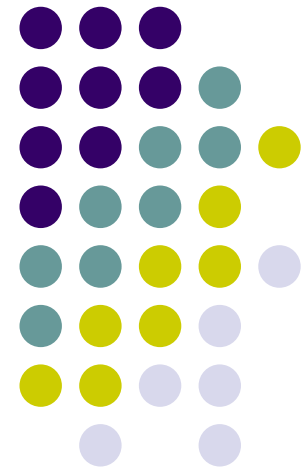


El campo eléctrico y la materia

Tema 9
Curso 2004-2005





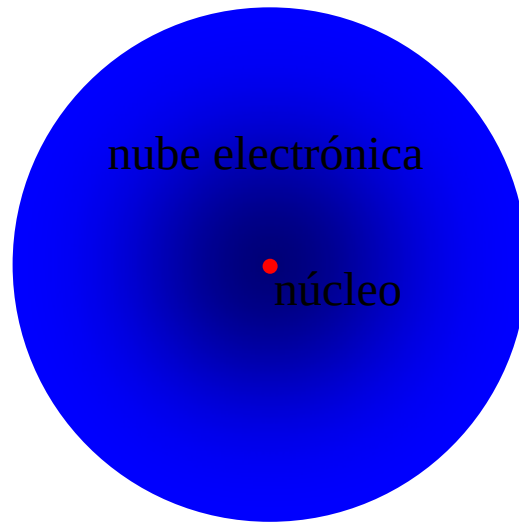
- Electrostática y dieléctricos
- El átomo como un dipolo eléctrico
- Los dieléctricos como distribución de dipolos. El vector polarización P . Susceptibilidad dieléctrica. Permitividad dieléctrica
- Campo creado por un medio dieléctrico polarizado
- El vector desplazamiento D
- Condiciones de frontera entre dieléctricos
- Algunos efectos eléctricos y mecánicos entre dieléctricos
- Medios conductores. Conductividad eléctrica.



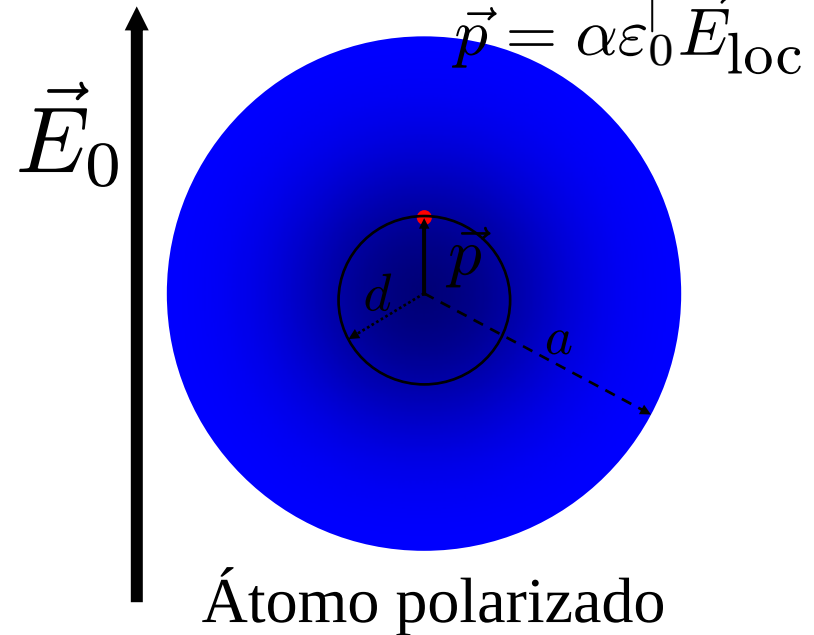
Electrostática y dieléctricos

- Faraday acuñó la palabra dieléctrico para describir el efecto de un aislante en un condensador
- Faraday observó que al situar un aislante entre las placas de un condensador, la capacidad del sistema, la energía almacenada y la carga aumentan un factor κ
- κ es una característica del medio
- En un dieléctrico las cargas no son libres como en un metal, están ligadas a los átomos o moléculas
- Cuando se aplica un campo eléctrico, el átomo o molécula se polariza (se desplaza la carga negativa respecto de la positiva y se forma un dipolo)

Dipolo atómico inducido



Átomo sin polarizar



Átomo polarizado

MODELO

$$F = ZeE_0 = \frac{Ze q_e}{4\pi\epsilon_0 d^2} = -\frac{Z^2 e^2 d}{4\pi\epsilon_0 a^3}$$

$$\rho_e = -\frac{Ze}{4\pi a^3} \quad q_e = \rho_e 4\pi d^3 = -\frac{Zed^3}{a^3}$$

$$d = \frac{4\pi\epsilon_0 a^3}{Ze} E_0$$

$$\alpha = 4\pi\epsilon_0 a^3$$



Polarizabilidades atómicas

$\alpha/4\pi\epsilon_0$ en unidades de 10^{-30} m^3			
H	0.667	He	0.205
Li	24.3	Ne	0.396
Na	23.6	Ar	1.64
K	43.4	Kr	2.48
Rb	47.3	Xe	4.04
Cs	59.6		



