Electromagnetismo

Andrés Cantarero
Grupo C. 2005-2006.

Desarrollo multipolar del potencial vector

- Introducción
- Desarrollo multipolar del potencial vector debido a una distribución de corrientes
- Multipolos magnéticos
- El dipolo magnético puntual.
- Distribuciones de dipolos magnéticos

Introducción

- Los medios magnéticos están constituidos por átomos con un momento magnético (angular o de spin).
- El momento magnético angular puede interpretarse clásicamente suponiendo que el electrón gira alrededor del átomo
- El momento magnético de spin tiene un origen cuántico y no hay interpretación clásica
- No hay cargas magnéticas, luego el primer “ente” no nulo en el desarrollo multipolar es el dipolo magnético
- La materia puede sustituirse por una distribución de dipolos magnéticos

Desarrollo de A

El potencial vector debido a una distribución de corrientes es:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d^3\boldsymbol{r}' \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint \frac{I\boldsymbol{dl}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

Desarrollando el denominador en términos de r'/r,

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{r^3} - \frac{1}{2}\frac{r'^2}{r^3} + \frac{3}{2}\frac{(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}')^2}{r^3} + O\left(\frac{r'^3}{r^3}\right)$$

El primer término del desarrollo es:

$$\frac{\mu_0}{4\pi r}\int \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')d^3\boldsymbol{r}' = 0 \qquad \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\oint \boldsymbol{dl} = 0$$

Demostración para corrientes estacionarias:

$$0 = \int \boldsymbol{r}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J})d^3\boldsymbol{r} = \int \left[\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{J}\right]d^3\boldsymbol{r} = -\int \boldsymbol{J}d^3\boldsymbol{r}$$

Término dipolar

Primer término no nulo:

$$\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}')d^3\boldsymbol{r}'$$

Componente β de dicho término:

$$\frac{\mu_0}{4\pi r^3}x_\alpha\int x'_\alpha J_\beta d^3\boldsymbol{r}'$$

La divergencia del producto

$$\partial_\alpha(J_\alpha x_\beta x_\gamma) = (\partial_\alpha J_\alpha)x_\beta x_\gamma + J_\alpha\delta_{\alpha\beta}x_\gamma + J_\alpha x_\beta\delta_{\alpha\gamma} = J_\beta x_\gamma + J_\gamma x_\beta$$

Integrando a un volumen que englobe las corrientes llegamos a:

$$\int J_\alpha x_\beta d^3\boldsymbol{r} = -\int J_\beta x_\alpha d^3\boldsymbol{r} \qquad x_\alpha\int J_\alpha x'_\beta d^3\boldsymbol{r}' = -x_\alpha\int J_\beta x'_\alpha d^3\boldsymbol{r}'$$

Luego podemos reescribir el término del desarrollo en la forma:

$$\int \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}')d^3\boldsymbol{r}' = \frac{1}{2}\int\left[\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}') - (\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}'\right]d^3\boldsymbol{r}' = \left[\frac{1}{2}\int \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{r}'d^3\boldsymbol{r}'\right]\times\boldsymbol{r}$$

Definiendo el momento dipolar magnético:

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')d^3\boldsymbol{r}' \rightarrow \boldsymbol{m} = I\int\frac{1}{2}\boldsymbol{r}'\times d\boldsymbol{l} = I\boldsymbol{S}$$

Potencial vector de un dipolo magnético ⟹

$$\boxed{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}}{r^3}}$$

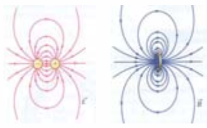
Campo magnético

Hallando el rotacional del potencial vector,

$$\boldsymbol{\nabla}\times\left(\boldsymbol{m}\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\imath} & \boldsymbol{\jmath} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{m_y z - y m_z}{r^3} & \frac{m_z x - z m_x}{r^3} & \frac{m_x y - x m_y}{r^3} \end{vmatrix}$$

obtenemos el campo de un dipolo magnético:

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{m})\boldsymbol{r} - r^2\boldsymbol{m}}{r^5}$$



El potencial escalar es:

$$V_m(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{m}}{r^3}$$

Par sobre un dipolo

El par de fuerzas sobre una espira es:

$$\boldsymbol{\tau} = \oint_C \boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{F} = \oint_C \boldsymbol{r} \times (I d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B})$$

Diferenciando el producto

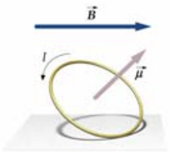
$$d[\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B})] = \boldsymbol{r} \times (d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}) + d\boldsymbol{l} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B})$$

Recurriendo a la conocida relación

$$\boldsymbol{r} \times (d\boldsymbol{l} \times B) + d\boldsymbol{l} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{B} \times (\boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{l}) = 0$$

llegamos a la expresión final

$$\boldsymbol{\tau} = I \oint_C \frac{1}{2}(\boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{l}) \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}$$



"Ha ha, foolish explorers - your compasses are useless here!"

Energía de un dipolo

- La energía potencial de un dipolo magnético en un campo exterior es

$$U = -\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}_0$$

- Si el dipolo está alineado al campo, la energía potencial es mínima
- Si el dipolo está orientado en sentido contrario al campo, la energía es máxima