El campo de las cargas en reposo. Campo electrostático

- Introducción.
- Propiedades diferenciales del campo electrostático.
- Propiedades integrales del campo electromagnético. Teorema de Gauss.
- El potencial electrostático. Ecuaciones del potencial.
- La condición de equilibrio para conductores homogéneos y sus consecuencias.

Campo eléctrico

- Ley de Coulomb, acción a distancia, influencia local, concepto de campo
- Problema del autocampo
- Definición de campo eléctrico debido a una distribución de carga

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\int\int_V \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} d^3\vec{r}'$$

Ejemplo: hallar el campo eléctrico producido por un anillo de radio R cargado con carga Q sobre el eje z

Camino intuitivo

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda ds}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda ds}{z^2+R^2}$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\cos\theta}{z^2+R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qz}{[z^2+R^2]^{3/2}}$$

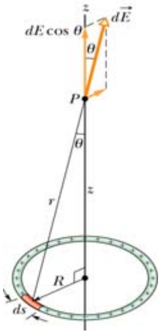
Camino formal

$$\rho(\vec{r}') = \lambda\delta(r'-R)\delta(z')$$

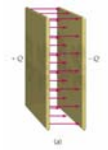
$$\vec{r}-\vec{r}' = z\vec{u}_z - R\cos\theta\vec{u}_x - R\sin\theta\vec{u}_y$$

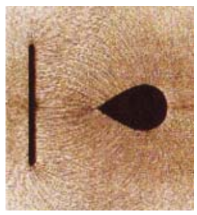
$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{z^2+R^2}$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\lambda\delta(r'-R)\delta(z')zr'dr'd\phi dz'}{[z^2+R^2]^{3/2}}$$



Líneas de campo





Teorema de Gauss

- La evaluación del campo eléctrico parece complicada incluso en problema sencillos
- Si hay simetría puede aprovecharse ésta para la determinación del campo eléctrico mediante el teorema de Gauss, que en su forma integral nos dice que:

$$\oint \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{S}(\vec{r}) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

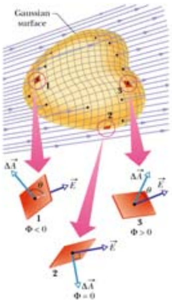
- S es una superficie cerrada (real o imaginaria) y q la carga total encerrada

Johann Carl Friedrich Gauss

(1777-1855)

- Uno de los matemáticos más grandes de la historia
- Publicó sus trabajos más importantes en las áreas:
  - Geometría no euclidiana y diferencial
  - Estadística (incluyendo mínimos cuadrados)
  - Teoría del potencial
  - Magnetismo terrestre

Flujo del campo eléctrico



El flujo es proporcional al número de líneas de campo que atraviesa una superficie determinada

$$\Phi_E = \sum \Delta A E \cos\theta$$

En forma vectorial,

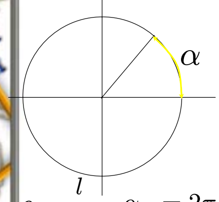
$$\Phi_E = \sum \Delta \vec{A} \cdot \vec{E}$$

La integral sobre una superficie cerrada es:

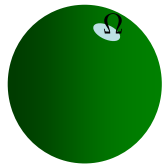
$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Ángulo plano y ángulo sólido

circunferencia de radio r=1



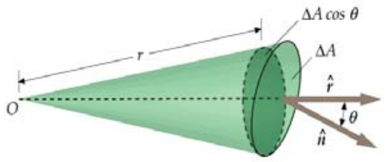
superficie esférica de radio r=1



$$\alpha = \frac{l}{r} \qquad \alpha_T = 2\pi$$

$$\Omega = \frac{S}{r^2} \qquad \Omega_T = 4\pi$$

Ángulo sólido



$$\Delta\Omega = \frac{\Delta A \cos\theta}{r^2} = \frac{\Delta A \hat{n} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

Demostración del T. Gauss

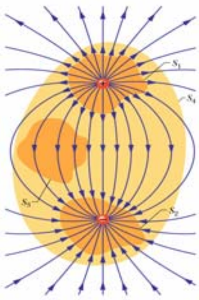
$$\Phi_E = \oint \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oint \left[\int\int\int \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} d^3\vec{r}' \right] d\vec{S}$$

Intercambiando la integral de superficie por la de volumen,

$$\Phi_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\int\int \left[\oint \frac{(\vec{r}-\vec{r}') \cdot d\vec{S}(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right] \rho(\vec{r}') d^3\vec{r}'$$

$$\Phi_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\int\int d\Omega(\vec{r}') \rho(\vec{r}') d^3\vec{r}'$$

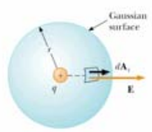
Si no hay cargas Φ_E=0



- ¿Cuál es el flujo a través de cada superficie cerrada?
- S_1?
- S_2?
- S_3?
- S_4?

