Electromagnetismo

Andrés Cantarero
Grupo C. 2005-2006

Los potenciales electromagnéticos

- Los potenciales electromagnéticos. Transformaciones de contraste.
- Ecuación de ondas para los potenciales. Soluciones retardadas.
- Campos de radiación.
- Radiación de sistemas sencillos: el dipolo eléctrico y el dipolo magnético.

Campos “estáticos”

- Cargas en reposo

$$\vec\nabla\cdot\vec E=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\qquad \vec E(\vec r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\int\int_V\frac{\rho(\vec r\,')(\vec r-\vec r\,')}{|\vec r-\vec r\,'|^3}d^3\vec r\,'$$

- Corrientes estacionarias

$$\vec\nabla\times\vec B=\mu_0\vec J\qquad \vec B(\vec r)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec J(\vec r\,')\times(\vec r-\vec r\,')d^3\vec r\,'}{|\vec r-\vec r\,'|^3}$$

- Potenciales

$$\vec E=-\vec\nabla V\qquad \vec B=\vec\nabla\times\vec A$$

Campos variables en “t”

- Las ecuaciones de Maxwell en el vacío son

$$\vec\nabla\cdot\vec E=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\qquad \vec\nabla\cdot\vec B=0$$

$$\vec\nabla\times\vec E=-\frac{\partial\vec B}{\partial t}\qquad \vec\nabla\times\vec B=\mu_0\vec J+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec E}{\partial t}$$

- De la ley de Faraday

$$\vec\nabla\times\vec E=-\frac{\partial}{\partial t}\vec\nabla\times\vec A\qquad \vec\nabla\times\left(\vec E+\frac{\partial\vec A}{\partial t}\right)=0$$

- luego

$$\vec E=-\vec\nabla V-\frac{\partial\vec A}{\partial t}$$

Los campos y las fuentes

- De las ecuaciones de Maxwell que contienen las fuentes,

$$\vec\nabla\cdot\vec E=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\qquad \vec\nabla\times\vec B-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec E}{\partial t}=\mu_0\vec J$$

- podríamos hallar los campos directamente a partir de las fuentes. Esto es complicado.
- Se trata entonces de hallar unas ecuaciones que nos permitan la obtención de los potenciales a partir de las fuentes

Los potenciales y las fuentes

- Sustituyendo los campos en términos de los potenciales en las ecuaciones anteriores,

$$\nabla^2V+\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol\nabla\cdot\boldsymbol A)=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\left(\nabla^2\boldsymbol A-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol A}{\partial t^2}\right)-\boldsymbol\nabla\left(\boldsymbol\nabla\cdot\boldsymbol A+\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right)=-\mu_0\boldsymbol J$$

- obtenemos 4 ecuaciones diferenciales acopladas, que nos permiten determinar los potenciales a partir de las fuentes

Transformaciones de contraste

- Son aquellas transformaciones sobre los potenciales que dejan invariantes los campos
- Sabemos que el rotacional del gradiente es cero, luego si en vez del potencial $\boldsymbol{A}$ utilizamos el potencial $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\Lambda$ obtendremos el mismo campo magnético. Pero queremos obtener también el mismo campo eléctrico, luego la función $\Lambda(\boldsymbol{r},t)$ ha de imponer alguna condición adicional sobre el potencial escalar:

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V' - \frac{\partial \boldsymbol{A}'}{\partial t} = -\nabla V' - \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{A} + \nabla\Lambda) = -\nabla\left(V' + \frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right) + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

Transformaciones de contraste

- Los potenciales vector y escalar están definidos salvo una función arbitraria.
- Los potenciales

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\Lambda \qquad V' = V - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}$$

- generan los mismos campos electromagnéticos que $\boldsymbol{A}$ y V
- Las transformaciones de contraste (de gauge) son transformaciones sobre los potenciales que simplifican la determinación de los mismos

Transformaciones de contraste

- Las ecuaciones

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\left(\nabla^2\boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}\right) - \nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right) = -\mu_0\boldsymbol{J}$$

- Pueden simplificarse escogiendo, por ejemplo $\nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0$ (contraste de Coulomb)

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}$$ (contraste de Lorentz)

Contraste de Coulomb

- Sea un potencial vector con divergencia no nula, $\nabla\cdot\boldsymbol{A} = F(\boldsymbol{r},t)$
- Sea la función Λ solución de la ecuación de Poisson $\nabla^2\Lambda = -F$
- El nuevo potencial $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\Lambda$ cumplirá

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}' = \nabla\cdot\boldsymbol{A} + \nabla^2\Lambda = F - F = 0$$

- Luego siempre podremos encontrar un potencial que cumpla la condición de Coulomb

Contraste de Coulomb

- Las ecuaciones se simplifican a

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \left(\nabla^2\boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}\right) - \nabla\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right) = -\mu_0\boldsymbol{J}$$

- La primera ecuación es la “ecuación de Poisson”, cuya solución es conocida:

$$V(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d^3\boldsymbol{r}'$$

¡Problema de la simultaneidad!