Teoría cuántica

Ecuación de Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}\psi + eE_0 z\psi = \mathcal{E}\psi$$

Momento dipolar:

$$\vec{p} = \langle \psi | -e\vec{r} | \psi \rangle = \frac{9}{2}(4\pi\epsilon_0 a_B^3)E_0\vec{u}_z$$

Polarizabilidad atómica:

$$\frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} = \frac{9}{2}a_B^3 = 0.667 \times 10^{-30}\text{m}^3$$



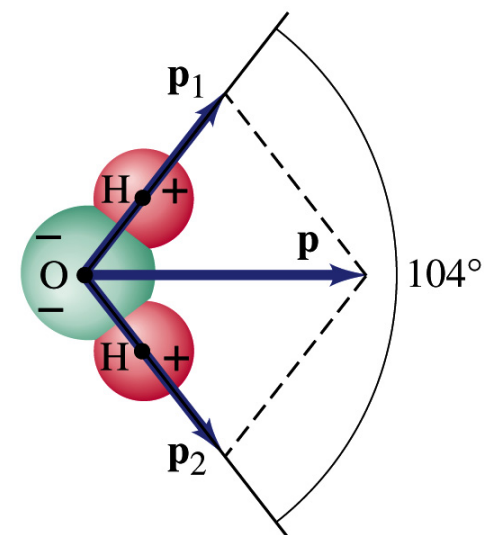
Moléculas polares

- Hay moléculas con momento dipolar permanente
- La unidad que caracteriza el momento dipolar es el debye: $1 \text{ D} = 3.34 \cdot 10^{-30} \text{ C m}$.
- Moléculas grandes, mayor momento dipolar
- Materiales compuestos por moléculas polares: campos internos cuya magnitud depende de T

Momentos dipolares moleculares



Molécula	m. dip. (D)
HF	1.75
HCl	1.04
HBr	0.80
HI	0.83
H ₂ O	1.83
NH ₃	1.48
ea _B	2.5



Dipolo en un campo eléctrico

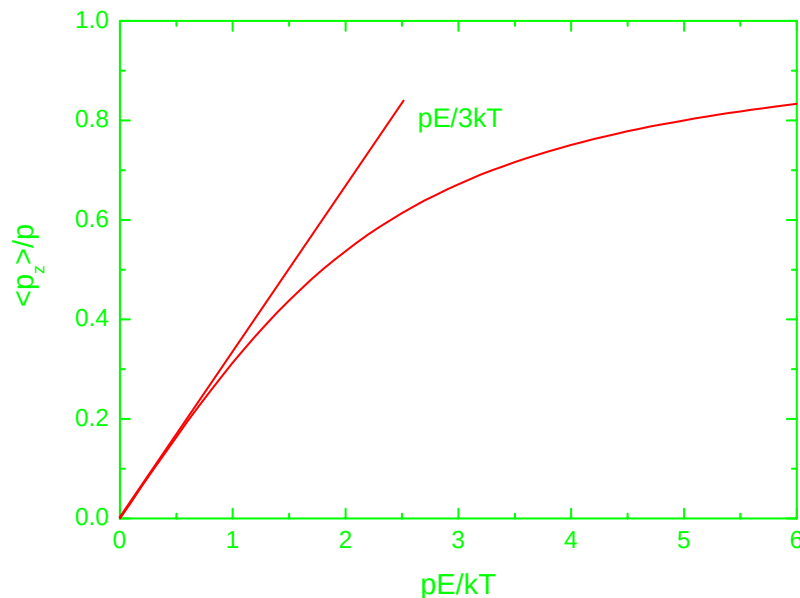
$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE_0 \cos \theta$$

Momento dipolar promedio $\langle \vec{p} \rangle = \frac{\int e^{-U/kT} \vec{p} d\Omega}{\int e^{-U/kT} d\Omega}$

Si tomamos el eje z como la dirección de $\vec{E} = E_0 \vec{u}_z$

$$\langle p_z \rangle = \frac{p \int_{-1}^{+1} e^{-(pE_0/kT) \cos \theta} \cos \theta d \cos \theta}{\int_{-1}^{+1} e^{-(pE_0/kT) \cos \theta} d \cos \theta} = p \left[\coth \left(\frac{pE_0}{kT} \right) - \frac{kT}{pE_0} \right]$$



