



El campo magnético en los medios materiales

Tema 10

Electromagnetismo

Grupo C



El campo magnético y la materia

- **El átomo como un dipolo magnético**
- **Imanación y corrientes de imanación**
- **Teorema de Àmpere para corrientes libres, el vector H**
- **Problemas que contienen corrientes libres y materiales magnéticos**
- **Un cuerpo magnético en un campo exterior: el potencial escalar magnético**
- **Ferromagnetismo**

Introducción

- Hemos estudiado el campo magnético de las corrientes estacionarias (B en el vacío)
- Los medios materiales, ¿cambian B ? ¿Cómo? Existen corrientes a nivel microscópico
- La mayoría de los materiales interaccionan débilmente con B exterior (diamagnéticos, paramagnéticos)
- Algunos materiales interaccionan fuertemente (ferromagnéticos). Pueden generarse imanes permanentes

El átomo como un dipolo magnético

- En un medio dieléctrico, cuando hay un E aplicado, aparece una densidad de dipolos eléctricos por unidad de volumen, P (vector polarización)
- En un medio magnético, cuando hay un B aplicado, aparece una densidad de dipolos magnéticos por unidad de volumen, M (vector magnetización o imanación).
- El fenómeno asociado con M es más complicado, M puede apuntar en la dirección de B (paramagnetismo) o en la opuesta (diamagnetismo). En materiales ferromagnéticos, M es paralelo a B y muy grande.

Origen del magnetismo

- Los electrones son el origen de las propiedades magnéticas de la materia.
- Todo electrón es un pequeño imán debido a su momento angular intrínseco $\vec{m}_{\text{spin}}$. Para electrones, el momento angular intrínseco es opuesta a la dirección de spin. Su magnitud es el magnetón de Bohr.

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,27 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

- La suma de momentos angulares de spin en un entorno r es una de las contribuciones a M .

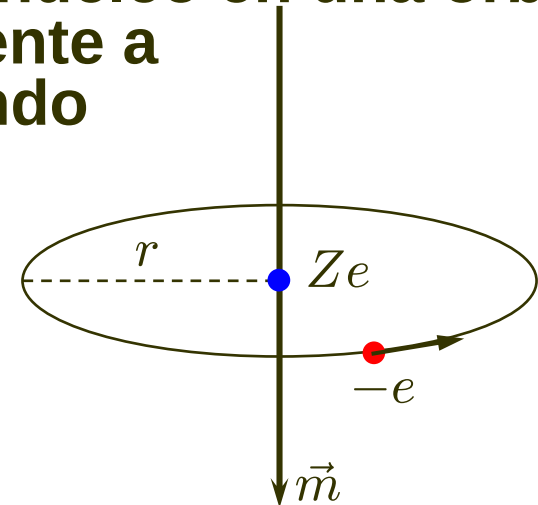
Momento angular orbital

- Otra contribución a M proviene del momento angular orbital.
- Para una descripción detallada de la estructura electrónica de la materia es necesario la Mecánica Cuántica, pero un modelo semiclásico nos puede hacer entender la física. Un electrón moviéndose alrededor de un núcleo en una órbita circular de radio r es equivalente a una corriente $I = ev/2\pi r$, siendo el área de la espira $A = \pi r^2$ y por tanto su momento magnético orbital es

$$m_{\text{orbital}} = IA = evr/2$$

- Introduciendo $L = mvr$

$$m_{\text{orbital}} = \frac{eL}{2m_e}$$



órbita clásica del electrón

Momento angular y vector M

- Tanto el momento angular como el momento magnético están cuantizados

$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$$

- Luego el momento angular orbital es del orden de μ_B

$$\vec{u}_z \cdot \vec{m}_{\text{orbital}} = -\mu_B m_l$$

- Si tenemos N átomos en un elemento de volumen y cada átomo un momento magnético $\vec{m}_i$, se define el vector M como

$$\vec{M}(\vec{r}) d^3\vec{r} = \sum_{i=1}^N \vec{m}_i$$

- Si no hay campo magnético presente, $M=0$

Momento dipolar magnético

Sistema magnético	Símbolo	Magnitud ($\text{A}\cdot\text{m}^2$)
Spin del electrón	$\mu_e = -\mu_B$	$-9,27 \times 10^{-24}$
Spin del protón	μ_p	$1,41 \times 10^{-26}$
Spin del neutrón	μ_n	$-0,966 \times 10^{-26}$
Brújula típica		10^{-2}
Espira superconductora		20
Tierra		$7,79 \times 10^{22}$

