



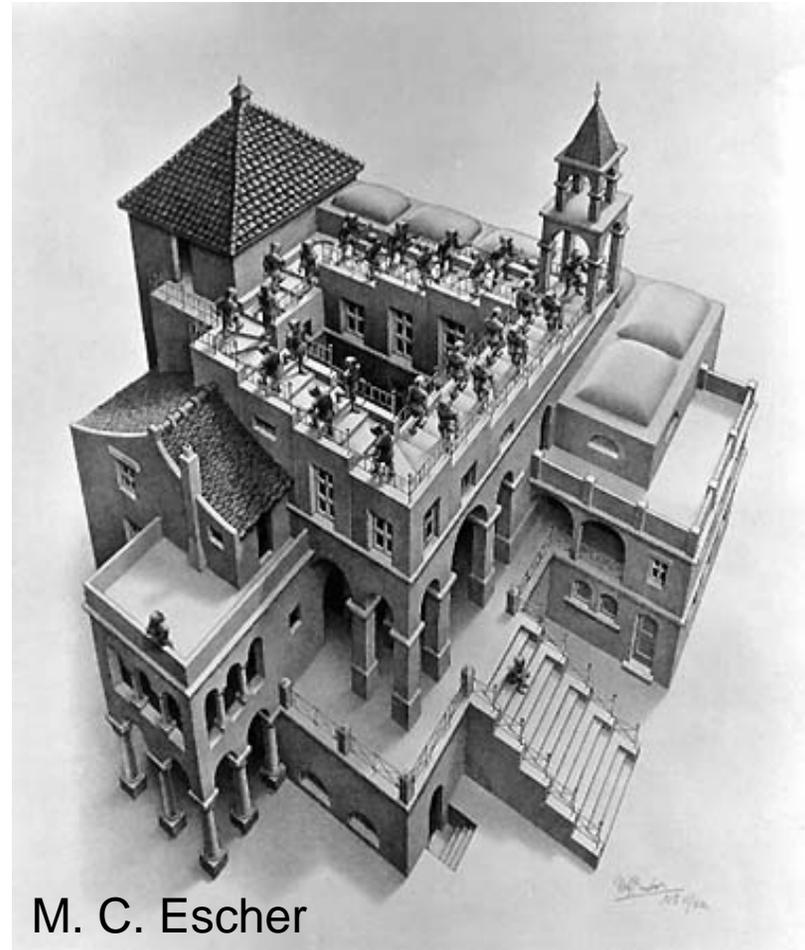
# Inducción electromagnética

Tema 6  
Electromagnetismo

# Inducción electromagnética

- Introducción
- El campo electromotor. Definición de fuerza electromotriz
- Ley de Faraday-Lenz de la inducción electromagnética
- Inducción en circuitos en movimiento
- Coeficientes de inducción. Fórmula de Neumann

# Introducción

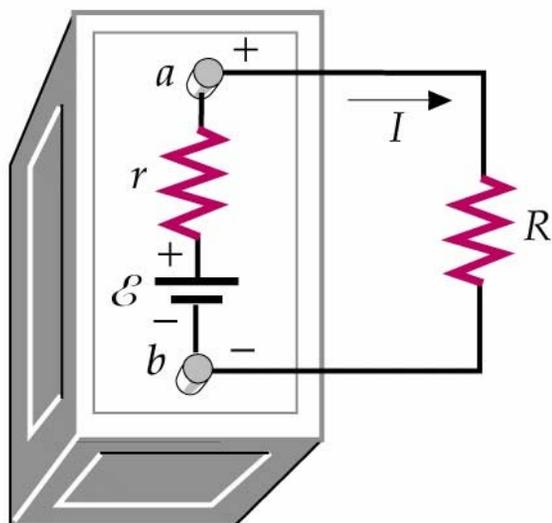


M. C. Escher

# Fuerza electromotriz

- Si unimos mediante un cable las placas de un condensador cargado se establece una corriente, pero sólo hasta que la ddp se anula
- Si queremos mantener la ddp hemos de realizar un trabajo
- Se denomina fuerza electromotriz (fem) al trabajo realizado por unidad de carga para mantener dicha ddp
$$\mathcal{E} = \frac{W}{q}$$
- La unidad de fem es el voltio (energía por unidad de carga)

# Fuente de fem



El circuito eléctrico de la figura consta de dos partes: en la exterior (resistencia) fluye una corriente  $I$  desde el polo  $+$  al  $-$ . La batería realiza un trabajo para desplazar las cargas del polo  $-$  al  $+$  y completar el circuito. La energía suministrada por la batería se disipa en la resistencia por efecto Joule.

$$\mathcal{E} = \frac{W}{q} = \frac{1}{q} \oint \vec{F}_e \cdot d\vec{l} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

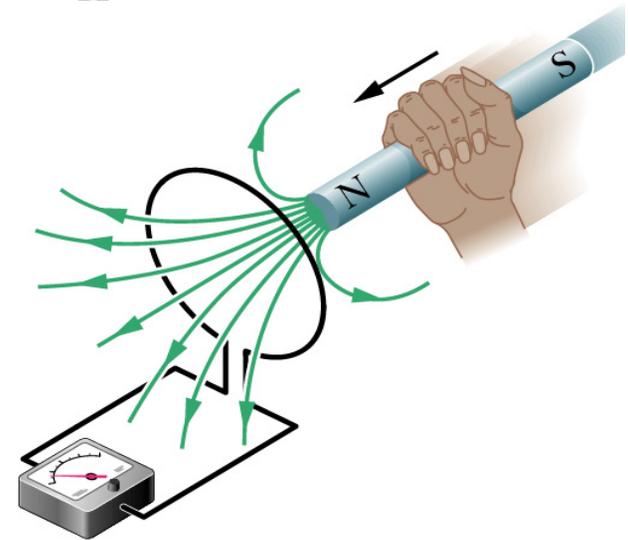
$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{E}_{em} \cdot d\vec{l} + \oint \vec{E}_{el} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{E}_{em} \cdot d\vec{l}$$

El campo electrostático no produce trabajo.

# Corrientes inducidas

- Una corriente genera un campo magnético
- ¿Puede un campo magnético generar una corriente?