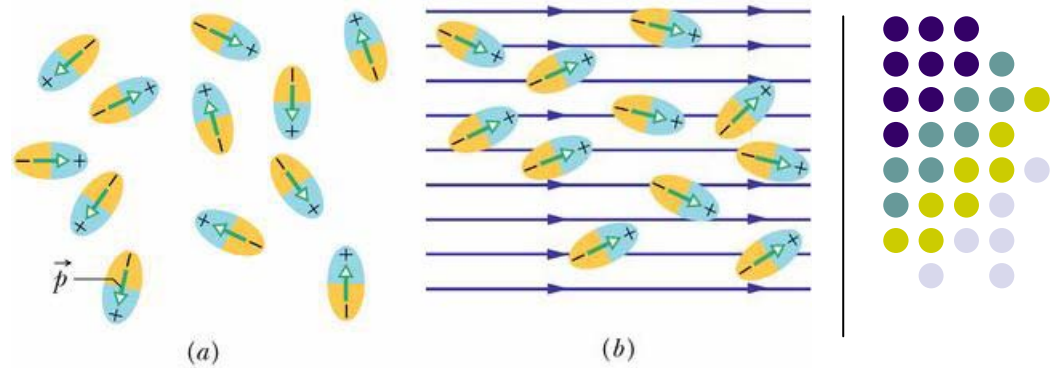
Esta es la fórmula de Langevin.

Si se hace la aproximación

$$\coth z \approx \frac{1}{z} + \frac{z}{3}$$

llegamos a la fórmula de Langevin-Debye

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{p^2}{3kT}$$



Polarización y carga de polarización



- Para incluir el efecto de la polarizabilidad atómica es necesario introducir un nuevo campo, el campo de polarización $\vec{P}(\vec{r})$
- La polarización es una vectorial de la posición en el dieléctrico
- $\vec{P}(\vec{r})$ se define como la densidad media de momentos dipolares

$$\vec{P}(\vec{r})d^3\vec{r} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

Potencial de un dipolo

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3} \qquad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i) \cdot \vec{p}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$



La contribución al potencial de un conjunto de dipolos

$$dV(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i) \cdot \vec{p}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{P}(\vec{r}') d^3\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Potencial de un medio polarizado

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{P}(\vec{r}') d^3\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \qquad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\oint \frac{\vec{P} \cdot \vec{n} dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \int \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}') d^3\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]$$

Potencial en términos de las cargas de polarización

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\oint \frac{\sigma_b dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int \frac{\rho_b d^3\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]$$

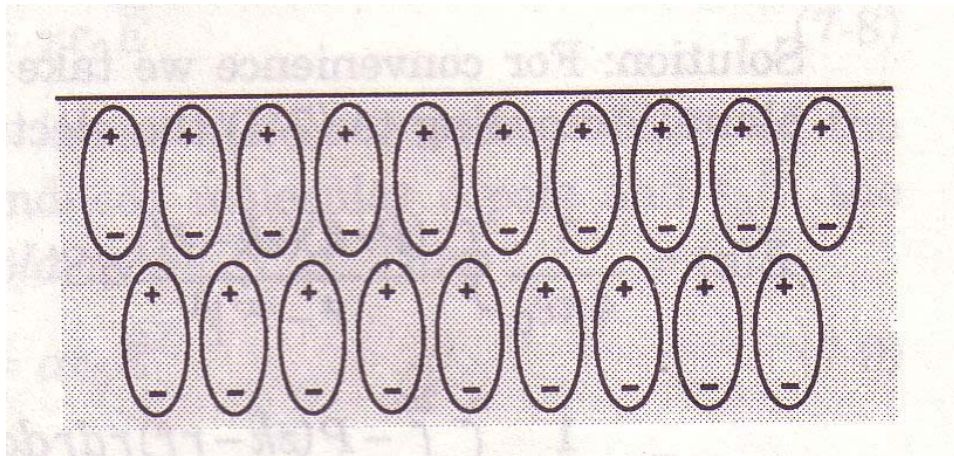
Densidades de carga de polarización

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \vec{n} \qquad \rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

