Electromagnetismo

Andrés Cantarero
Grupo C
Curso 2005-2006

Ecuaciones de Maxwell

- Generalización del teorema de Ampère para corrientes no estacionarias. Corriente de desplazamiento de Maxwell
- Ecuaciones de Maxwell en el vacío
- Ecuación de ondas. Solución en ondas planas
- Ondas planas con variación temporal armónica

Ley de Ampère para corrientes no estacionarias

- En la deducción de la ley de Ampère nos aparecía un término que eliminamos al estudiar las corrientes estacionarias:

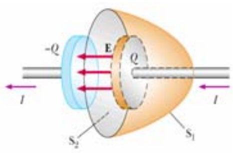
$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

- El significado de esta ecuación es que no solo una corriente puede producir un campo magnético, un campo eléctrico variable también.
- La forma integral de esta ecuación es:

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Corriente de desplazamiento

- Históricamente, Maxwell vio la necesidad de introducir un término adicional en el teorema de Ampère para tener en cuenta el proceso de carga de un condensador



- Su idea era que había una corriente adicional, $\boldsymbol{J}_d = \varepsilon_0 \partial \boldsymbol{E}/\partial t$ que denominó corriente de desplazamiento, que era transportada por el éter de un plato al otro del condensador

Teorema de Ampère modificado

- Para Maxwell, la corriente de desplazamiento I_d y la corriente que circula por el hilo I son tratadas al mismo nivel
- En el tema siguiente veremos porqué Maxwell cometió este error de concepto
- El significado del término de campo eléctrico en el teorema de Ampère es el mismo que el término de campo magnético en la ley de Faraday
- Un campo eléctrico variable da lugar a un campo magnético de la misma manera que un campo magnético variable induce un campo eléctrico

Ecuaciones de Maxwell

Teorema de Gauss

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad \oint_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

Ley de Faraday

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad \oint_\Gamma \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Teorema de Ampère

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \qquad \oint_\Gamma \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Ecuaciones de Maxwell

- Vamos a introducir dos vectores auxiliares H y D que adquirirán significado cuando estudiemos los campos en medios materiales

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \qquad \boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}$$

- Reescribiendo las ecuaciones de Maxwell en términos de estos nuevos vectores,

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D} = \rho \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

Ondas electromagnéticas

- En ausencia (lejos) de fuentes,

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D} = 0 \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

- Hallando el rotacional de la tercera ecuación, se obtiene

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}) - \nabla^2\boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

Ondas planas

- Estudiemos en primer lugar las soluciones más sencillas
- Escribamos una solución en ondas planas para el campo E, propagándose en una dirección arbitraria:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$$

Ondas planas

- De la tercera y cuarta ecuación de Maxwell, es trivial comprobar que la solución para H es también armónica, con la misma dependencia espaciotemporal
- También es trivial la sustitución

$$\partial/\partial t \to i\omega \qquad \boldsymbol{\nabla} \to i\boldsymbol{k}$$

- de forma que podemos reescribir las ecuaciones de Maxwell como:

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E} = 0 \qquad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B} = 0$$

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E} = \omega\boldsymbol{B} \qquad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H} = -\omega\varepsilon_0\boldsymbol{E}$$

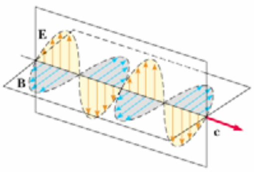
- De la primera y segunda ecuación se deduce que E y H son perpendiculares a la dirección de propagación y de cualquiera de las otras dos que k, E y H forman un triedro a derechas, en ese orden.

Ondas planas

De la tercera ecuación se deduce, además, que

$$\frac{E_0}{B_0} = \frac{\omega}{k} = c$$

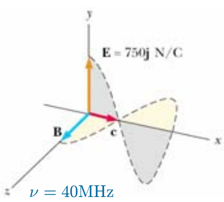
Si el plano de polarización no cambia*, la evolución de la onda em con el tiempo sería la dada en la figura



*¿por qué la polarización de la onda viene dada en términos de E?

Ejemplo:

Sea la onda electromagnética (em) plana dada por la figura. Determinar: (a) λ, T; (b) E_0, B_0; (c) $E(t)$, $B(t)$



$$\nu = 40\text{MHz}$$

(a)

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 7.5\text{m}$$

$$T = \frac{1}{\nu} = 2.5\times10^{-8}\text{s}$$

(b)

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = 2.5\times10^{-6}\text{T}$$

(c) $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = 0.83776\text{rad/m}$ $\quad \omega = 2\pi\nu = 2.5133\times10^8\text{rad/s}$

$$E = 750\cos(0.838x - 2.51\times10^8 t)$$

$$B = 2.5\times10^{-6}\cos(0.838x - 2.51\times10^8 t)$$