Contraste de Coulomb

- Reescribamos la ecuación 2 como

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J} + \frac{1}{c^2}\vec{\nabla}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)$$

- Escribamos la corriente en dos componentes,

$$\vec{J} = \vec{J}_t + \vec{J}_l \longrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{J}_t = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{J}_l = 0$$

- Hallando la derivada temporal de la ecuación de Poisson,

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 V = -\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_l$$

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J} + \mu_0\vec{J}_l = -\mu_0\vec{J}_t$$

Contraste de Lorentz

- Supongamos que $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}=F(\vec{r},t)$
- Veamos qué función Λ necesitamos para que dicha suma sea cero. Tomando

$$\vec{A}'=\vec{A}+\vec{\nabla}\Lambda \qquad V'=V-\frac{\partial\Lambda}{\partial t}$$

- obtenemos

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}'+\frac{1}{c^2}\frac{\partial V'}{\partial t}=\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}+\nabla^2\Lambda-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2\Lambda-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2}=-F$$

Contraste de Lorentz

- Tomando por tanto

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}=0$$

- Se obtienen 4 ecuaciones de onda desacopladas para los potenciales

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J} \qquad \nabla^2 V-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Potenciales retardados

- En el caso estático las ecuaciones en el contraste de Lorentz se reducen a ecuaciones de Poisson, cuya solución ya conocemos:

$$V(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}')}{R}d^3\vec{r}' \qquad \vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R}d^3\vec{r}'$$

- con $R=|\vec{R}|=|\vec{r}-\vec{r}'|$
- Cuando los tiempos varían con el tiempo, la generalización natural es tomar:

$$V(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}',t')}{R}d^3\vec{r}' \qquad \vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{r}',t')}{R}d^3\vec{r}'$$

$t'=t-\frac{R}{c}$ → tiempo retardado

Potenciales retardados

- Si son soluciones deben de cumplir la ecuación de ondas inhomogenea. El gradiente del potencial es

$$\vec{\nabla}V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left[\frac{1}{R}\vec{\nabla}\rho+\rho\vec{\nabla}\frac{1}{R}\right]d^3\vec{r}'$$

- La densidad depende de la posición a través del tiempo retardado

$$\vec{\nabla}\rho=\dot{\rho}\vec{\nabla}t'=-\frac{1}{c}\dot{\rho}\vec{\nabla}R=-\frac{1}{c}\dot{\rho}\frac{\vec{R}}{R}$$

- luego el gradiente del potencial es

$$\vec{\nabla}V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left[-\frac{\dot{\rho}}{c}\frac{\vec{R}}{R^2}-\rho\frac{\vec{R}}{R^3}\right]d^3\vec{r}'$$

Potenciales retardados

- La laplaciana es la divergencia del gradiente:

$$\nabla^2 V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left\{-\frac{1}{c}\left[\frac{\vec{R}}{R^2}\vec{\nabla}\dot{\rho}+\dot{\rho}\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{R}}{R^2}\right)\right]-\left[\frac{\vec{R}}{R^3}\vec{\nabla}\rho+\rho\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{R}}{R^3}\right)\right]\right\}d^3\vec{r}'$$

- Nuevamente, hay que derivar a través del tiempo retardado:

$$\vec{\nabla}\dot{\rho}=-\frac{1}{c}\ddot{\rho}\vec{\nabla}R=-\frac{1}{c}\ddot{\rho}\frac{\vec{R}}{R}$$

Potenciales retardados

- La laplaciana del potencial es por tanto:

$$\nabla^2 V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left[\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{\rho}}{R}-4\pi\delta(\vec{R})\right]d^3\vec{r}'=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r},t)$$

- luego las soluciones para los potenciales son, efectivamente

$$V(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}',t')}{R}d^3\vec{r}' \qquad \vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{r}',t')}{R}d^3\vec{r}'$$

- Se denominan potenciales retardados ya que se calculan en el tiempo retardado

$$t'=t-R/c$$

El campo eléctrico

- De los potenciales retardados podemos derivar los campos

$$V(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}',t')}{R}d^3\vec{r}' \qquad \vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{r}',t')}{R}d^3\vec{r}'$$

- El gradiente del potencial escalar ya lo habíamos derivado

$$\vec{\nabla}V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left[-\frac{\dot{\rho}}{c}\frac{\vec{R}}{R^2}-\rho\frac{\vec{R}}{R^3}\right]d^3\vec{r}'$$