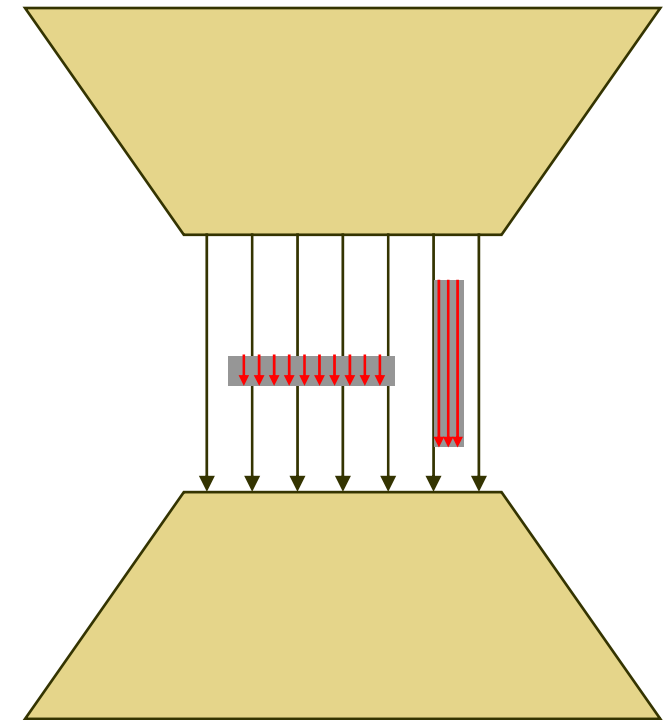
- El rango de valores abarca muchos órdenes de magnitud
- Hay objetos astronómicos con mayor momento magnético que la Tierra
- Los núcleos no contribuyen significativamente a las propiedades magnéticas de la materia ($m_e/m_p \approx 0,5 \times 10^{-3}$)
- los neutrones están formados por quarks, partículas cargadas con spin 1/2

Diamagnetismo

- Muchas sustancias como el agua, la madera, el vidrio, y muchos elementos como el H_2 , N_2 , Ar, Cu, Ag, Pb, son diamagnéticas
- Cuando un material diamagnético se sitúa en un campo magnético se imana, pero M apunta en dirección opuesta a B (un material diamagnético es repelido por un imán)
- El diamagnetismo es independiente de T
- Fue descubierto por Brugmans en 1778 en Bi y Sb.
- Cuando una aguja de un material diamagnético se suspende en una región con B , se orienta perpendicular al campo, mientras que si el material es paramagnético se orienta paralela al campo.

Diamagnetismo

- Los nombres diamagnetismo (de diametral) y paramagnetismo (de paralelo) fueron propuestos por Faraday, quien estudió extensamente estos fenómenos desde 1845 (en tiempos de Faraday no se conocía el átomo ni la estructura de la materia)
- El diamagnetismo es anti-intuitivo (esperaríamos que el par de fuerzas de B sobre m oriente m a lo largo de B), es un fenómeno cuántico y se necesita la Mecánica Cuántica para su comprensión real



Explicación “clásica”

- J J Larmor dio una explicación cualitativa del diamagnetismo a ppios del siglo XX basándose en la ley de inducción de Faraday
- La explicación se basa en el modelo planetario del átomo (previo al modelo de Bohr –no hay cuantización de las órbitas–)
- La razón es que el campo inducido se opone al campo existente siguiendo la ley de Lenz