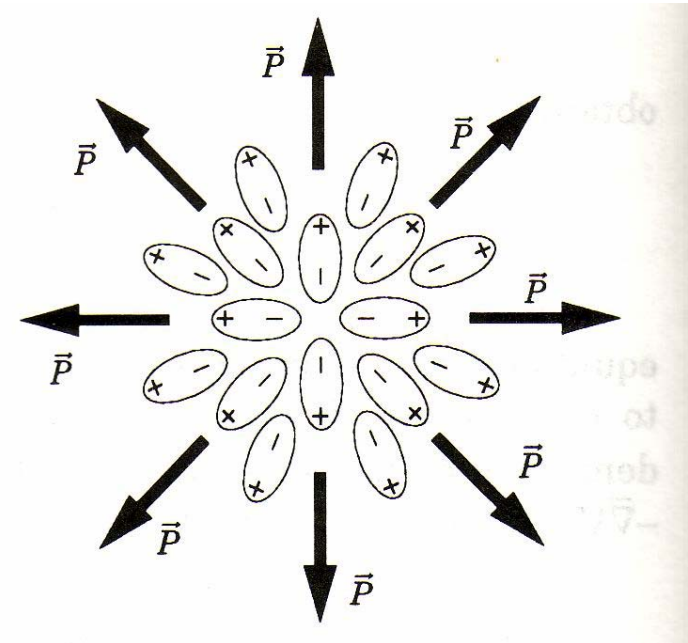
Densidades de carga de polarización



$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \vec{n}$$



$$\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$





El vector desplazamiento

- Las ecuaciones fundamentales de la electrostática son $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ y $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$
- Estas ecuaciones son correctas en el vacío y en un medio dieléctrico
- Al analizar un medio dieléctrico es conveniente separar $\rho(\vec{r}) = \rho_f(\vec{r}) + \rho_b(\vec{r})$
- Pero $\rho(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_f(\vec{r}) - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$
- La combinación $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ es un nuevo vector denominado campo desplazamiento
- Se cumple la ley de Gauss con las cargas libres

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f \quad \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = (q_f)_{\text{enc}}$$



Dieléctricos lineales

- Un aislante con $\vec{P}$ proporcional a $\vec{E}$ es un medio lineal dieléctrico
- Se utilizan diversos parámetros que relacionan $\vec{E}$, $\vec{P}$ y $\vec{D}$:

Parámetro	símbolo	Ecuación constitutiva
Susceptibilidad	χ_e	$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$
Permitividad	ϵ	$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$
Constante dieléctrica	κ	$\kappa = \epsilon / \epsilon_0$



Dos relaciones adicionales de interés son:

$$\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi_e) \quad \kappa = 1 + \chi_e$$

χ_e es siempre positivo ya que los dipolos atómicos se alinean con E de forma que P apunta en la dirección de E . Así, $\varepsilon > \varepsilon_0$ y $\kappa > 1$ para cualquier material dieléctrico.

En el vacío, $\chi_e = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$ y $\kappa = 1$

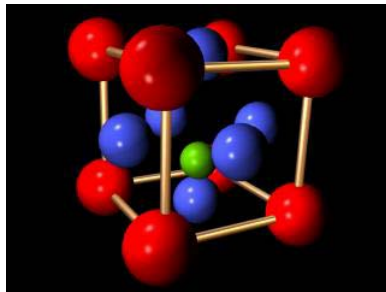
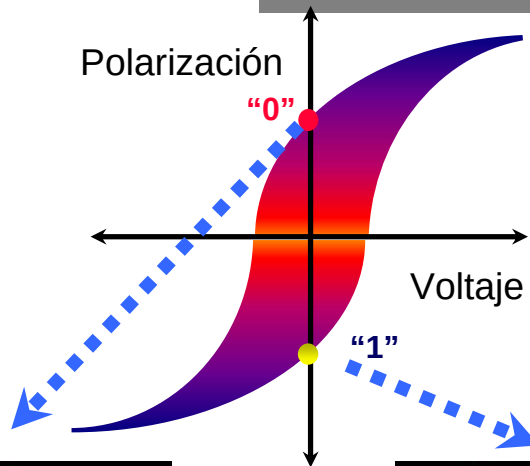
En la materia, los parámetros macroscópicos están determinados finalmente por las propiedades atómicas.

Otras propiedades dieléctricas

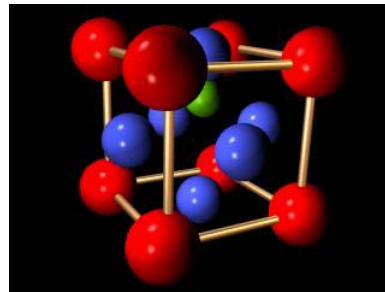


- Piroelectricidad: al aumentar la temperatura, aparece un campo eléctrico en la superficie del cristal (turmalina, el “iman Ceylon”, 1703)
- Ferroeléctricos: materiales en los que la polarización espontánea puede alterarse mediante un campo eléctrico aplicado
- Ferroelásticos: materiales en los que tensiones mecánicas alteran la polarización espontánea
- Piezoeléctrico: material en los que la aplicación de una tensión genera cargas eléctricas en su superficie (efecto piezoeléctrico directo, Pierre Currie, 1880)
- Electrostricción: acoplamiento secundario en el que la tensión es proporcional al cuadrado del campo eléctrico; frecuentemente implica un “efecto piezoeléctrico inverso” (energía eléctrica se convierte en mecánica; Lippman, a partir de principios termodinámicos, Currie experimentalmente en 1881)

¿Qué es la ferroelectricidad?