- y la derivada temporal del potencial vector es inmediata, luego el campo eléctrico es

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left[\frac{\dot{\rho}}{c}\frac{\vec{R}}{R^2}+\rho\frac{\vec{R}}{R^3}-\frac{1}{c^2}\frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}',t')}{R}\right]d^3\vec{r}'$$

El campo magnético

- El campo magnético es simplemente

$$\vec{B}(\vec{r},t)=\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\frac{\vec{\nabla}\times\vec{J}(\vec{r}',t')}{R}+\vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right)\times\vec{J}(\vec{r}',t')\right]d^3\vec{r}'$$

$$\frac{\partial J_y}{\partial x}=\frac{\partial J_y}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}=\dot{J}_y\frac{\partial}{\partial x}\left[t-\frac{1}{c}\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\right]=-\dot{J}_y\frac{x-x'}{cR}$$

$$\frac{\vec{\nabla}\times\vec{J}}{R}=\frac{\dot{\vec{J}}\times\vec{u}_R}{cR}$$

$$\vec{\nabla}R^{-1}=-\frac{\vec{R}}{R^3}=-\frac{\vec{u}_R}{R^2}$$

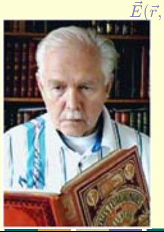
$$\vec{\nabla}R^{-1}\times\vec{J}=\frac{\vec{J}\times\vec{u}_R}{R^2}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\frac{\vec{J}(\vec{r}',t')}{R^2}+\frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}',t')}{cR}\right]\times\vec{u}_R d^3\vec{r}'$$

Ecuaciones de Jefimenko

- Campos cercanos, campos intermedios, campos lejanos

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left[\frac{\rho(\vec{r}',t')}{R^2}\vec{u}_R+\frac{\dot{\rho}(\vec{r}',t')}{cR}\vec{u}_R-\frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}',t')}{c^2R}\right]d^3\vec{r}'$$



$$\vec{B}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\frac{\vec{J}(\vec{r}',t')}{R^2}+\frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}',t')}{cR}\right]\times\vec{u}_R d^3\vec{r}'$$

Potenciales de una carga puntual

- En electrostática

$$V(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d^3\vec{r}'$$

- Para una carga puntual,

$$\rho(\vec{r}')=q\delta(\vec{r}'-\vec{r}_q) \qquad V(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_q|}$$

- Si la carga se mueve,

$$\rho(\vec{r}',t)=q\delta(\vec{r}'-\vec{r}_q(t)) \qquad \vec{J}(\vec{r}',t)=\rho(\vec{r}',t)\vec{v}_q(t)$$

- Luego los potenciales son:

$$V(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_q(t)|} \qquad \vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}_q(t)}{|\vec{r}-\vec{r}_q(t)|}$$

¿Son correctos los potenciales?

- Estamos diciendo que para una descripción correcta hay que tener el cuenta la velocidad finita de la luz (i.e. el punto campo “recibe” información del cambio en el punto fuente con un cierto retraso). Luego nuestras soluciones no son correctas. ¿Cuál es la forma correcta de proceder? Si la carga se desplaza, hemos de utilizar el radiovector que nos indica el desplazamiento de la carga calculado en el tiempo retardado

$$\rho(\vec{r}',t')=q\delta(\vec{r}'-\vec{r}_q(t'))=q\delta(\vec{r}'-\vec{r}_q(t-|\vec{r}-\vec{r}'|/c))$$

- Hagamos el cambio de variable: $\vec{r}''=\vec{r}'-\vec{r}_q(t')$
- Si derivamos,

$$dx''=dx'-\dot{x}_q\left(\frac{\partial t'}{\partial x'}dx'+\frac{\partial t'}{\partial y'}dy'+\frac{\partial t'}{\partial z'}dz'\right)$$

$$dx''=dx'-\frac{\dot{x}_q}{c}\left(\frac{x-x'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dx'+\frac{y-y'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dy'+\frac{z-z'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dz'\right)$$

- El elemento de volumen

$$d^3\vec{r}''=d^3\vec{r}'\mathcal{J}(\vec{r}'')$$

- La integral en la delta queda

$$\int\frac{\delta(\vec{r}'')}{|\vec{r}-\vec{r}''-\vec{r}_q(t')|}\frac{d^3\vec{r}''}{\mathcal{J}(\vec{r}'')}=\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_q(t')|}\frac{1}{\mathcal{J}(0)}=\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_q(t')|}\frac{1}{1-\vec{v}\cdot\vec{u}_R/c}$$