Desarrollo multipolar

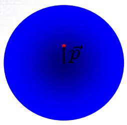
Tema 4
Electromagnetismo

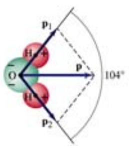
Desarrollo multipolar del potencial

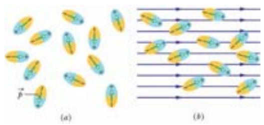
- Introducción
- Desarrollo multipolar del potencial escalar correspondiente a una distribución de carga
- Momentos multipolares
- Potencial y campos originados por un dipolo eléctrico
- Distribuciones de dipolos

Introducción

- Necesidad del dipolo eléctrico (¡La materia es neutra!).
- ¿Cómo se ve el dipolo eléctrico a grandes distancias?
- Necesidad de introducir distribuciones de dipolos.
- Momento dipolar. ¿Y si el momento dipolar es nulo?







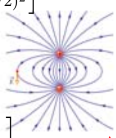
El dipolo puntual

Consideremos dos cargas, una positiva y otra negativa. Sea z el eje que une ambas cargas y situémoslas en +d/2 y –d/2 sobre el eje z (sin pérdida de generalidad). El potencial de las dos cargas es:

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d/2)^2}}\right]$$

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2-zd+d^2/4}} - \frac{1}{\sqrt{r^2+zd+d^2/4}}\right]$$

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\frac{1}{\sqrt{1-zd/r^2+d^2/4r^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+zd/r^2+d^2/4r^2}}\right]$$



¡Esto no es un dipolo puntual!

El dipolo puntual es un ente formado por dos cargas puntuales infinitamente próximas. Se define el momento dipolar de estas dos cargas como:

$$p = \lim_{\substack{d\to 0\\ q\to\infty}} qd$$

Reescribamos la expresión del potencial en la forma:

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\frac{1}{\sqrt{1-zd/r^2+d^2/4r^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+zd/r^2+d^2/4r^2}}\right]$$

Hagamos un desarrollo en serie tomando d/r muy pequeño:

$$V(\vec{r}) \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\left(1+\frac{zd}{2r^2}-\frac{d^2}{8r^2}\right)-\left(1-\frac{zd}{2r^2}-\frac{d^2}{8r^2}\right)\right] = \frac{qzd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Generalizando a una dirección cualquiera,

$$V(\vec{r}) \approx \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Momento dipolar de una distribución de carga

El potencial de una distribución de carga es:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d^3\vec{r}'$$

Si desarrollamos hasta primer orden en r'/r el denominador,

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r\sqrt{1+\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}}} \approx \frac{1}{r}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2 + \left(\frac{\vec{r}}{r}\right)\cdot\left(\frac{\vec{r}'}{r}\right)\right]$$

de donde

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \frac{1}{r}\left(1+\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}\right)$$

Sustituyendo en la ecuación del potencial, en primer orden,

$$V(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\int \rho(\vec{r}')d^3\vec{r}' + \frac{\vec{r}}{r^2}\cdot\int \vec{r}'\rho(\vec{r}')d^3\vec{r}'\right]$$

El primer término es la carga. Comparando con la expresión del potencial de un dipolo puntual podemos asignar la segunda integral al momento dipolar de la distribución de carga:

$$\vec{p} = \int \vec{r}\rho(\vec{r})d^3\vec{r}$$

Si la distribución de carga consistiera en dos cargas, una positiva y otra negativa, separadas una distancia d, la distribución sería:

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r}-\vec{d}/2) - q\delta(\vec{r}+\vec{d}/2)$$

Sustituyendo en la ecuación de arriba comprobamos que el dipolo puntual no es más que un caso particular de momento dipolar.