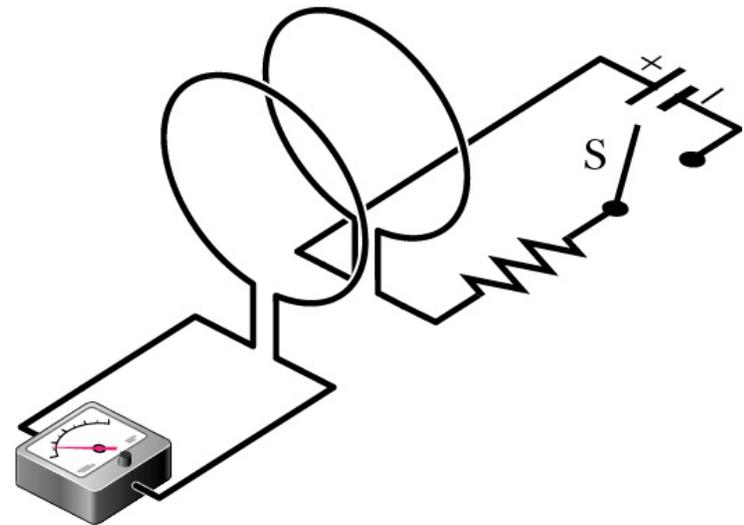
- Desplazando el imán hacia la espira, aparece una corriente en la misma
- La corriente desaparece cuando se detiene el imán
- Cuando alejamos el imán aparece una corriente en sentido opuesto
- Un movimiento más rápido genera una corriente mayor



# Corrientes inducidas

## ■ Una corriente variable, ¿puede generar (inducir) otra corriente?

- Sean dos espiras conductoras cercanas
- Si cerramos el interruptor y se establece una corriente en un circuito, se induce una corriente en el segundo circuito
- La corriente desaparece en unos instantes
- Al abrir el interruptor, vuelve a establecerse una corriente en sentido opuesto
- La corriente desaparece en unos instantes



# Corrientes inducidas

- La corriente producida en la espira se denomina corriente inducida
- El trabajo necesario para producir la corriente, por unidad de carga, se denomina fem
- La fuerza en este caso es magnética, no eléctrica
- El proceso de generación de la corriente se denomina inducción electromagnética

# Ley de Faraday

- Faraday observó que se puede establecer una corriente en una espira de las siguientes formas:
  - Desplazando un imán permanente hacia la espira o alejándolo de la misma
  - Acercando o alejando un solenoide de la espira
  - Cambiando la intensidad de corriente del solenoide
  - Girando la espira en un campo magnético constante
  - Cambiando la forma de la espira en presencia de un campo magnético constante

# Ley de Faraday

- Faraday concluye que el cambio del campo magnético que atraviesa la espira induce una corriente y por tanto una fem
- La necesidad de calcular la cantidad de campo que atraviesa la espira le lleva a definir el flujo del campo magnético de forma equivalente al flujo del campo eléctrico

$$\Phi_B = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

• ¿Cómo podemos llegar a la conclusión que llegó Faraday? A partir de la fuerza de Lorentz. La fem que proviene del término correspondiente a la fuerza magnética en la fuerza de Lorentz se denomina fem motriz (motional fem)

• Consideremos una espira  $C$  que se mueve en un campo magnético  $B$ . ¿Cuál es la fem generada?

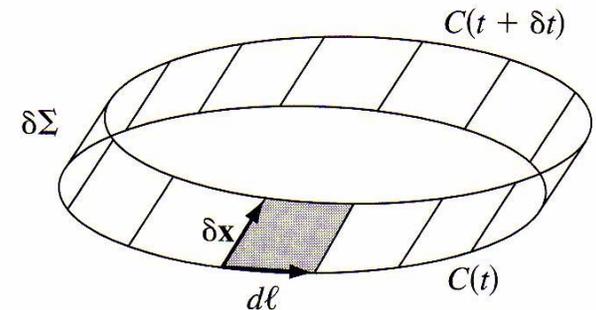
$$\mathcal{E} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{B} \cdot (d\vec{l} \times \vec{v})$$

• La figura muestra la espira en  $t$  y  $t+dt$ . La superficie de la espira cambia de  $S(t)$  a  $S(t+dt)$ . La superficie lateral  $dS$  forma, junto a las otras dos superficies, una superficie cerrada. Un elemento de superficie lateral puede escribirse como  $\delta\vec{A} = d\vec{l} \times \delta\vec{r}$

• El flujo de  $B$  a través de dicha superficie cerrada ha de ser nulo

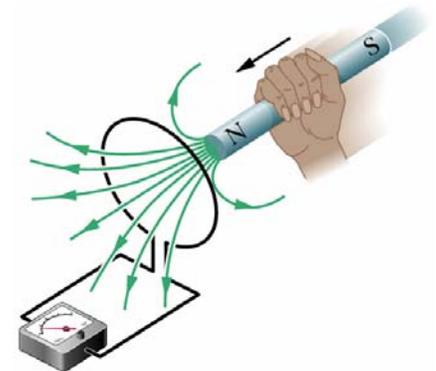
$$\delta\Phi + \int_{S(t+\delta t)} \vec{B} \cdot d\vec{A} - \int_{S(t)} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

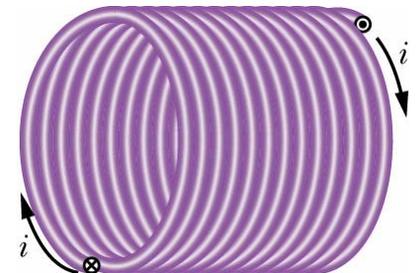


# Ley de Faraday

- Ley de inducción de Faraday: la fem generada en una espira es igual a la variación temporal del flujo que atraviesa dicha espira
- El signo menos indica que la fem inducida tiende a oponerse al cambio de flujo
- Si el cambio de flujo se produce a través de un bobinado de N espiras



$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$
$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt}$$



# Ley de Faraday

- Podemos cambiar el flujo del campo magnético a través de la espira o bobina:
  - Cambiando el campo magnético
  - Cambiando la sección de la espira
  - Cambiando el ángulo entre la espira y el campo

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = BS \cos \theta$$

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt}$$

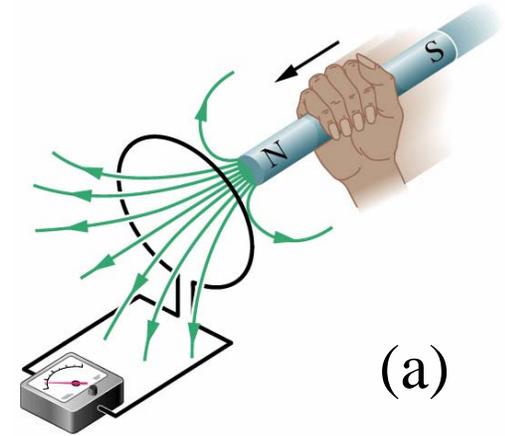
$$\mathcal{E} = -NS \cos \theta \frac{dB}{dt}$$

$$\mathcal{E} = -NB \cos \theta \frac{dS}{dt}$$

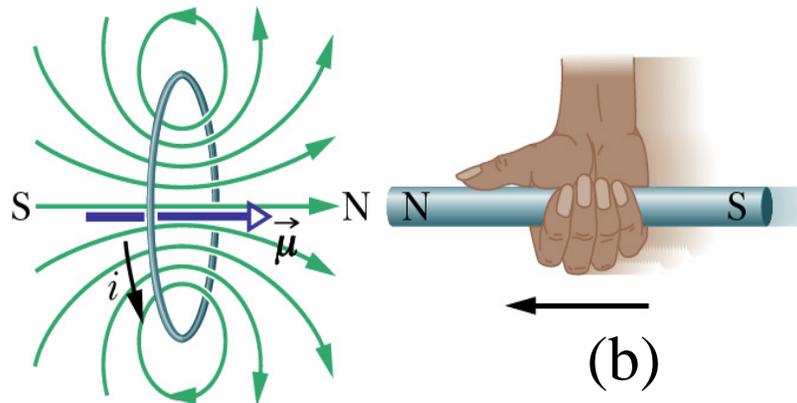
$$\mathcal{E} = -NBS \frac{d \cos \theta}{dt}$$

