Electromagnetismo

Andrés Cantarero Sáez
Curso 2005-2006
Grupo C

El campo magnético de las corrientes estacionarias

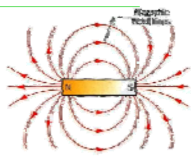
- Introducción
- Propiedades diferenciales del campo magnético
- Propiedades integrales del campo magnético
- Teorema de Ampère
- El potencial vector
- Ecuaciones para el potencial vector
- El potencial escalar magnético

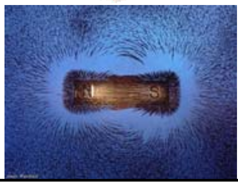
Introducción

- Hasta 1819 no se demostró la conexión entre fenómenos eléctricos y magnéticos. El científico danés Hans Christian Oersted observó que la aguja de una brújula se orientaba en las proximidades de una corriente eléctrica.
- En 1831, Michael Faraday descubrió que cuando se conectaba o desconectaba un circuito eléctrico, aparecía una corriente por otro circuito cercano.
- Poco después descubrió que acercando o alejando un imán de un circuito eléctrico, se producía el mismo efecto.

- Joseph Henry no tuvo éxito en publicar lo que él descubrió 6-12 meses antes que Faraday
- Oersted demostró que pueden producirse fenómenos magnéticos moviendo cargas eléctricas; Faraday y Henry demostraron que imanes en movimiento pueden producir corrientes eléctricas

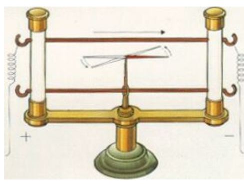
Líneas de campo magnético





Michael Faraday descubrió que un imán tiene un campo magnético a su alrededor

Experimento de Oersted



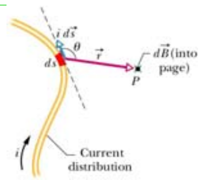
Al pasar una corriente, la brújula se mueve, orientándose perpendicularmente a la corriente.

Ley de Biot-Savart

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{id\vec{s}\times\vec{r}}{r^3}$$

Integrando a todo el hilo,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{id\vec{l}'\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$



Generalizando para una distribución de corrientes en un volumen,

$$id\vec{l}\rightarrow\left(\int_S \vec{J}dS\right)dl \qquad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{r}')\times(\vec{r}-\vec{r}')d^3\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

Ejercicio:Hallar el campo magnético producido por un hilo infinito

Ley de Biot-Savart:

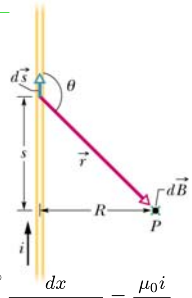
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{id\vec{s}\times\vec{r}}{r^3}$$

En módulo,

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{ids\sin\theta}{r^2}$$

El campo lo hallamos integrando s desde 0 a ∞ y multiplicando por 2

$$\sin\theta = \sin(\pi-\theta) = \frac{R}{\sqrt{R^2+s^2}}$$

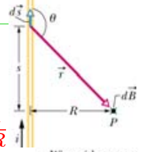


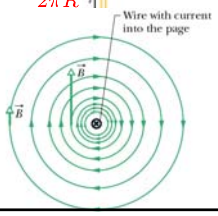
$$B = \frac{\mu_0 iR}{2\pi}\int_0^\infty\frac{ds}{(R^2+s^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}\int_0^\infty\frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$

Campo de un hilo infinito

- El campo sólo depende de la corriente y es perpendicular a la dirección radial del hilo
- B forma anillos concéntricos
- La magnitud de B depende de 1/R, es decir el espaciado de las líneas de campo aumenta con la distancia

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$





Fuerzas magnéticas

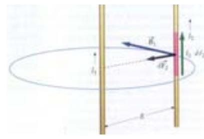
Fuerza magnética sobre una corriente

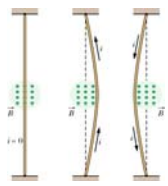
$$d\vec{F} = id\vec{l}\times\vec{B}$$

Fuerza magnética sobre una carga puntual

$$id\vec{l}\rightarrow\vec{v}dq$$

$$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$$

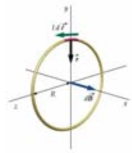


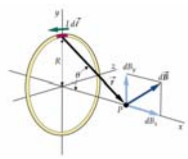


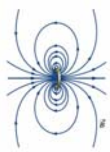
Fuerza de Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$$

Campo magnético de una espira circular

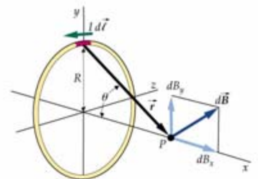






En cualquier punto del eje el campo solo tiene componente x. En cualquier otro punto tiene además componente radial (coordenadas cilíndricas).