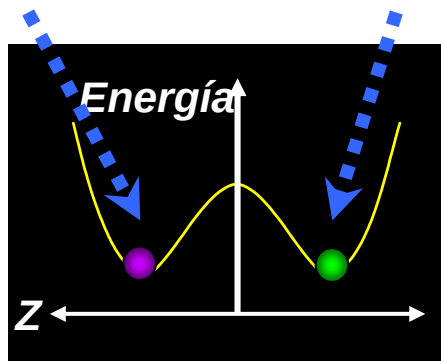


Campo
eléctrico



● A ● O
● B

Estructura ABO_3

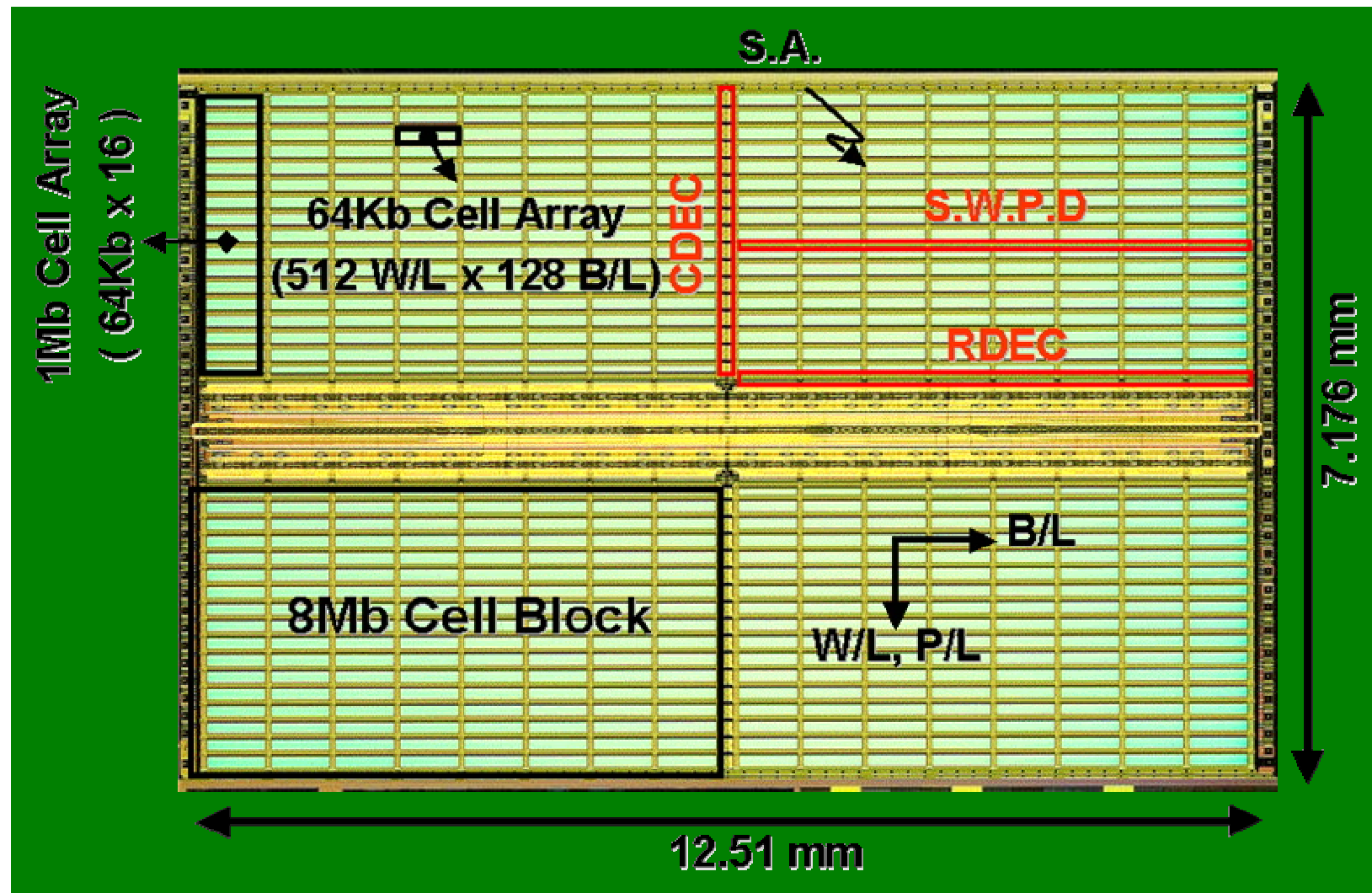
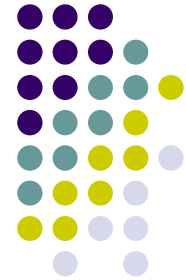


Los materiales ferroeléctricos muestran una polarización espontánea con el campo eléctrico aplicado debido al desplazamiento atómico del átomo “centrado en cuerpo” en la estructura de la perovskita (ABO_3).

El estado de polarización se mantiene al desaparecer el campo aplicado.

