

Desarrollo multipolar del potencial vector

Tema 5
Electromagnetismo

Desarrollo multipolar del potencial vector

- Introducción
- Desarrollo multipolar del potencial vector debido a una distribución de corrientes
- Multipolos magnéticos
- El dipolo magnético puntual.
- Distribuciones de dipolos magnéticos

Introducción

- Los medios magnéticos están constituidos por átomos con un momento magnético (angular o de spin).
- El momento magnético angular puede interpretarse clásicamente suponiendo que el electrón gira alrededor del átomo
- El momento magnético de spin tiene un origen cuántico y no hay interpretación clásica
- No hay cargas magnéticas, luego el primer "ente" no nulo es el dipolo magnético
- La materia puede sustituirse por una distribución de dipolos magnéticos

Desarrollo de A

El potencial vector debido a una distribución de corrientes es:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Desarrollando el denominador en términos de r'/r ,

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} - \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^3} + \frac{3}{2} \frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2}{r^3} + O\left(\frac{r'^3}{r^3}\right)$$

El primer término del desarrollo es:

$$\frac{\mu_0}{4\pi r} \int \vec{J}(\vec{r}') d^3r' = 0 \quad \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \oint d\vec{l} = 0$$

Demostración para corrientes estacionarias:

$$0 = \int \vec{r}' (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) d^3r' = \int [\vec{\nabla} \cdot (\vec{J} \cdot \vec{r}') - \vec{J}] d^3r' = - \int \vec{J} d^3r'$$

Término dipolar

Primer término no nulo: $\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int \vec{J}(\vec{r}') (\vec{r} \cdot \vec{r}') d^3r'$ Componente β de dicho término: $\frac{\mu_0}{4\pi r^3} x_\alpha \int x'_\alpha J_\beta d^3r'$

La divergencia del producto

$$\partial_\alpha (J_\alpha x_\beta x_\gamma) = (\partial_\alpha J_\alpha) x_\beta x_\gamma + J_\alpha \delta_{\alpha\beta} x_\gamma + J_\alpha x_\beta \delta_{\alpha\gamma} = J_\beta x_\gamma + J_\gamma x_\beta$$

Integrando a un volumen que englobe las corrientes llegamos a:

$$\int J_\alpha x_\beta d^3r' = - \int J_\beta x_\alpha d^3r' \quad x_\alpha \int J_\alpha x'_\beta d^3r' = -x_\alpha \int J_\beta x'_\alpha d^3r'$$

Luego podemos reescribir el término del desarrollo en la forma:

$$\int \vec{J}(\vec{r}') (\vec{r} \cdot \vec{r}') d^3r' = \frac{1}{2} \int [\vec{J}(\vec{r}') (\vec{r} \cdot \vec{r}') - (\vec{J} \cdot \vec{r}') \vec{r}'] d^3r' = \left[\frac{1}{2} \int \vec{J} \times \vec{r}' d^3r' \right] \times \vec{r}$$

Definiendo el momento dipolar magnético:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') d^3r' \rightarrow \vec{m} = I \int \frac{1}{2} \vec{r}' \times d\vec{l} = I \vec{S}$$

Potencial vector de un dipolo magnético $\rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$

Campo magnético

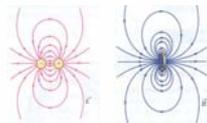
Hallando el rotacional del potencial vector,

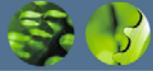
$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{m_y z - y m_z}{r^3} & \frac{m_z x - z m_x}{r^3} & \frac{m_x y - x m_y}{r^3} \end{vmatrix}$$

obtenemos el campo de un dipolo magnético:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{m})\vec{r} - r^2 \vec{m}}{r^5}$$

El potencial escalar es:

$$V_m(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{r} \cdot \vec{m}}{r^3}$$




Par sobre un dipolo

El par de fuerzas sobre una espira es:

$$\vec{\tau} = \oint_C \vec{r} \times d\vec{F} = \oint_C \vec{r} \times (I d\vec{l} \times \vec{B})$$

Diferenciando el producto

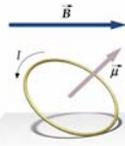
$$d[\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{B})] = \vec{r} \times (d\vec{l} \times \vec{B}) + d\vec{l} \times (\vec{r} \times \vec{B})$$

Recurriendo a la conocida relación

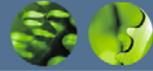
$$\vec{r} \times (d\vec{l} \times \vec{B}) + d\vec{l} \times (\vec{B} \times \vec{r}) + \vec{B} \times (\vec{r} \times d\vec{l}) = 0$$

llegamos a la expresión final

$$\vec{\tau} = I \oint_C \frac{1}{2} (\vec{r} \times d\vec{l}) \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$$



"The big English explorer, your compass and vertical hair!"



Energía de un dipolo

- La energía potencial de un dipolo magnético en un campo exterior es

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}_0$$

- Si el dipolo está alineado al campo, la energía potencial es mínima
- Si el dipolo está orientado en sentido contrario al campo, la energía es máxima