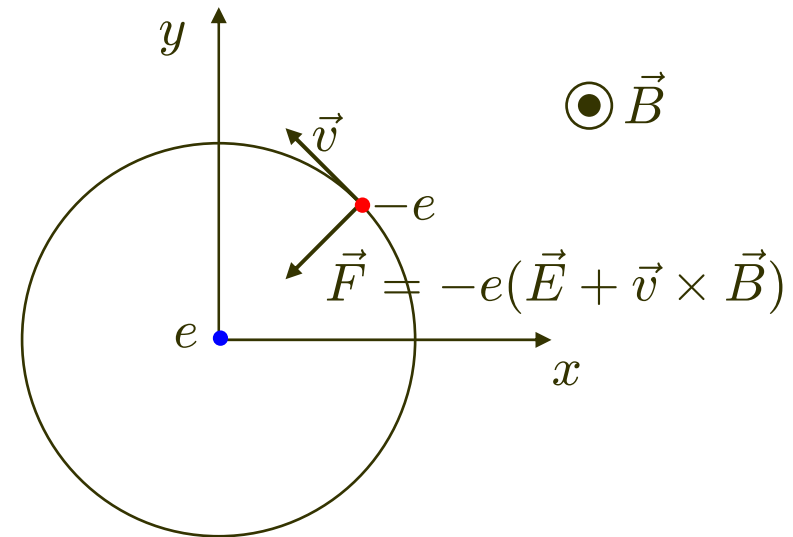
Modelo planetario

- Sin campo: $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{m_e v^2}{r}$

- Con campo $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} + ev'B = \frac{m_e v'^2}{r}$

- Combinando las dos ecuaciones,

$$\delta\vec{m} = -\frac{er}{2}\delta v\vec{u}_z = -\frac{e^2 r^2}{4m_e}\vec{B}$$



Diamagnetismo

- Cuánticamente, el movimiento del electrón viene descrito por el Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + V$$

- En presencia de un campo magnético,

$$\mathcal{H} = \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} + V$$

- Es el pequeño término $e^2 A^2 / 2m$ el responsable del diamagnetismo

Paramagnetismo

- Cuando un material paramagnético se sitúa en un campo magnético se imana, con M proporcional a B
- La causa del paramagnetismo es la existencia de momentos dipolares permanentes
- El orden típico de los momentos magnéticos es el magnetón de Bohr
- La respuesta paramagnética domina sobre la diamagnética, que es muy pequeña
- Todos los átomos con un número impar de electrones tienen momento magnético
- Los metales de transición y las tierras raras tienen momentos magnéticos elevados
- A partir de la energía de un dipolo en un campo magnético se llega a la fórmula de Langevin

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{mB}{3kT} \qquad \vec{M} = nm_0 \langle \cos \theta \rangle = \frac{nm_0^2}{3kT} \vec{B}$$

Imanación y corrientes de imanación

- Para incluir el efecto del medio hemos introducido $\mathbf{M}$

$$\vec{M}(\vec{r})d^3\vec{r} = \sum_{i=1}^N \vec{m}_i$$

- Se trata de introducir $\mathbf{M}$ en la ecuación del potencial vector en forma similar a como se introdujo $\mathbf{P}$ en el potencial escalar eléctrico

Potencial de un dipolo magnético

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \qquad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m}_i \times (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

Contribución al potencial de un conjunto de dipolos

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \frac{\vec{m}_i \times (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3\vec{r}'$$

Potencial de un medio imanado

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3\vec{r}'$$

Potencial en términos de las corrientes de imanación

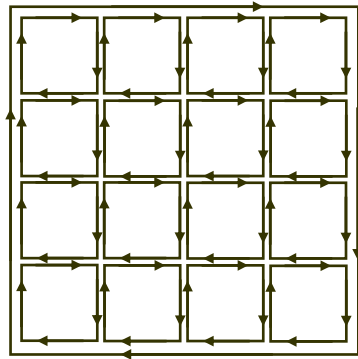
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int \frac{\vec{J}_b}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' + \oint \frac{\vec{K}_b}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' \right]$$

Corrientes de imanación

$$\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M} \qquad \vec{K}_b = \vec{M} \times \vec{n}$$