# Ley de Lenz

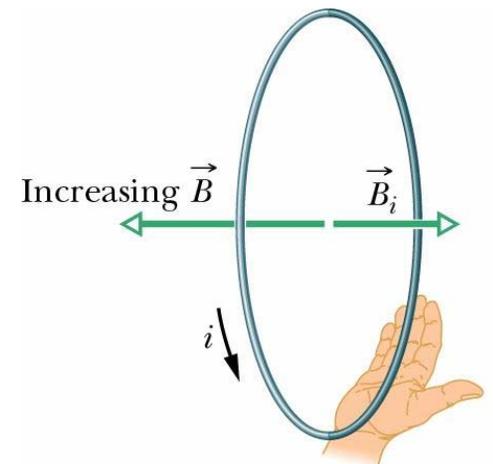
- **Ley de Lenz:** una fem da lugar a una corrente cuyo campo **se opone al cambio** de flujo que lo produce
- Cuando el imán se mueve hacia la espira (a) el flujo en la espira aumenta. La corriente inducida genera un campo en la dirección opuesta (b)



(a)

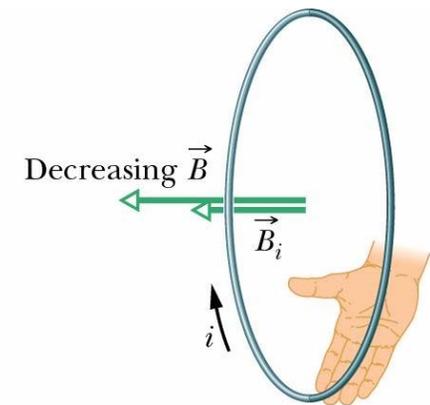
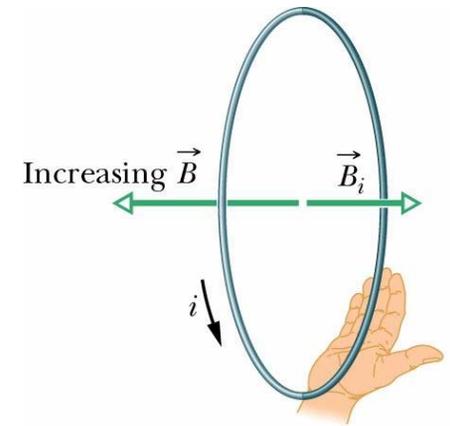


(b)



# Ley de Lenz

- Si el imán se mueve hacia la espira, el flujo en la espira aumenta. La corriente inducida genera un campo en dirección opuesta para cancelar el aumento:
- $B_i$  tiene dirección contraria para campos  $B$  crecientes
- Si el imán se aleja de la espira el flujo disminuye. La corriente inducida genera un campo en la misma dirección para evitar la disminución:
- $B_i$  tiene la misma dirección para campos  $B$  decrecientes



Sea una espira de anchura  $W=3\text{m}$  y altura  $H=2\text{m}$  en presencia de un campo magnético no uniforme de magnitud  $B = 4t^2x^2$ . Determinar la magnitud y dirección de la fem inducida al cabo de 0.1s.

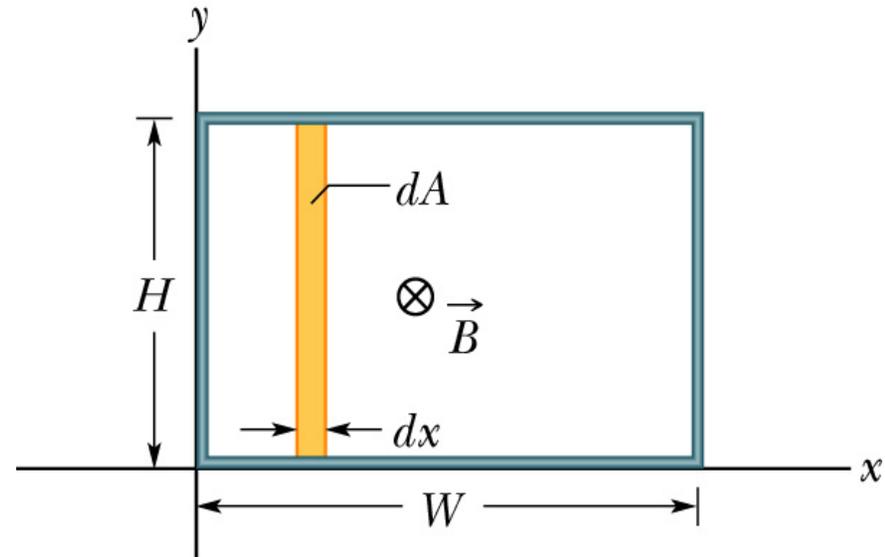
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\Phi_B = \int_0^W 4t^2x^2 H dx = 4t^2 H \frac{W^3}{3} = 72t^2$$

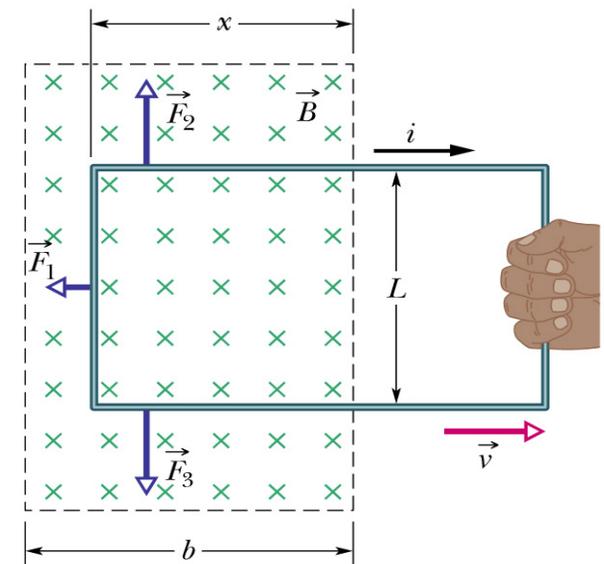
$$\mathcal{E} = -144t|_{t=0.1} = -14.4 \text{ V}$$

El sentido de la fem es contra-reloj



# Espira en B uniforme

- Si estiramos de una espira en un B uniforme a  $v$  constante hay que aplicar una fuerza  $F$
- Hay menos área, luego el flujo decrece y se induce una fem en la espira  $\Phi_B = BLx$
- El flujo del campo magnético es
- La fem inducida,  $\mathcal{E} = -BLv$
- B disminuye, luego  $B_i$  va en el mismo sentido que B