Los ferroeléctricos presentan dos estados estables, base de aplicaciones de memoria

Fotografía de una memoria FRAM de 64Mb





Moléculas polares

- En un gas diluido (moléculas sin interacción),

$$\vec{P} = n\alpha\vec{E}, \chi_e = n\alpha/\varepsilon_0 \text{ y } \kappa = 1 + n\alpha/\varepsilon_0$$

- de donde la susceptibilidad adquiere la expresión (fórmula de Langevin-Debye):

$$\chi_e = \frac{np^2}{3kT\varepsilon_0}$$



Moléculas no polares

- A partir de un modelo de oscilador clásico

$$\vec{p} = \vec{q}\delta\vec{r} = \frac{q^2 \vec{E}}{m\omega_0^2}$$

- La susceptibilidad es

$$\chi_e = \frac{nq^2}{\varepsilon_0 m\omega_0^2}$$

- Para el hidrógeno, en condiciones normales de presión y temperatura

$$\omega_0 = 1.8 \times 10^{16} \text{ s}^{-1} \quad (\lambda \simeq 100 \text{ nm}) \quad \text{y} \quad n = 2.69 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

$$\chi_e = 2.64 \times 10^{-4}$$



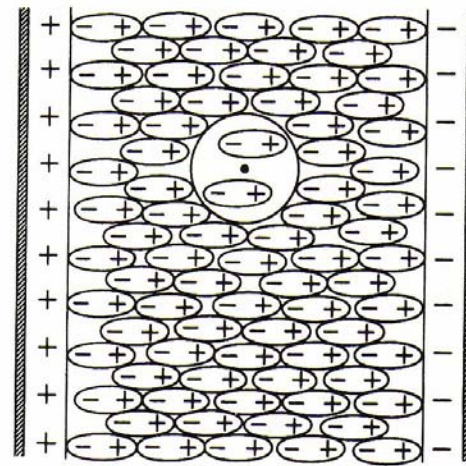
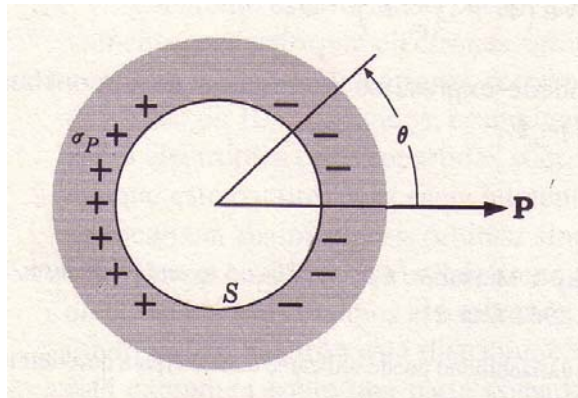
Materia condensada

- El campo responsable de la polarización de una molécula en un medio denso no es el campo macroscópico aplicado $\vec{E}_0$
- A este campo se le denomina campo local o campo molecular $\vec{E}_{loc}$
- La forma de calcular $\vec{E}_{loc}$ es dividir el dieléctrico en dos regiones: una esfera de radio r alrededor del punto donde queremos calcular el campo y el resto del dieléctrico (que puede tratarse como un continuo). Finalmente se aplica el principio de superposición.

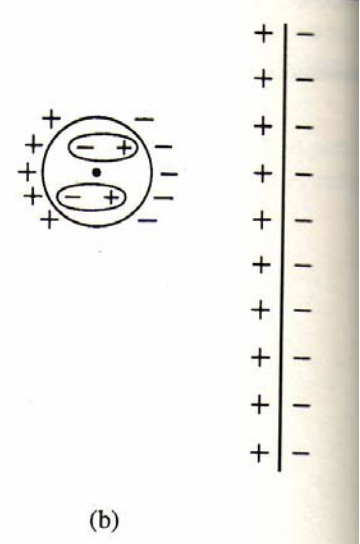
El campo local puede descomponerse en las siguientes contribuciones (figura): $\vec{E}_{\text{loc}} = \vec{E}_c + \vec{E}_d + \vec{E}_s + \vec{E}_i$



$$E_c = V/d \quad \vec{E}_d = -\vec{P}/\epsilon_0$$



(a)



(b)

$$\vec{E}_s(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma_b \vec{r} d^3\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi a^3 \vec{P}}{a^3} \int_{-1}^{+1} \cos^2 \theta d \cos \theta = \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}$$

Campo macroscópico

$$\vec{E} = \vec{E}_c + \vec{E}_d$$

Campo local de Lorentz

$$\vec{E}_{\text{loc}} = \vec{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}$$



El campo de polarización en un medio polarizado vale

$$\vec{P} = n\vec{p} = n\alpha \left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \right)$$

De la relación entre P y E podemos deducir el valor de la susceptibilidad macroscópica

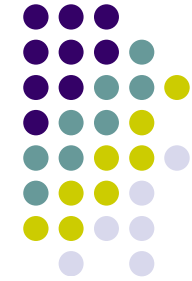
$$\chi_e = \frac{n\alpha/\epsilon_0}{1 - n\alpha/3\epsilon_0}$$

Por tanto, la polarizabilidad atómica vale, en función de la susceptibilidad:

$$\alpha = \frac{\epsilon_0}{n} \frac{\chi_e}{1 + \chi_e/3} = \frac{3\epsilon_0}{n} \frac{\kappa - 1}{\kappa + 2}$$