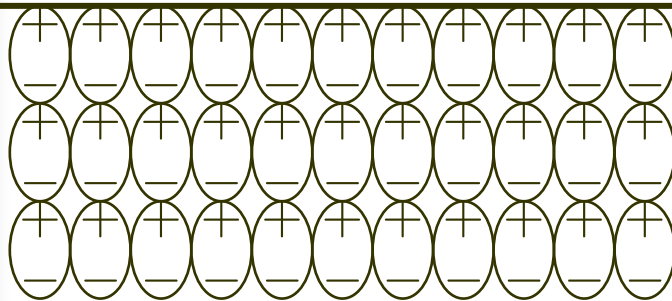
Corrientes de imanación

Corriente superficial de imanación



Si todos los dipolos tienen la misma intensidad y dirección, el resultado es una corriente superficial de imanación $\vec{K}_b = \vec{M} \times \vec{n}$

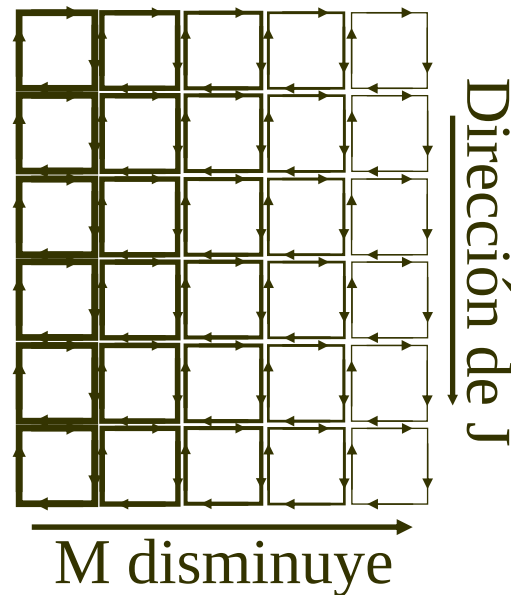
Carga superficial de polarización



Si todos los dipolos son idénticos y apuntan en la misma dirección, el resultado es una carga superficial de polarización

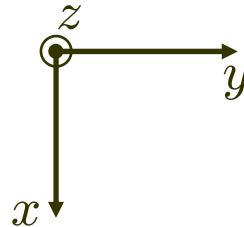
$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

Corrientes de imanación



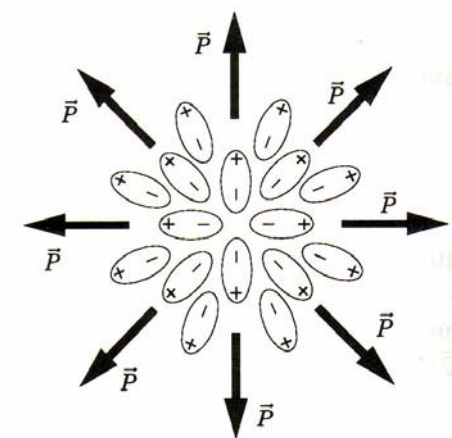
$$\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M} \quad J_x = \frac{\partial M_z(y)}{\partial y}$$

Una variación espacial (transversal) de M es equivalente a una corriente de imanación



Una variación espacial de P es equivalente a una densidad de carga de polarización

$$\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$



El vector H

- Las ecuaciones de Maxwell para el campo magnético de las corrientes estacionarias son

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

- Estas ecuaciones son correctas en el vacío y en un medio material

- Al analizar un medio material es conveniente separar $\vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_b$

$$\vec{J}_f = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right] = \vec{\nabla} \times \vec{H}$$

- Introduciendo un nuevo vector

$$\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$$

- se cumple el Teorema de Ampère para H, que depende sólo de las corrientes libres

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_f \qquad \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_f)_{\text{encerrada}}$$

Susceptibilidad magnética

- En muchos materiales magnéticos, la imanación es proporcional al vector H:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

- decimos que se trata de un medio magnético lineal y a la constante de proporcionalidad se denomina susceptibilidad magnética Entonces B también es una función de H:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