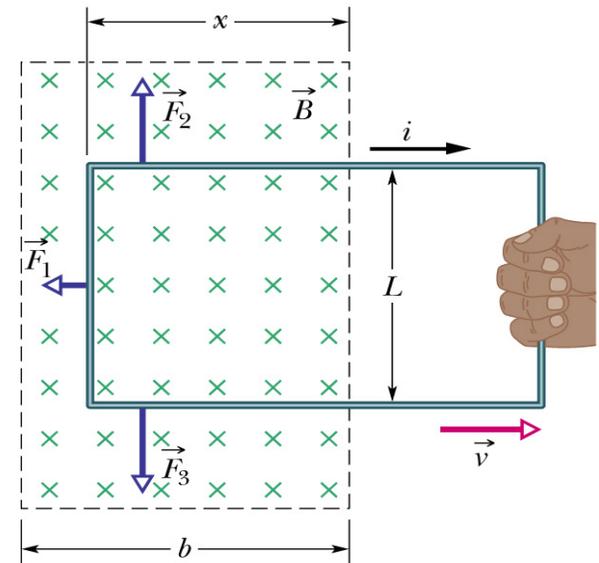
# Espira en B uniforme

- Dado que la espira transporta corriente en B hay una fuerza

magnética  $\vec{F}_B = i\vec{L} \times \vec{B}$

- Las fuerzas  $F_2$  y  $F_3$  se cancelan y  $F_1$  se opone a nuestra fuerza

aplicada:  $F_{\text{apl}} = -F_1 = -iLB$



# Espira en B uniforme

- La fem inducida es

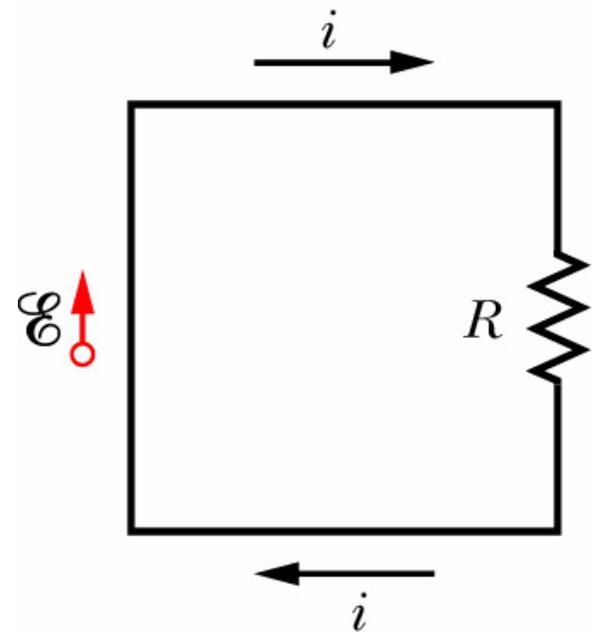
$$\mathcal{E} = BLv$$

- Por otra parte

$$\mathcal{E} = iR$$

- luego  $i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{BLv}{R}$

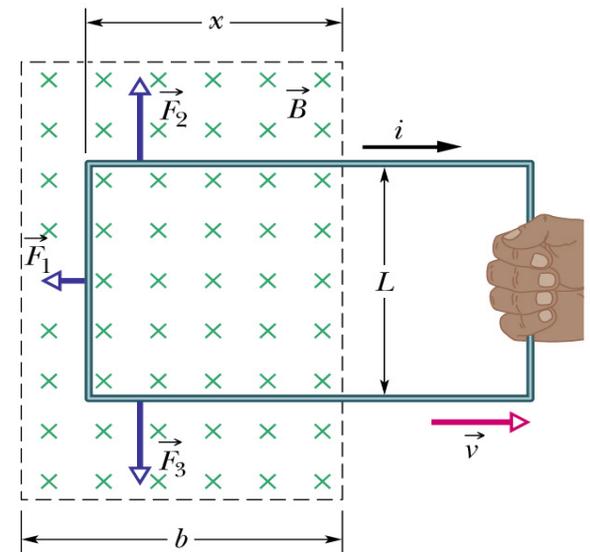
- y la fuerza es  $F_1 = iBL = \frac{B^2 L^2 v}{R}$



# Espira en B uniforme

- La energía se conserva, luego ¿adónde va a parar la energía que ejercemos al mover la espira?

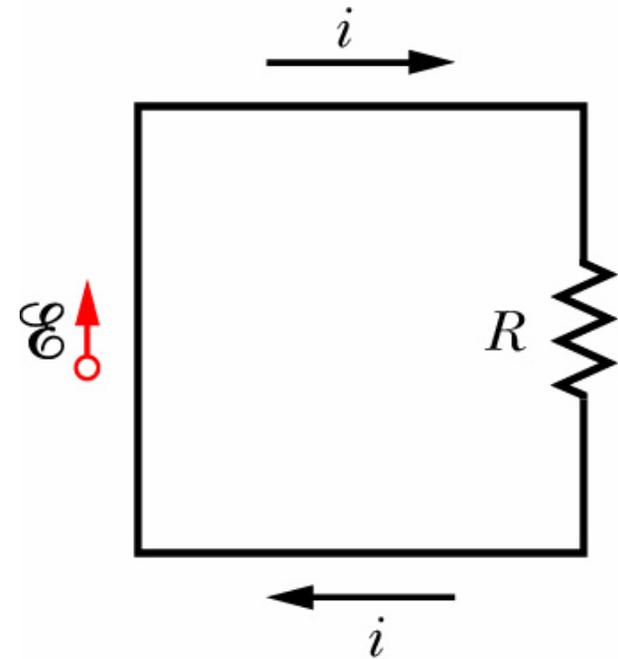
- La corriente produce calor al circular por la espira 
$$P = i^2 R = \frac{B^2 L^2 v^2}{R}$$



# Ley de Faraday

- Si hay un  $B$ , se induce una corriente en la espira
- Si circula una corriente hay un campo eléctrico
- Luego

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$



Un campo magnético variable en el tiempo produce un campo eléctrico (inducido)

# Ley de Faraday

Fijémonos en detalle en la ecuación anterior:

