

El campo eléctrico y la materia

Tema 9
Curso 2004-2005



- Electrostática y dieléctricos
- El átomo como un dipolo eléctrico
- Los dieléctricos como distribución de dipolos. El vector polarización P. Susceptibilidad dieléctrica. Permitividad dieléctrica
- Campo creado por un medio dieléctrico polarizado
- El vector desplazamiento D
- Condiciones de frontera entre dieléctricos
- Algunos efectos eléctricos y mecánicos entre dieléctricos
- Medios conductores. Conductividad eléctrica.



Electrostática y dieléctricos

- Faraday acuñó la palabra dieléctrico para describir el efecto de un aislante en un condensador
- Faraday observó que al situar un aislante entre las placas de un condensador, la capacidad del sistema, la energía almacenada y la carga aumentan un factor κ
- κ es una característica del medio
- En un dieléctrico las cargas no son libres como en un metal, están ligadas a los átomos o moléculas
- Cuando se aplica un campo eléctrico, el átomo o molécula se polariza (se desplaza la carga negativa respecto de la positiva y se forma un dipolo)



Dipolo atómico inducido

MODELO

$$F = ZeE_0 = \frac{Zeq_e}{4\pi\epsilon_0 d^2} = -\frac{Z^2 e^2 d}{4\pi\epsilon_0 a^3}$$

$$d = \frac{4\pi\epsilon_0 a^3}{Ze} E_0$$

$$\rho_e = -\frac{Ze}{4\pi a^3} \quad q_e = \rho_e 4\pi d^3 = -\frac{Zed^3}{a^3}$$

$\alpha = 4\pi\epsilon_0 a^3$



Polarizabilidades atómicas

$\alpha/4\pi\epsilon_0$ en unidades de 10^{-30} m^3			
H	0.667	He	0.205
Li	24.3	Ne	0.396
Na	23.6	Ar	1.64
K	43.4	Kr	2.48
Rb	47.3	Xe	4.04
Cs	59.6		



Teoría cuántica

Ecuación de Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \psi + eE_0 z \psi = \mathcal{E} \psi$$

Momento dipolar:

$$\vec{p} = \langle \psi | -e\vec{r} | \psi \rangle = \frac{9}{2} (4\pi\epsilon_0 a_B^3) E_0 \vec{u}_z$$

Polarizabilidad atómica:

$$\frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} = \frac{9}{2} a_B^3 = 0.667 \times 10^{-30} \text{ m}^3$$

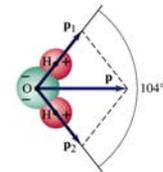


Moléculas polares

- Hay moléculas con momento dipolar permanente
- La unidad que caracteriza el momento dipolar es el debye: $1 \text{ D} = 3.34 \cdot 10^{-30} \text{ C m}$.
- Moléculas grandes, mayor momento dipolar
- Materiales compuestos por moléculas polares: campos internos cuya magnitud depende de T

Momentos dipolares moleculares

Molécula	m. dip. (D)
HF	1.75
HCl	1.04
HBr	0.80
HI	0.83
H ₂ O	1.83
NH ₃	1.48
ea _B	2.5



Dipolo en un campo eléctrico

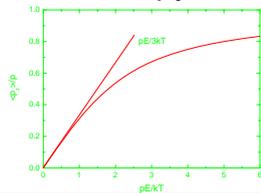
$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE_0 \cos \theta$$

Momento dipolar promedio $\langle \vec{p} \rangle = \frac{\int e^{-U/kT} \vec{p} d\Omega}{\int e^{-U/kT} d\Omega}$

Si tomamos el eje z como la dirección de $\vec{E} = E_0 \vec{u}_z$

$$\langle p_z \rangle = \frac{p \int_{-1}^{+1} e^{-(pE_0/kT) \cos \theta} \cos \theta d \cos \theta}{\int_{-1}^{+1} e^{-(pE_0/kT) \cos \theta} d \cos \theta} = p \left[\coth \left(\frac{pE_0}{kT} \right) - \frac{kT}{pE_0} \right]$$



Esta es la fórmula de Langevin. Si se hace la aproximación

$$\coth z \approx \frac{1}{z} + \frac{z}{3}$$

llegamos a la fórmula de Langevin-Debye

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{p^2}{3kT}$$

Polarización y carga de polarización

- Para incluir el efecto de la polarizabilidad atómica es necesario introducir un nuevo campo, el campo de polarización $\vec{P}(\vec{r})$
- La polarización es una vectorial de la posición en el dieléctrico
- $\vec{P}(\vec{r})$ se define como la densidad media de momentos dipolares

$$\vec{P}(\vec{r}) d^3 \vec{r} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