- siendo μ la permeabilidad magnética
- La relación entre ambas es:

$$\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$$

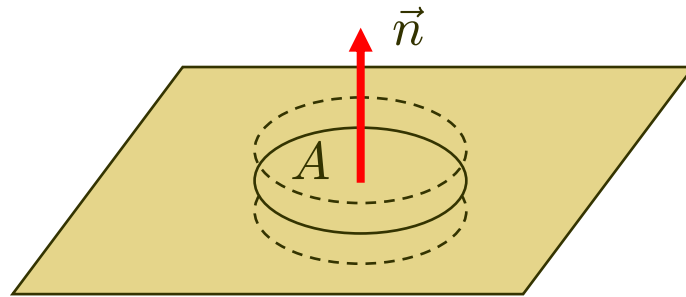
Susceptibilidades de algunos elementos y compuestos

Elemento	χ_m	Elemento	χ_m
H ₂	$-2,2 \times 10^{-9}$	O ₂	$+1,9 \times 10^{-6}$
He	$-1,1 \times 10^{-9}$	Na	$+8,5 \times 10^{-6}$
N ₂	$-6,7 \times 10^{-9}$	Al	$+2,1 \times 10^{-5}$
Si	$-3,3 \times 10^{-6}$	K	$+5,7 \times 10^{-6}$
Ar	$-1,1 \times 10^{-8}$	Cr	$+2,9 \times 10^{-4}$
Cu	$-9,6 \times 10^{-6}$	Rb	$+3,7 \times 10^{-6}$
Xe	$-2,6 \times 10^{-8}$	W	$+7,0 \times 10^{-5}$
Au	$-3,4 \times 10^{-5}$	Nd	$+2,8 \times 10^{-4}$
Pb	$-1,6 \times 10^{-5}$	Gd	$+8,7 \times 10^{-3}$

Compuesto	χ_m
H ₂ O	$-9,0 \times 10^{-6}$
CO	$-5,5 \times 10^{-9}$
NO	$+8,2 \times 10^{-7}$
CO ₂	$-1,2 \times 10^{-8}$
SiO ₂	$-1,4 \times 10^{-5}$

Condiciones de contorno

La componente normal de B se conserva



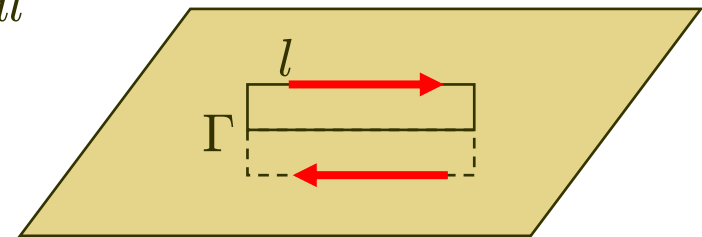
$$\int_A \vec{B}_1 \cdot \vec{n} dA = \int_A \vec{B}_2 \cdot \vec{n} dA$$

$$B_{1n} = B_{2n}$$

La componente tangencial de H se conserva si no hay corrientes superficiales

$$\int_{\Gamma} (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma} (\vec{K}_f \times \vec{n}) \cdot d\vec{l}$$

$$H_{2t} - H_{1t} = |\vec{K}_f \times \vec{n}|$$



Ferromagnetismo

- Muchos materiales de la vida cotidiana son ferroimanes (herraduras, barras imantadas, agujas de brújula, componentes de motores, transformadores, altavoces, etc.)
- Los ferroimanes poseen propiedades físicas específicas, la más conocida es que son fáciles de imantar
- Sólo tres elementos (Fe, Co, Ni) son ferroimanes a temperatura ambiente
- Los ferroimanes poseen una dependencia en T característica
- Los ferroimanes poseen una temperatura característica denominada “temperatura de Curie” por encima de la cual hay una transición de fase de ferromagnético a paramagnético. La T_C del Fe es $T_C=1043$ K.

Relaciones constitutivas y ecuaciones de Maxwell

Parámetro	símbolo	ecuación constitutiva
Susceptibilidad dieléctrica	χ_e	$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$
Permitividad dieléctrica	ε	$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$
Susceptibilidad magnética	χ_m	$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$
Permeabilidad magnética	μ	$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$