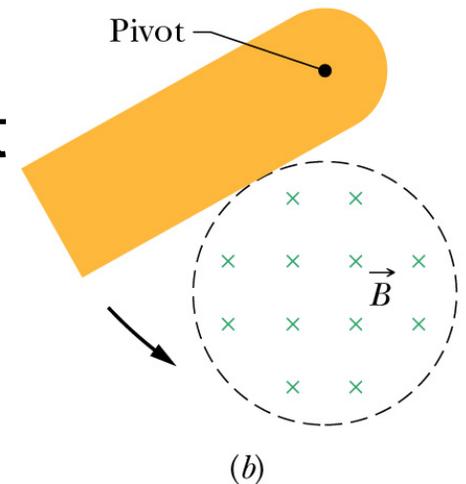
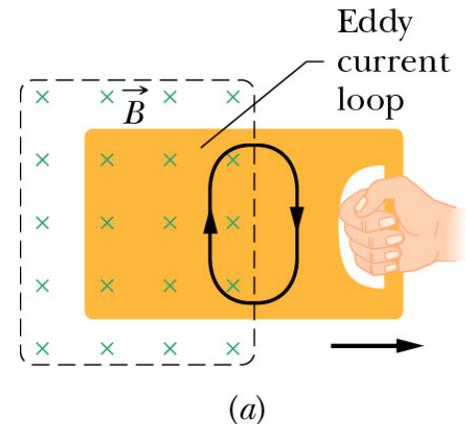
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Podemos aplicar esta ecuación a cualquier curva cerrada, ya sea real o no. Si la curva cerrada coincide con una espira, la existencia del campo eléctrico produce la aparición de la corriente. Pero el campo eléctrico existe haya espira o no. Si aplicamos la ecuación a una curva imaginaria cualquiera, aplicando el teorema de Stokes a la primera ecuación, deducimos

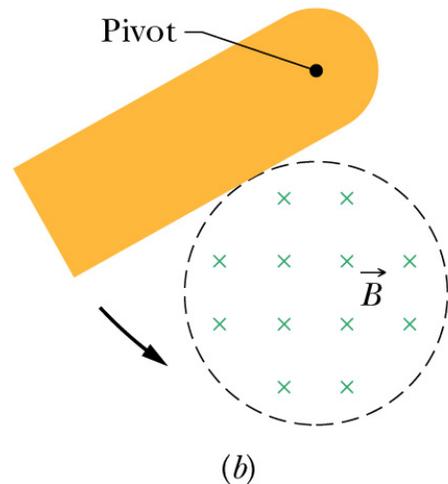
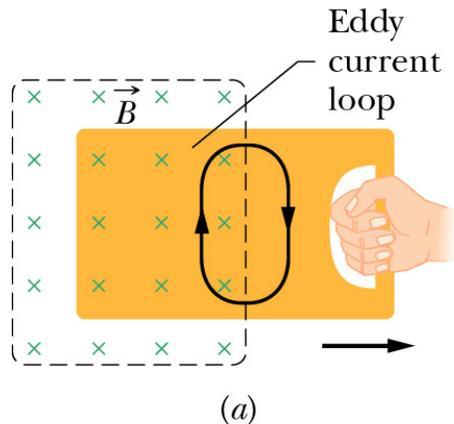
$$\int \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

# Corrientes de Foucault

- ¿Qué ocurre si en vez de una espira, movemos un bloque de metal en un campo magnético?
- Los electrones libres del metal se mueven en círculos formando las denominadas corrientes de Foucault (eddy currents)
- Un plato metálico oscilando sobre un campo magnético genera corrientes de Foucault



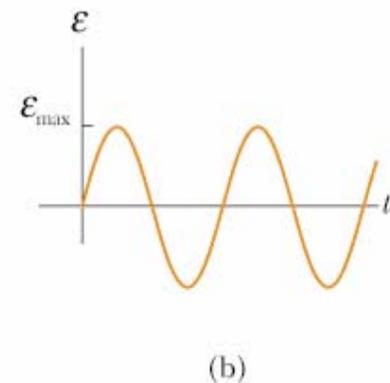
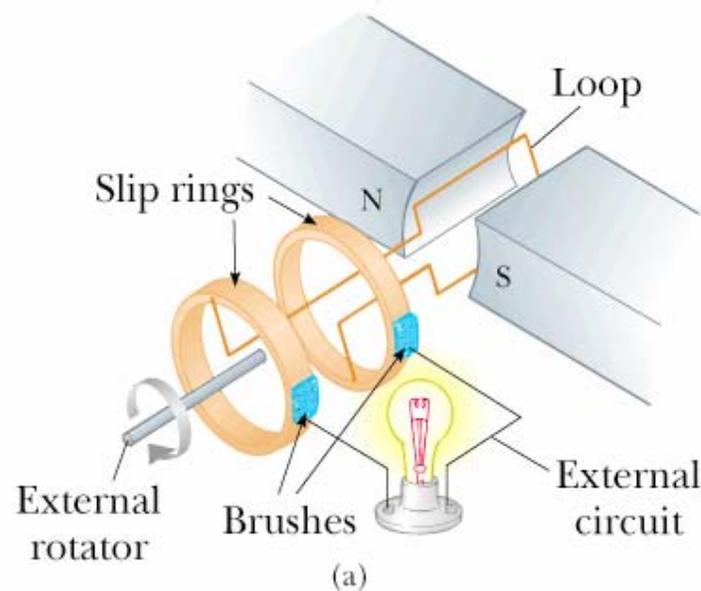
# Corrientes de Foucault



- Las corrientes de Foucault se oponen al cambio que las origina (ley de Lenz)
- Las corrientes de Foucault producen una fuerza retardada cuando el plato entra y deja la región de  $B$ , llevando el plato al reposo
- Cortando el metal en trozos se reducen notablemente las corrientes de Foucault
- Las partes conductoras se laminan para evitar pérdidas por efecto Joule

# Generadores

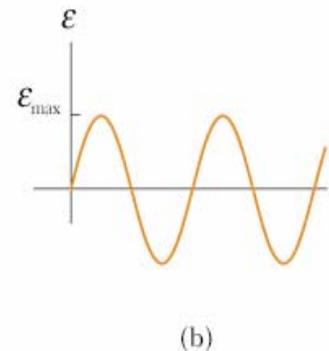
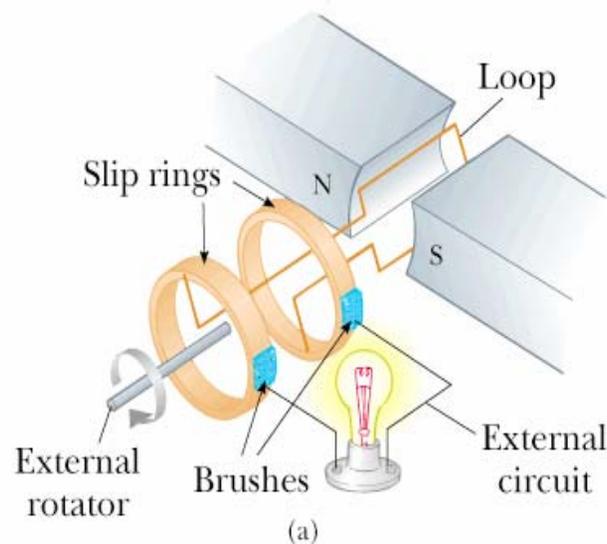
- Convierten energía mecánica en energía eléctrica
- Un agente externo gira un bobinado en un campo magnético
  - Planta hidroeléctrica
  - Central térmica de carbón
- El cambio de flujo produce una fem y una corriente en exterior



