dirichlet), podemos elegir $G|_{\Sigma} = 0$ sobre el contorno. Entonces

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3r' - \oint_{\Sigma(\tau)} V(\mathbf{r}') \frac{\partial G}{\partial n'} dS'$$

Resolver la ecuación de Poisson se reduce a resolver dos integrales definidas.

Problema de Neumann

Si conocemos $\partial V / \partial n'$ sobre el contorno (es decir el campo eléctrico), podríamos pensar en tomar $\partial G / \partial n'|_{\Sigma} = 0$ sobre el contorno para simplificar la integral de superficie. Pero esto no lo podemos hacer. La opción más sencilla es tomar

$$\partial G / \partial n'|_{\Sigma} = -\frac{1}{S'}$$

Tendremos entonces

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\tau} \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' - \oint_{\Sigma(\tau)} G \frac{\partial V}{\partial n'} dS' + \langle V \rangle$$

siendo $\langle V \rangle$ el valor promedio del potencial sobre la superficie.

Carga puntual frente a plano conductor a potencial cero

$$\rho(\mathbf{r}') = q \delta(\mathbf{r}_q - \mathbf{r}')$$

Conocemos el potencial, luego se trata del problema de Dirichlet. Como éste es cero sobre el plano, la integral resultante es

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\tau} \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' = \frac{q}{\varepsilon_0} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_q)$$

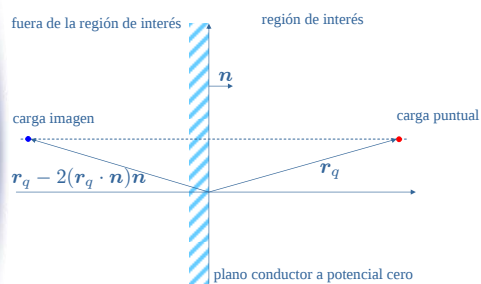
La función de Green es

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_q) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q|} + F(\mathbf{r}, \mathbf{r}_q)$$

y el problema se limita a hallar la función F que haga que G sea cero sobre el contorno (plano a potencial cero):

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{r}_q) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - (1 - 2\mathbf{n}\cdot)\mathbf{r}_q|}$$

Método de las imágenes

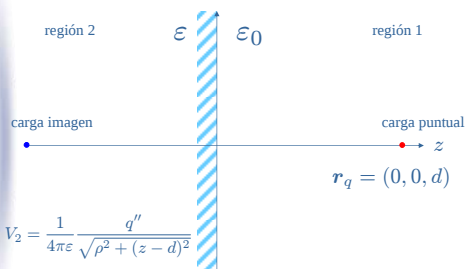


$$V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q + 2(\mathbf{r}_q \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}|} \right]$$

Método de las imágenes con dieléctricos

- La superficie del dieléctrico no tiene porqué ser equipotencial
- El campo de las cargas del exterior penetra en el dieléctrico
- Ahora las dos regiones son de interés
- En la superficie del dieléctrico se satisfacen las condiciones de contorno de los campos E y D

Carga puntual frente a un dieléctrico



$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q''}{\sqrt{\rho^2 + (z-d)^2}}$$

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{\rho^2 + (z-d)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{\rho^2 + (z+d)^2}} \right]$$

Carga puntual frente a un dieléctrico semiinfinito

$$E_{\rho}(z=0^+) = E_{\rho}(z=0^-)$$

$$D_z(z=0^+) = D_z(z=0^-)$$

$$V_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q|} - \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q + 2(\mathbf{r}_q \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}|} \right]$$

$$V_2 = \frac{2q}{4\pi(\varepsilon + \varepsilon_0)} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q|}$$