Demostrar que el momento dipolar depende del origen

Campo eléctrico de un dipolo

El potencial del dipolo, en cartesianas, es

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{xp_x + yp_y + zp_z}{[x^2+y^2+z^2]^{3/2}}$$

La componente x del campo eléctrico

$$E_x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{p_x}{r^3} - \frac{3}{2}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}\,2x}{r^5}\right]$$

Por inducción:

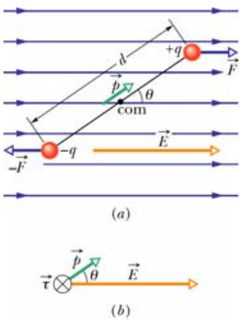
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(\vec{r}\cdot\vec{p})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}$$

Fuerza sobre un dipolo en un campo exterior

Un dipolo eléctrico en un campo exterior tiende a alinearse al campo (dado que las dos cargas no pueden separarse). Aparece un par de fuerzas

$$\tau = (F_q d/2 - F_{-q} d/2)\sin\theta$$

$$\vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E}$$



Energía potencial de un dipolo

- La energía de un dipolo eléctrico en un campo exterior es $U = -\vec{p}\cdot\vec{E}_0$
- Si el dipolo está alineado al campo la energía es mínima
- Si el dipolo está orientado en sentido contrario al campo la energía es máxima

Distribuciones de dipolos

Potencial de un dipolo en el origen de coordenadas:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3}$$

Potencial de un dipolo en el punto $\vec{r}_i$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{r}-\vec{r}_i)\cdot\vec{p}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$$

La contribución al potencial de un conjunto de dipolos en un elemento de volumen conteniendo N dipolos es

$$dV(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{(\vec{r}-\vec{r}_i)\cdot\vec{p}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{r}-\vec{r}')\cdot\vec{P}(\vec{r}')d^3\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

Momento cuadrupolar de una distribución de carga

A veces nos encontramos con moléculas neutras no polares y no polarizables, es decir que no presentan carga ni momento dipolar. El primer término no nulo del potencial sería el correspondiente al orden 2 en el desarrollo de r'/r. A este término se le denomina momento cuadrupolar eléctrico. Para generalizar imaginemos una distribución de carga genérica y desarrollemos el potencial hasta segundo orden en r'/r.

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{r'^2}{r^2} - 2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}\right) + \frac{3}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2!}\left(\frac{r'^2}{r^2} - 2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}\right)^2 + \dots\right]$$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^3} - \frac{1}{2}\frac{r'^2}{r^3} + \frac{3}{2}\frac{(\vec{r}\cdot\vec{r}')^2}{r^3} + O\left(\frac{r'^3}{r^3}\right)$$

Separemos las variables sin prima de las con prima:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3}\sum_i x_i {x'}_i - \frac{1}{2}\frac{1}{r^3}\sum_i {x'}_i {x'}_i + \frac{3}{2}\frac{1}{r^5}\sum_i x_i {x'}_i \sum_j x_j {x'}_j$$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3}\sum_i x_i {x'}_i - \frac{1}{2}\frac{1}{r^3}\sum_i\sum_j {x'}_i {x'}_j \delta_{ij} + \frac{3}{2}\frac{1}{r^5}\sum_i\sum_j x_i x_j {x'}_i {x'}_j$$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3}\sum_i x_i {x'}_i + \frac{1}{2r^5}\sum_i\sum_j x_i x_j \left(3{x'}_i {x'}_j - \delta_{ij} {r'}^2\right)$$

El potencial adquiere la expresión:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{\int \rho d^3r'}{r} + \frac{\vec{r}\int \rho \vec{r}' d^3r'}{r^3} + \frac{\sum_{ij} x_i x_j \int \rho \left[3x'_i x'_j - {r'}^2\delta_{ij}\right] d^3r'}{2r^5}\right\}$$

En forma compacta:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3} + \frac{1}{r^5}\sum_{ij} x_i x_j Q_{ij}\right\} \qquad Q_{ij} = \int \rho \left[3x'_i x'_j - {r'}^2\delta_{ij}\right] d^3\vec{r}'$$

Desarrollo en serie de Taylor

Derivadas:

$$y = (1+x)^{-1/2}\Big|_{x=0} = 1$$

$$y' = -\frac{1}{2}\,(1+x)^{-3/2}\Big|_{x=0} = -\frac{1}{2}$$

$$y'' = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(1+x)^{-5/2}\Big|_{x=0} = \frac{3}{4}$$

Desarrollo de Taylor:

$$y(x) \approx y(0) + y'(0)x + y''(0)\frac{x^2}{2!} + y'''(0)\frac{x^3}{3!}$$

$$y(x) \approx 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3$$