# Generadores

## ■ Generador de corriente alterna

- Los terminales de la espira son anillos que giran con la espira
- El contacto se establece mediante “escobillas”
- La fem y corrientes generadas son alternas



# Generadores

- Ley de Faraday

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt}$$

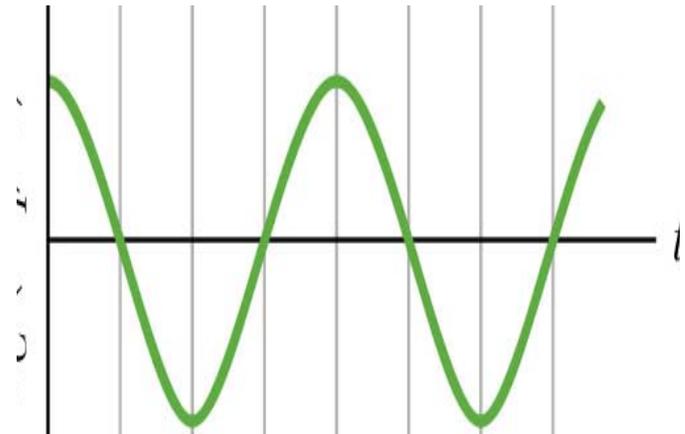
- Sustituyendo,

$$\Phi_B = BA \cos \omega t$$

$$\mathcal{E} = -BA \frac{d}{dt} \cos \omega t$$

$$\mathcal{E} = NBA \sin \omega t$$

- La fem máxima tiene lugar a  $\omega t=90$  o  $270$  grados
- La fem es cero si  $\omega t=0$  o  $180$  grados



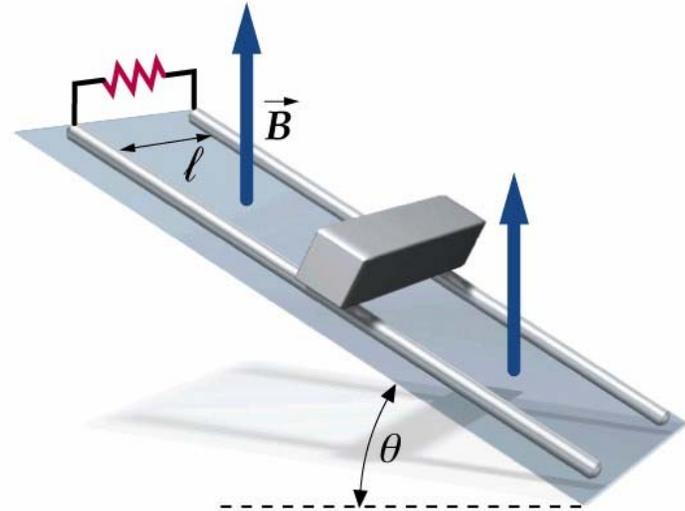
# Motores

- Convierten energía eléctrica en energía mecánica
  - Es el principio del generador invertido
  - Se suministra corriente alterna a una bobina y el par de fuerzas hace girar la bobina
  - Conforme gira la bobina, cambia el campo magnético inducido
  - La corriente inducida hace disminuir la corriente de la bobina (ley de Lenz)

## Ejemplo:\*

En la figura, una barra conductora de masa  $m$  y resistencia despreciable desliza sin rozamiento a lo largo de dos raíles paralelos de resistencia despreciable, separados por una distancia  $l$  y conectados por una resistencia  $R$ . Los raíles están sujetos a un plano largo e inclinado que forma un ángulo  $\theta$  con la horizontal. Como se indica en la figura, el campo magnético está dirigido hacia arriba.

- (a) Demostrar que existe una fuerza retardatriz dirigida hacia arriba sobre el plano inclinado y hallar su expresión.
- (b) Demostrar que hay una velocidad terminal de la barra y determinar su valor



\*problema 30.39 del Tipler

(a) El flujo y la fem valen:

$$\Phi = \int \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = Blx \cos \theta \quad \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -Blv \cos \theta$$

luego la corriente es:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{Bl \cos \theta}{R} v$$

en sentido de las agujas del reloj, para evitar el aumento de flujo

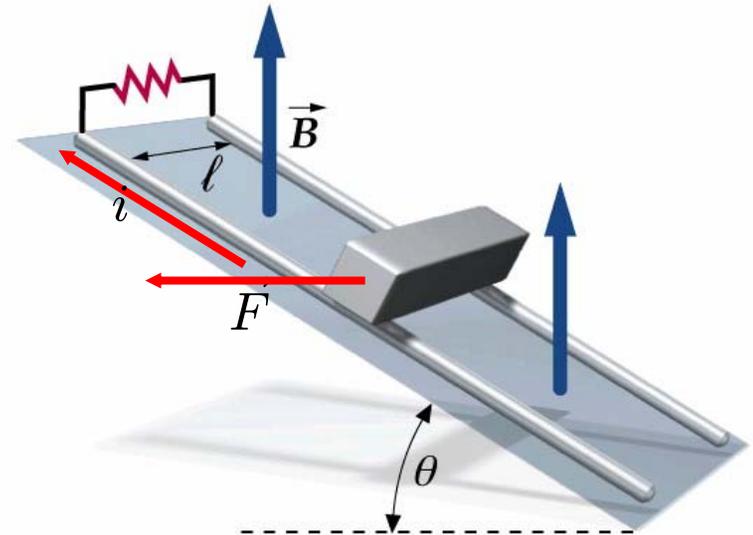
La fuerza magnética,

$$\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B} \quad F = ilB = \frac{l^2 B^2 \cos \theta}{R} v$$

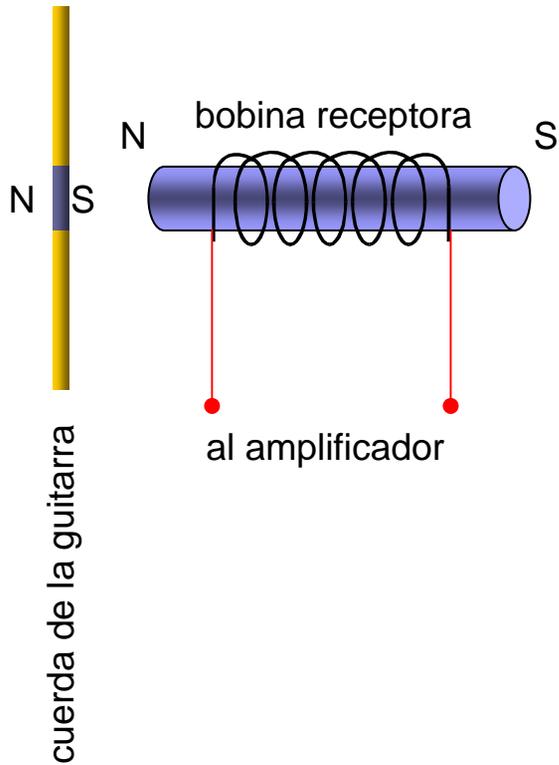
(b) La velocidad terminal se produce cuando

$$F \cos \theta = mg \cos(\pi - \theta) = mg \sin \theta$$

$$v_t = \frac{mgR \sin \theta}{l^2 B^2 \cos^2 \theta}$$



# La guitarra eléctrica



# Tren de alta velocidad TGV-AVE



Euromed, 300 km/h

# Tren de alta velocidad chino

- China está realizando importantes inversiones en trenes de suspensión magnética de alta velocidad. Conocido como Maglev Transrapid, el primer tren chino de alta velocidad hace su recorrido desde el aeropuerto de Pudong a Shangai a una velocidad punta de 430 Kms/h en un recorrido de 30 Kms y 8 minutos. Está operativo desde el 24 de marzo de 2004.