Potencial de un dipolo

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3} \quad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i) \cdot \vec{p}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

La contribución al potencial de un conjunto de dipolos

$$dV(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i) \cdot \vec{p}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{P}(\vec{r}') d^3 \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Potencial de un medio polarizado

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{P}(\vec{r}') d^3 \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\oint \frac{\vec{P} \cdot \vec{n} dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \int \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}') d^3 \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]$$

Potencial en términos de las cargas de polarización

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\oint \frac{\sigma_b dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int \frac{\rho_b d^3 \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]$$

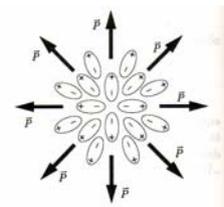
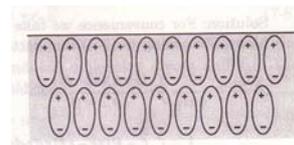
Densidades de carga de polarización

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \vec{n} \quad \rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

Densidades de carga de polarización

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

$$\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$



El vector desplazamiento

- Las ecuaciones fundamentales de la electrostática son $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ y $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$
- Estas ecuaciones son correctas en el vacío y en un medio dieléctrico
- Al analizar un medio dieléctrico es conveniente separar $\rho(\vec{r}) = \rho_f(\vec{r}) + \rho_b(\vec{r})$
- Pero $\rho(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_f(\vec{r}) - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$
- La combinación $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ es un nuevo vector denominado campo desplazamiento
- Se cumple la ley de Gauss con las cargas libres

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f \quad \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = (q_f)_{enc}$$

Dieléctricos lineales

- Un aislante con P proporcional a E es un medio lineal dieléctrico
- Se utilizan diversos parámetros que relacionan E, P y D:

Parámetro	símbolo	Ecuación constitutiva
Susceptibilidad	χ_e	$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$
Permitividad	ϵ	$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$
Constante dieléctrica	κ	$\kappa = \epsilon/\epsilon_0$

Dos relaciones adicionales de interés son:

$$\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e) \quad \kappa = 1 + \chi_e$$

χ_e es siempre positivo ya que los dipolos atómicos se alinean con E de forma que P apunta en la dirección de E. Así, $\epsilon > \epsilon_0$ y $\kappa > 1$ para cualquier material dieléctrico.

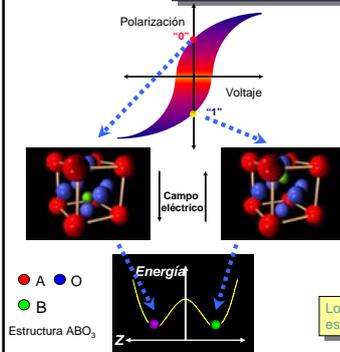
En el vacío, $\chi_e = 0$, $\epsilon = \epsilon_0$ y $\kappa = 1$

En la materia, los parámetros macroscópicos están determinados finalmente por las propiedades atómicas.

Otras propiedades dieléctricas

- Piroelectricidad: al aumentar la temperatura, aparece un campo eléctrico en la superficie del cristal (turmalina, el "iman Ceylon", 1703)
- Ferroeléctricos: materiales en los que la polarización espontánea puede alterarse mediante un campo eléctrico aplicado
- Ferroelásticos: materiales en los que tensiones mecánicas alteran la polarización espontánea
- Piezoeléctrico: material en los que la aplicación de una tensión genera cargas eléctricas en su superficie (efecto piezoeléctrico directo, Pierre Currie, 1880)
- Electrostricción: acoplamiento secundario en el que la tensión es proporcional al cuadrado del campo eléctrico; frecuentemente implica un "efecto piezoeléctrico inverso" (energía eléctrica se convierte en mecánica; Lippman, a partir de principios termodinámicos, Currie experimentalmente en 1881)

¿Qué es la ferroelectricidad?

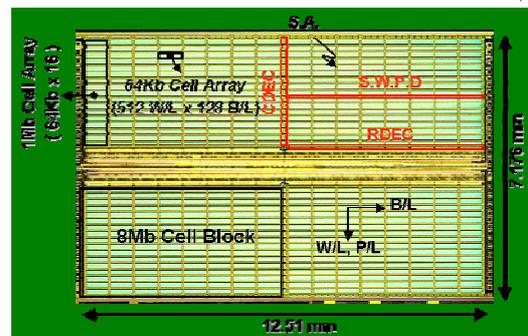


Los materiales ferroeléctricos muestran una polarización espontánea con el campo eléctrico aplicado debido al desplazamiento atómico del átomo "centrado en cuerpo" en la estructura de la perovskita (ABO_3).

El estado de polarización se mantiene al desaparecer el campo aplicado.