Ecuación de Clausius-Mossotti

El condensador con un dieléctrico

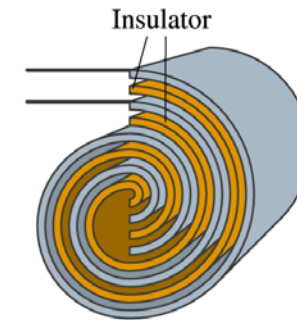


condensadores

$$D = \sigma_f = \frac{Q}{A}$$

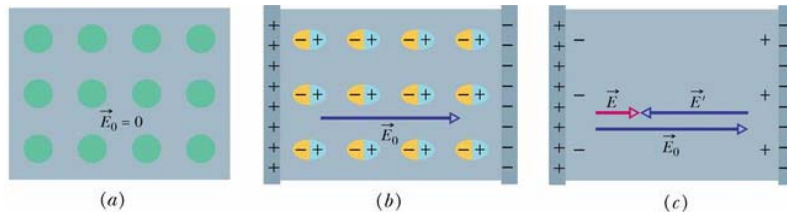
$$V = \frac{Qd}{\epsilon A}$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d}$$

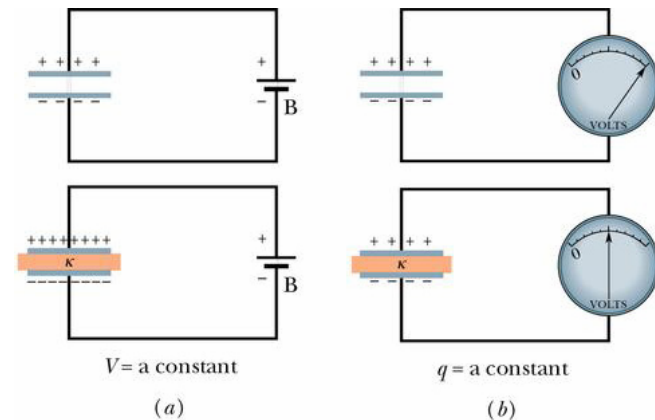


(b)

el condensador “plano”



El campo en el dieléctrico



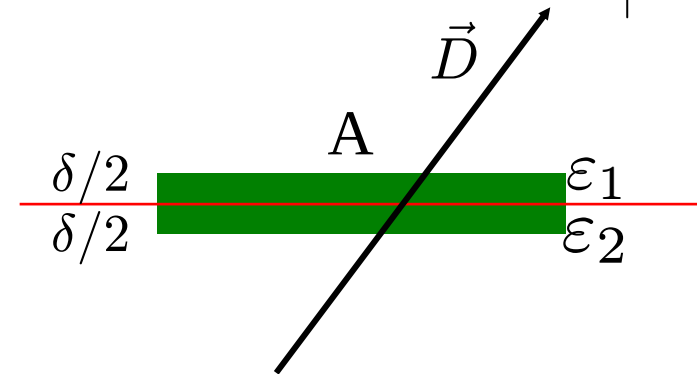
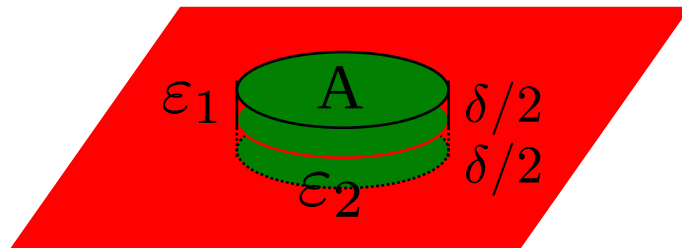
Tensión o carga constante

Propiedades dieléctricas de algunos aislantes



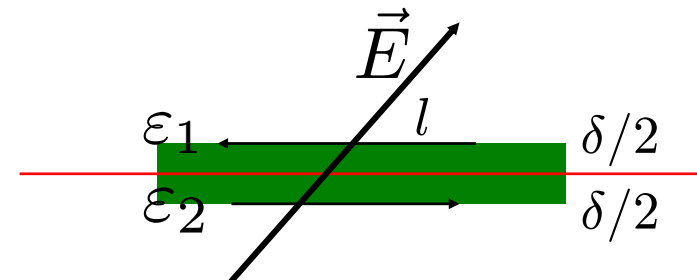
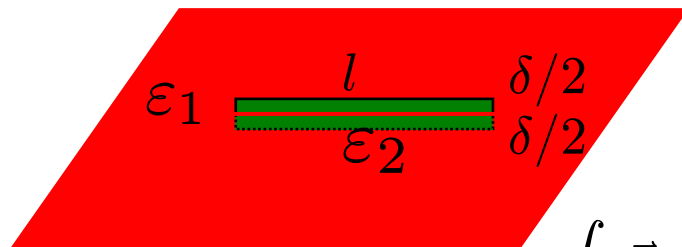
Material	Constante dieléctrica	Tensión dieléctrica
	κ	$E_{\max} \text{ } 10^6 \text{ V/m}$
Aire	1.00059	3
Poliestireno	2.5	20
Lucita	2.8	20
Plexiglás	3.4	40
Teflón	2.1	60
Mylar	3.1	
Papel	3.7	16
Cuarzo fundido	3.8 a 4.1	
Pyrex	4 a 6	14
Agua	80	
Titanato de estroncio	332	8