Maglev' 2004

18th International Conference on  
Magnetically Levitated Systems and Linear Drives

Registration, October 25, 2004  
Conference, October 26-28, 2004

**Organized By**

*Institute of Electrical Engineering, Chinese Academy of Sciences*

*National MAGLEV Transportation Engineering R&D Center*

**Supported By**

*National Natural Science Foundation of China*

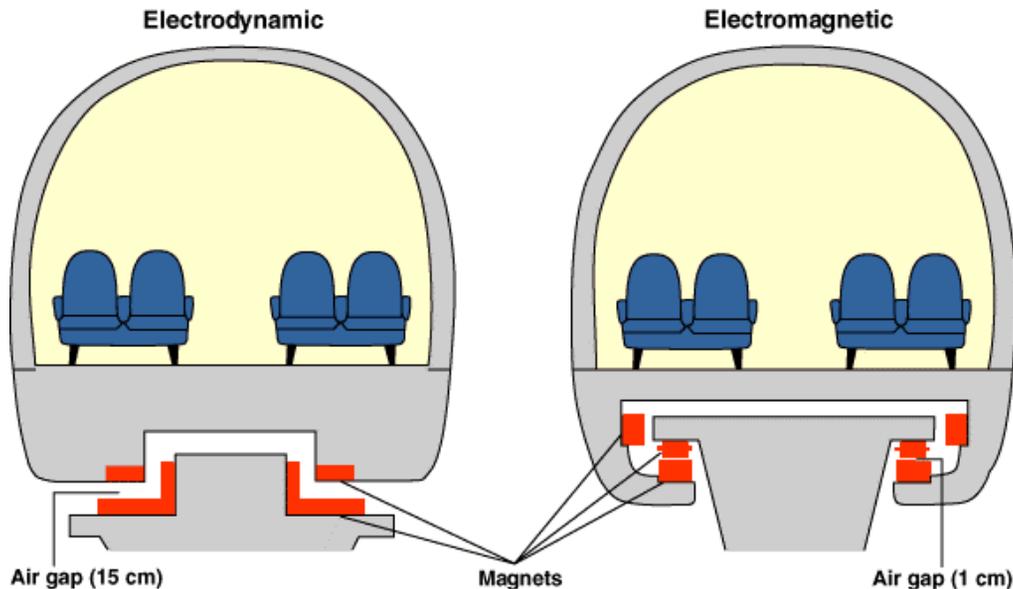
*Transrapid International*

*Shanghai Maglev Transportation Development Co., Ltd.*

*MAX BOGL Construction Company*



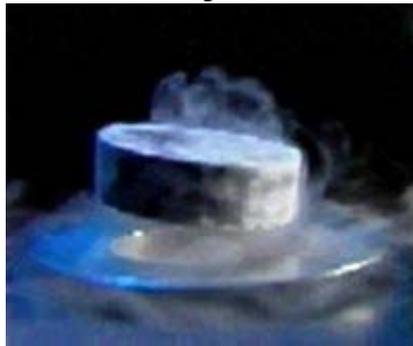
# Levitación y guiado



Air gap (15 cm)

Magnets

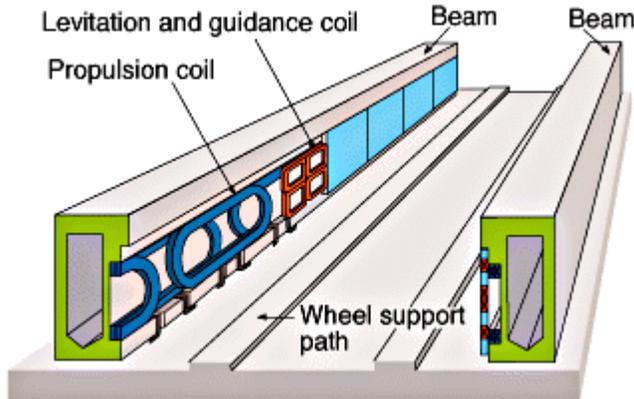
Air gap (1 cm)



## Sistema de guiado

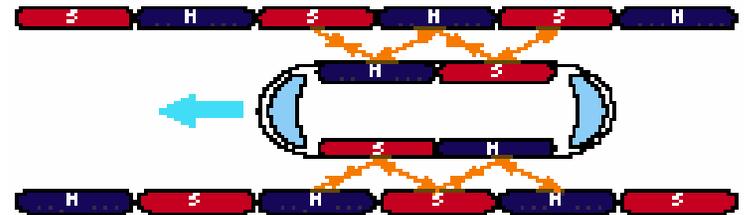
- Fuerzas laterales que hacen que el vehículo siga las curvas de la guía
- Los imanes en el lateral de los trenes son utilizados para el guiado

# Propulsión



## Sistema de propulsión

- Fuerzas atractivas y repulsivas son utilizadas para impulsar el tren
- Variando la frecuencia de la corriente se obtienen velocidades de propulsión diferentes



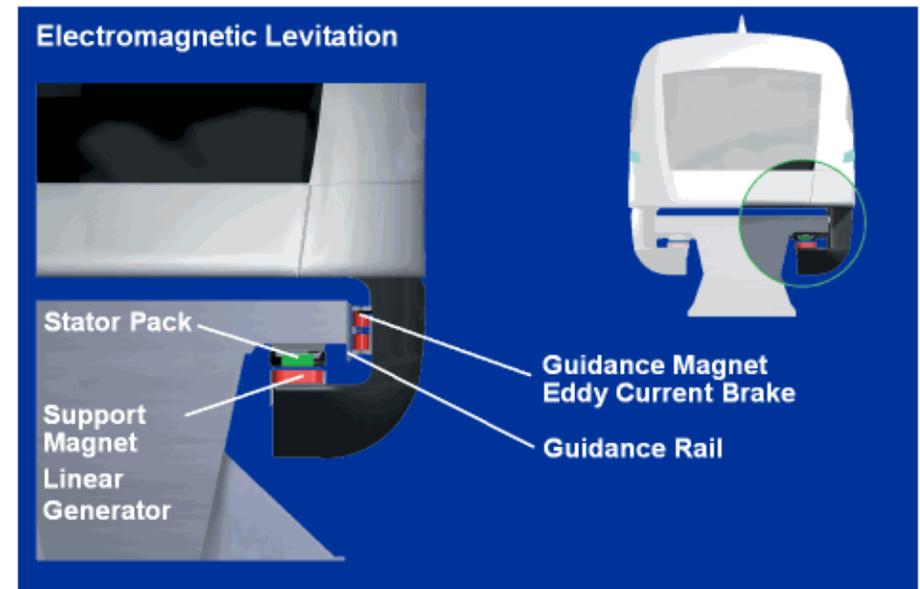
# Como trabaja el Transrapid

## Sistema de soporte

- Los electroimanes de la parte inferior levantan el tren acercándose a los estatores.
- Los imanes laterales mantienen el tren sobre la guía.
- Un ordenador modifica la corriente para mantener el electroimán a 1 cm de los estatores.