Hallar el campo magnético producido por una espira de radio R por la que circula una corriente i, en un punto del eje



Utilizando la notación de la figura,

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 IRd\phi\vec{u}_\phi\times(x\vec{u}_x - R\vec{u}_r)}{r^3}$$

Sobre el eje x,

$$dB_x = \frac{\mu_0 IR^2 d\phi}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

Integrando, $B = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$

En el centro de la espira, $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$

Teorema de Ampère

- Teorema en forma integral

$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

- Teorema en forma diferencial

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}$$

Primero demostraremos el teorema en forma diferencial. Integrando a una superficie dada y aplicando el teorema de Stokes se obtiene la forma integral.

Partamos de la ecuación integral del campo magnético

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{\nabla}\times\left[\vec{J}(\vec{r}')\times\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right]d^3\vec{r}'$$

Puesto que derivamos respecto de r e integramos en r', podemos introducir el operador nabla dentro de la integral. Hallemos el rotacional del producto vectorial de un vector constante por una función vectorial de r

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right)\vec{J}(\vec{r}') - (\vec{J}(\vec{r}')\cdot\vec{\nabla})\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right]d^3\vec{r}'$$

Veamos el valor de cada una de estas integrales. La primera

$$\mathcal{I}_1 = \int \vec{J}(\vec{r}')\vec{\nabla}\cdot\left[\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right]d^3\vec{r}' = \int_R \vec{J}(\vec{r}')\vec{\nabla}\cdot\left[\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right]d^3\vec{r}'$$

La única contribución proviene de un volumen cercano a r=0

$$\mathcal{I}_1 \approx \vec{J}(\vec{r})\int_R \vec{\nabla}\cdot\left[\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right]d^3\vec{r}' = \vec{J}(\vec{r})\oint_{S(R)}\frac{(\vec{r}-\vec{r}')\cdot d\vec{S}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = 4\pi\vec{J}(\vec{r})$$

En la segunda integral podemos intercambiar la derivada de $\vec{r}$ por las de $\vec{r}'$ mediante un cambio de signo

$$\mathcal{I}_2 = \int\left[\vec{J}(\vec{r}')\cdot\vec{\nabla}'\right]\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}d^3\vec{r}' = \int(J_\alpha\partial'_\alpha)\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}d^3\vec{r}'$$

Esta última integral puede escribirse como la divergencia del total menos la divergencia de la corriente:

$$\mathcal{I}_2 = \int\partial'_\alpha\left[J_\alpha\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right]d^3\vec{r}' - \int\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\vec{\nabla}'\cdot\vec{J}d^3\vec{r}'$$

La primera integral es nula al extenderse el volumen al infinito. Utilizando la ecuación de continuidad, la segunda integral no es mas que la derivada temporal del campo eléctrico:

$$\mathcal{I}_2 = 4\pi\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

La expresión final para el rotacional del campo magnético es:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Esta ecuación nos dice que hay dos contribuciones al rotacional del campo magnético. Más adelante estudiaremos la segunda contribución. Aquí nos limitamos al caso de corrientes estacionarias, por tanto, la expresión diferencial del teorema de Ampère (para corrientes estacionarias) es:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}$$

Consideremos una superficie arbitraria en una región en la que haya un campo magnético. Integrando la ecuación anterior a esa superficie y aplicando el teorema de Stokes, se obtiene la forma integral del teorema:

$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}$$

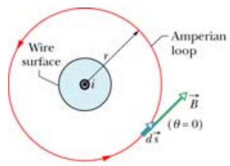
o bien

$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

para corrientes estacionarias, que es el tema que nos ocupa

Aplicaciones del T. Ampère

Campo magnético producido por un hilo que transporta una corriente i

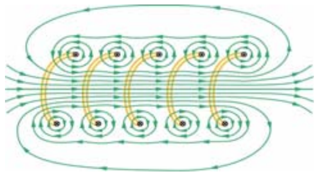


$$\oint \vec{B} \cdot \vec{ds} = \mu_0 i_{\text{encerrada}} = \mu_0 i$$

$$2\pi r B = \mu_0 i$$

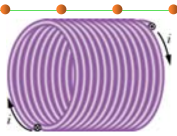
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{u}_\phi$$

Campo magnético de un solenoide



Si las espiras están suficientemente juntas podemos definir una densidad superficial de corriente

Densidad superficial de corriente

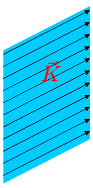


En función de la corriente total:

$$K = \frac{Ni}{d}$$

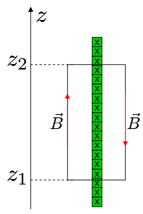
En función de la densidad de corriente de volumen:

$$\vec{K} = \int \vec{J} de$$



plano que transporta una densidad superficial de corriente K

Ejemplo: Hallar el campo magnético producido por una corriente distribuida uniformemente sobre un plano indefinido