Los ferroeléctricos presentan dos estados estables, base de aplicaciones de memoria

Fotografía de una memoria FRAM de 64Mb



Moléculas polares

- En un gas diluido (moléculas sin interacción),

$$\vec{P} = n\alpha\vec{E}, \chi_e = n\alpha/\epsilon_0 \text{ y } \kappa = 1 + n\alpha/\epsilon_0$$

- de donde la susceptibilidad adquiere la expresión (fórmula de Langevin-Debye):

$$\chi_e = \frac{np^2}{3kT\epsilon_0}$$

Moléculas no polares

- A partir de un modelo de oscilador clásico

$$\vec{p} = q\delta\vec{r} = \frac{q^2\vec{E}}{m\omega_0^2}$$

- La susceptibilidad es

$$\chi_e = \frac{nq^2}{\epsilon_0 m\omega_0^2}$$

- Para el hidrógeno, en condiciones normales de presión y temperatura

$$\omega_0 = 1.8 \times 10^{16} \text{ s}^{-1} (\lambda \simeq 100 \text{ nm}) \text{ y } n = 2.69 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

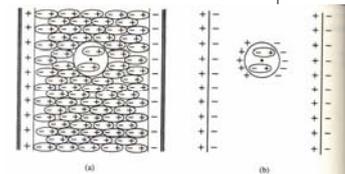
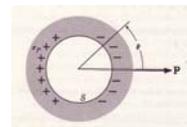
$$\chi_e = 2.64 \times 10^{-4}$$

Materia condensada

- El campo responsable de la polarización de una molécula en un medio denso no es el campo macroscópico aplicado \vec{E}_0
- A este campo se le denomina campo local o campo molecular \vec{E}_{loc}
- La forma de calcular \vec{E}_{loc} es dividir el dieléctrico en dos regiones: una esfera de radio a alrededor del punto donde queremos calcular el campo y el resto del dieléctrico (que puede tratarse como un continuo). Finalmente se aplica el principio de superposición.

El campo local puede descomponerse en las siguientes contribuciones (figura): $\vec{E}_{loc} = \vec{E}_c + \vec{E}_d + \vec{E}_s + \vec{E}_i$

$$E_c = V/d \quad \vec{E}_d = -\vec{P}/\epsilon_0$$



$$\vec{E}_s(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma_b \vec{r} d^3\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi a^3 \vec{P}}{a^3} \int_{-1}^{+1} \cos^2 \theta d \cos \theta = \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}$$

Campo macroscópico

Campo local de Lorentz

$$\vec{E} = \vec{E}_c + \vec{E}_d$$

$$\vec{E}_{loc} = \vec{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}$$

El campo de polarización en un medio polarizado vale

$$\vec{P} = n\vec{p} = n\alpha \left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \right)$$

De la relación entre P y E podemos deducir el valor de la susceptibilidad macroscópica

$$\chi_e = \frac{n\alpha/\epsilon_0}{1 - n\alpha/3\epsilon_0}$$

Por tanto, la polarizabilidad atómica vale, en función de la susceptibilidad:

$$\alpha = \frac{\epsilon_0}{n} \frac{\chi_e}{1 + \chi_e/3} = \frac{3\epsilon_0}{n} \frac{\kappa - 1}{\kappa + 2}$$

Ecuación de Clausius-Mossotti

El condensador con un dieléctrico

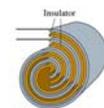


condensadores

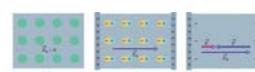
$$D = \sigma_f = \frac{Q}{A}$$

$$V = \frac{Qd}{\epsilon A}$$

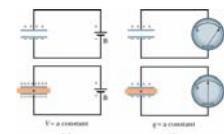
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\kappa\epsilon_0 A}{d}$$



el condensador "plano"



El campo en el dieléctrico



Tensión o carga constante

Propiedades dieléctricas de algunos aislantes



Material	Constante dieléctrica K	Tensión dieléctrica E_{\max} 10^6 V/m
Aire	1.00059	3
Poliestireno	2.5	20
Lucita	2.8	20
Plexiglás	3.4	40
Teflón	2.1	60
Mylar	3.1	
Papel	3.7	16
Cuarzo fundido	3.8 a 4.1	
Pyrex	4 a 6	14
Agua	80	
Titanato de estroncio	332	8

Condiciones de contorno



$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = q \quad (D_n^1 - D_n^2)A + \int_{S_s} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sigma_f A + \int_{\delta S_s} \rho d^3\vec{r}$

$D_n^1 - D_n^2 = \sigma_f$

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = (E_t^1 - E_t^2)l + \int_{\Gamma_s} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad E_t^1 = E_t^2$