## System Components

  
Transrapid International



No hay fricción entre el tren y el rail



Transrapid alemán



Maglev japonés

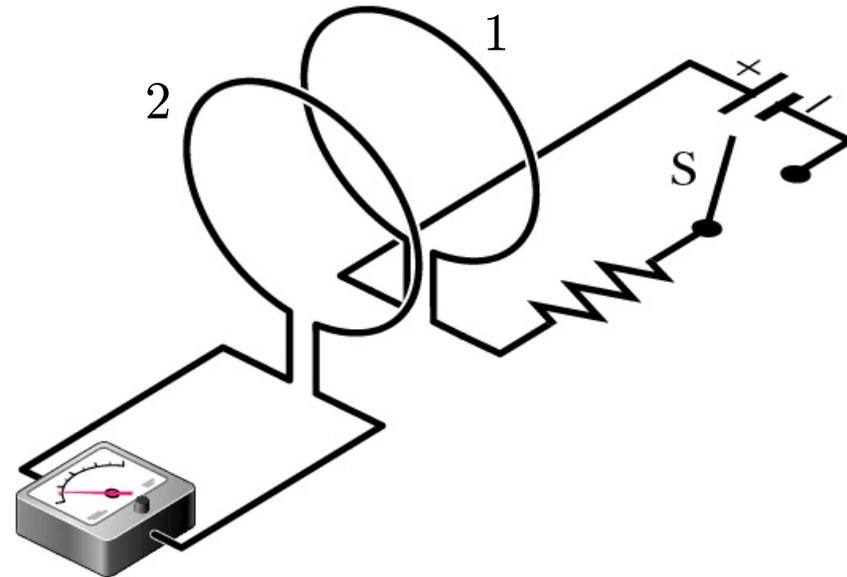


# Inductancia

Al cerrar el circuito se genera un campo en la espira 1:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}$$

Dicho campo es, obviamente, proporcional a la corriente  $I_1$



El flujo del campo  $B_1$  sobre la espira 2 es:

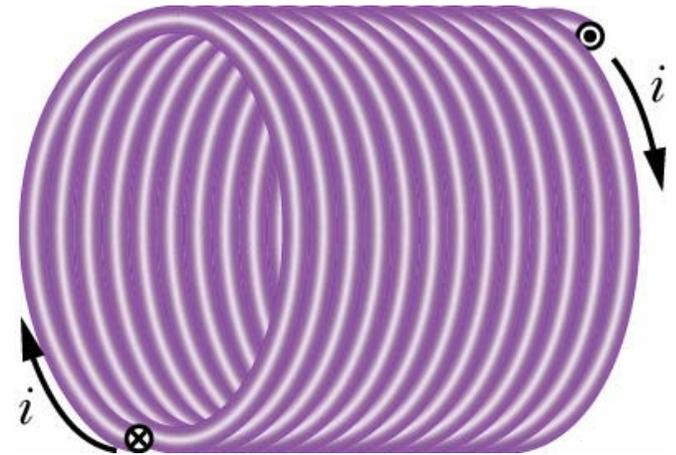
$$\Phi_2 = \int \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 \quad \mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

$M_{21}$  recibe el nombre de coeficiente de inducción mutua

# Inductancia

- Si sólo hay una bobina, el campo generado por la corriente también genera un flujo en la bobina (o espira). En ese caso el flujo es proporcional a la corriente  $I$
- La fem inducida por tanto puede ponerse en función de la corriente  $I$  que pasa por el bobinado
- $L$  recibe el nombre de autoinductancia o simplemente inductancia

$$\Phi = LI$$



$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}$$

# Inductancia

- Una inductancia es un dispositivo utilizado para producir y almacenar un  $B$  deseado
- Una corriente  $I$  en una inductancia con  $N$  vueltas produce un flujo  $\Phi_B$  de campo magnético en su región central
- La inductancia  $L$  se define como 
$$L = \frac{N\Phi_B}{I}$$
- En el SI la unidad de inductancia es el henrio (H)

$$H = \text{Tm}^2/\text{A}$$

# Fórmula de Neumann

El flujo del campo debido a la espira 1 sobre la 2 era

$$\Phi_2 = \int \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \int \int \vec{\nabla} \times \vec{A}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \oint \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2$$

De la definición de A:

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \oint \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

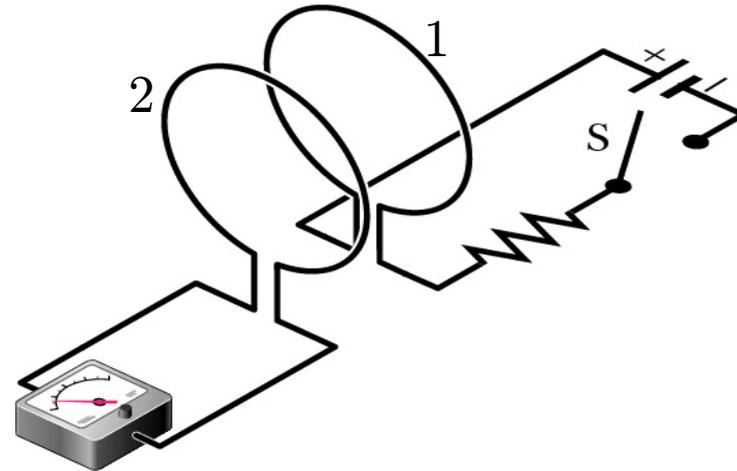
Y de la definición de  $M_{21}$

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

se deduce que:

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = M_{12}$$

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\vec{l} \cdot d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$



# Energía en un campo magnético

- Cuesta una cierta cantidad de energía (trabajo) establecer una corriente en un circuito
- El trabajo necesario, por unidad de tiempo, es  $\frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dq} \frac{dq}{dt} = -\mathcal{E}I = LI \frac{dI}{dt}$
- Si partimos de cero y llegamos a establecer una corriente  $I$ , el trabajo total requerido es  $W = \frac{1}{2}LI^2$