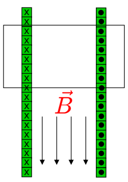
Apliquemos el teorema de Ampère a un lazo tal como muestra la figura

$$i_{\text{encerrada}} = \int K dz = K(z_2 - z_1) = 2B(z_2 - z_1)$$

siendo K la densidad superficial de corriente. El resultado de la integral es independientemente de la distancia del punto fuente al punto campo, i.e. B es constante:

$$\vec{B} = \pm \frac{1}{2} K \vec{u}_z$$

Hallar el campo magnético producido por dos planos separados una distancia d, por los que circula una densidad de corriente K en sentidos opuestos

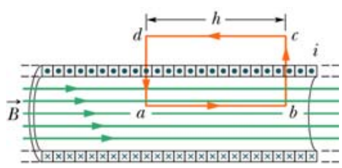


La corriente encerrada es nula para el lazo de la figura, luego el campo fuera de los dos planos es nulo

Es decir, dentro $B = \mu_0 K$

y fuera $B = 0$

Campo magnético de un solenoide ideal



Número total de espiras

$$N$$

Número de espiras por unidad de longitud

$$Bh = \mu_0 i_{\text{encerrada}} = \mu_0 inh$$

$$\boxed{B = \mu_0 ni}$$

$$n = \frac{N}{L}$$

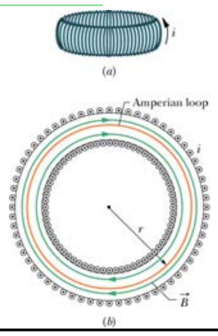
Campo magnético de un toroide ideal

Eligiendo un lazo adecuado de forma que B sea constante,

$$B2\pi r = \mu_0 i N$$

$$B = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r}$$ en el interior del toroide

$$B = 0$$ fuera del toroide



Potencial vector

Lo ideal sería poder escribir el campo magnético como el gradiente de un potencial escalar. Esto no siempre es posible ya que $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ no siempre es nulo.

Pero $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ siempre (no hay cargas magnéticas), i.e. siempre podremos escribir

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Partamos de la expresión general del campo magnético correspondiente a una distribución de corrientes,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,') d^3\vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$

y veamos como extraer el operador rotacional

Teniendo en cuenta que $\vec{\nabla}\left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\right] = -\frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$,

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{J}(\vec{r}\,') \times \vec{\nabla}\left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}\right] d^3\vec{r}\,'$$

Pero

$$\vec{\nabla} \times \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\right] = \vec{\nabla}\left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\right] \times \vec{J}(\vec{r}\,')$$

luego

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d^3\vec{r}\,'\right] \Longrightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d^3\vec{r}\,'$$

¿Potencial: magnitud auxiliar?

- Tanto el potencial vector como el potencial eléctrico juegan un papel fundamental en la Mecánica Cuántica, los campos juegan un papel secundario.
- La fase de la función de onda en un campo magnético depende de la circulación de A.
- El experimento de Bohm-Aharanov demuestra la existencia de un corrimiento en esta fase en una región en la que B=0. ¡El potencial vector es una magnitud fundamental!

Potencial vector de una carga puntual $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v}}{|\vec{r} - \vec{r}_q(t)|}$

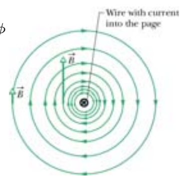
Potencial vector de un campo uniforme $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$

Hallar el potencial vector de un hilo infinito que transporta una corriente I

El campo magnético de un hilo es: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\phi$

Por otra parte,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d^3\vec{r}\,' = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$



Por simetría $\vec{A} = A_z \vec{u}_z$

Luego $\frac{\mu_0 I}{2\pi r} = -\frac{dA_z}{dr}$

de donde $A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \int \frac{dr}{r} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r$

Potencial escalar magnético

Útil en la resolución de problemas en campos magnéticos

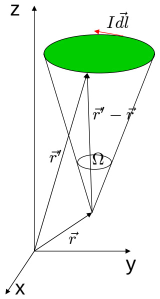
$$\vec{B} = -\mu_0 \vec{\nabla} V_m$$

$$dV_m = \vec{\nabla} V_m \cdot d\vec{r} = -\frac{1}{\mu_0}\vec{B} \cdot d\vec{r} = -\frac{I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} d\vec{r}$$

Potencial escalar de un lazo de corriente (una espira)

$$V_m(\vec{r}) = -I\frac{\Omega}{4\pi}$$

siendo Ω el ángulo sólido de la espira visto desde r



El ángulo sólido de la espira visto desde el punto campo es

$$\Omega = -\int \frac{(\vec{r}-\vec{r}')\cdot \vec{dS}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

El cambio de ángulo sólido producido al moverse el punto campo de $\vec{r}$ a $\vec{r}+\vec{dr}$ es

$$d\Omega = \oint \frac{(-d\vec{r}\times d\vec{l})(\vec{r}'-\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \oint \frac{[d\vec{l}\times(\vec{r}-\vec{r}')]\cdot d\vec{r}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

luego $dV_m = -\frac{I}{4\pi} d\Omega \Longrightarrow V_m = -\frac{I}{4\pi}\Omega$