Carga puntual

Superficie esférica de radio r que encierra una carga q en el origen



Calculemos el flujo a través de la esfera

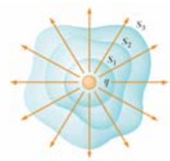
$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\Phi_E = \oint E dS = E \oint dS$$

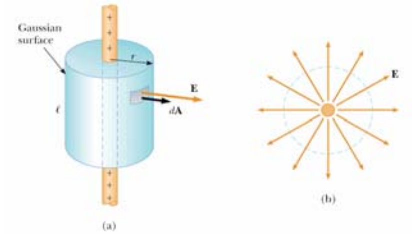
$$\frac{q}{\varepsilon_0} = E 4\pi r^2$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

Generalicemos a cualquier superficie

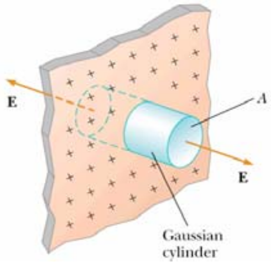


Hilo indefinido



$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} = E2\pi r l \qquad E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}$$

Plano indefinido



Flujo a través de la superficie del cilindro

$$\Phi_E = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} = 2EA$$

Campo en la superficie del plano aislante

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Forma diferencial del teorema de Gauss

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho d^3\vec{r}$$

$$\int \vec{\nabla}\cdot\vec{E} d^3\vec{r} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho d^3\vec{r}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

Campo gravitatorio y electrostático

Fuerza entre dos masas

$$F_G = -G\frac{mM}{r^2}$$

Campo gravitatorio

$$\vec{F}_g = m\vec{g}$$

Fuerza entre dos cargas

$$F_C = K\frac{qQ}{r^2}$$

Campo eléctrico

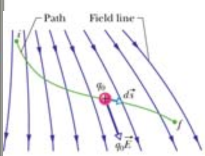
$$\vec{F}_e = q\vec{E}$$

Trabajo como diferencia de energía potencial (gravitatoria o electrostática)

$$W_{if} = \int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{s} = m\int_i^f \vec{g}\cdot d\vec{s} = -\Delta U = U_i - U_f$$

$$W_{if} = \int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{s} = q\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\Delta U = U_i - U_f$$

Potencial eléctrico



Se define el potencial eléctrico como la energía potencial por unidad de carga, i.e.

$$V = \frac{U}{q}$$

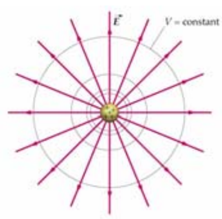
$$W = \int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{s} = q_0\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\Delta U$$

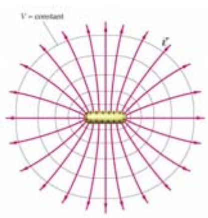
De la definición de potencial, $\Delta V = V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{s}$

En forma diferencial, $dV = -\vec{E}d\vec{s} = -Eds\cos\theta = -E_s ds$

Por lo tanto $E_s = -\frac{dV}{ds} \Longrightarrow \boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}V}$

Superficies equipotenciales





Dado que cuando E y ds son perpendiculares no hay variación de potencial, las superficies equipotenciales son perpendiculares a las líneas de campo.

El campo y el potencial

De la expresión del campo eléctrico en términos del potencial,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \longrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

se deduce que el campo electrostático (el de las cargas en reposo) es irrotacional. Esto, en términos integrales indica que la circulación del campo eléctrico es nula, sea cual sea la trayectoria:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

El principio de superposición de aplica de forma más conveniente al potencial

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots = -\vec{\nabla} V_1 - \vec{\nabla} V_2 - \ldots$$
$$\vec{E} = -\vec{\nabla}(V_1 + V_2 + \ldots)$$

Expresión integral para V

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\int\int \frac{\rho(\vec{r}\,')(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} d^3\vec{r}\,'$$

Pero $\frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} = \vec{\nabla}' \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\right] = -\vec{\nabla} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\right]$

Luego $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\int\int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d^3\vec{r}\,'\right]$

Por tanto $\boxed{V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\int\int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d^3\vec{r}\,'}$

Ecuaciones de Poisson y Laplace

De la ley de Gauss, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

y la definición en términos del potencial $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$

Ecuación de Poisson

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

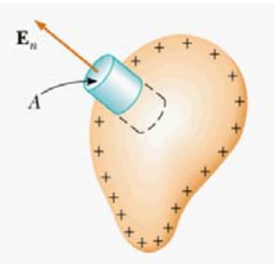
Ecuación de Laplace

$$\Delta V = 0$$

Conductores (perfectos)

- El campo es cero en el interior del conductor
- Las cargas en un conductor están en la superficie
- La superficie de un conductor es una superficie equipotencial: el campo eléctrico es perpendicular a la superficie de un conductor
- En regiones con más curvatura hay más acumulación de carga

Campo eléctrico en la superficie de un conductor



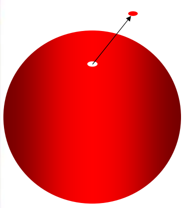
El flujo a través del cilindro de la figura es

$$\Phi_E = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} = EA$$

por el teorema de Gauss, luego el campo en la superficie del conductor es:

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

Fuerza sobre la superficie de un conductor cargado



El campo sobre la superficie del conductor (fuera del conductor) sabemos que vale

$$E_a = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

por el teorema de Gauss, mientras que el campo en el interior es nulo,

$$E_b = 0$$

La fuerza sobre un elemento de carga es

$$f ds = \sigma ds E$$

El campo en *a* y *b* lo podemos escribir como

$$E_a = E_{\text{resto}} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad E_b = E_{\text{resto}} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

La densidad de fuerza sobre la superficie de un conductor cargado es: $\boxed{f = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}}$

Cargas inducidas

Al introducirse una carga q dentro de una superficie conductora hueca, debe inducirse una carga en la superficie interna del conductor de manera que se anule el campo en el volumen del mismo.