Condiciones de contorno



$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = q \quad (D_n^1 - D_n^2)A + \int_{S_\delta} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sigma_f A + \int_{\delta S_\delta} \rho d^3\vec{r}$$

$$D_n^1 - D_n^2 = \sigma_f$$



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = (E_t^1 - E_t^2)l + \int_{\Gamma_\delta} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

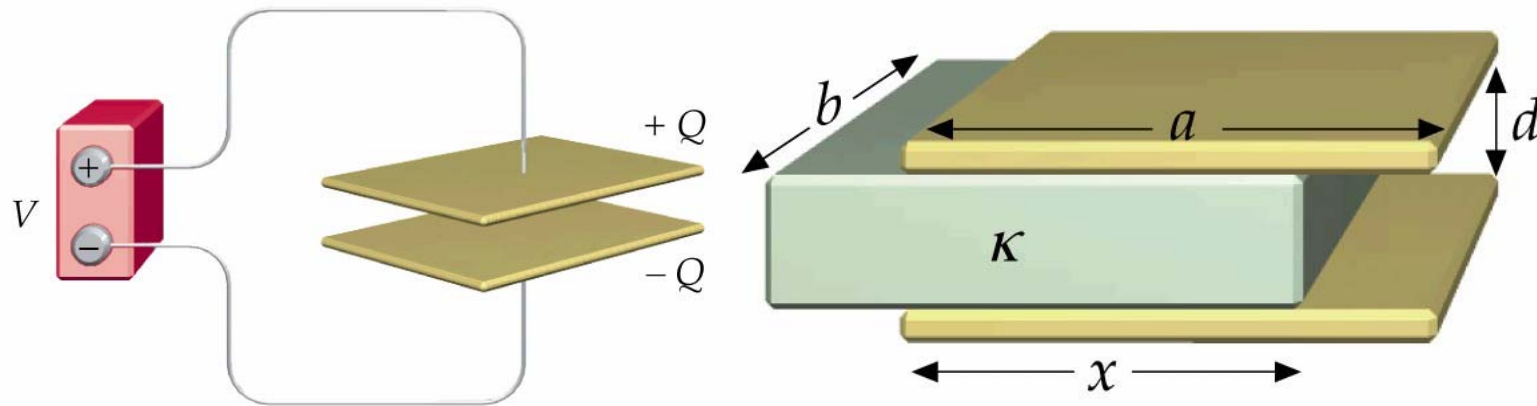
$$E_t^1 = E_t^2$$



Un condensador plano de área ab y separación d se conecta a una batería y se carga con una ddp V . Posteriormente, lo desconectamos de la batería e introducimos un dieléctrico de constante dieléctrica κ (ver figura).

Determinar:

- La energía almacenada en el condensador antes y después de insertar el dieléctrico
- ¿Cuál es la energía almacenada si solamente hay una proporción de dieléctrico (x sobre a) entre las placas?
- ¿Qué ocurre si mantenemos conectada la batería?



a) Al conectar el condensador a la batería, éste se carga con una carga $Q=CV$, siendo C la capacidad del condensador y V la ddp. Dado que la capacidad del condensador plano es $C_0 = \varepsilon_0 ab/d$,

$$Q = C_0 V_0 = \varepsilon_0 ab V_0 / d = \varepsilon_0 ab E_0$$

Obviamente el campo eléctrico es igual a la densidad superficial de carga dividida por ε_0 . La energía electrostática es

$$U_0 = \frac{1}{2} C_0 V_0^2 = \frac{1}{2} Q V_0 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 ab d E_0^2$$

y puede definirse una densidad de energía almacenada en términos del campo eléctrico:

$$u_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2$$

que puede generalizarse a cualquier volumen en el que exista un campo eléctrico. Si el condensador contiene un dieléctrico, como sabemos, su capacidad aumenta. En nuestro caso, $C = \kappa \varepsilon_0 ab/d$ y puesto que el condensador está aislado de la batería, i.e. la carga se conserva, la tensión ahora es:

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{V_0}{\kappa}$$

y la energía potencial es κ veces más pequeña: $U = U_0/\kappa$



b) Si solo hay una parte del dieléctrico dentro del condensador, el campo eléctrico sería distinto en la región del dieléctrico y fuera del dieléctrico. Pero esto no es posible, ya que una superficie metálica es equipotencial. El vector desplazamiento (densidad de cargas reales) será por tanto distinto:



$$D_1 = \frac{Q_1}{xb} \qquad D_2 = \frac{Q_2}{(a-x)b}$$

Entre 0 y x , $D_1 = \kappa\epsilon_0 E = \epsilon_0 E + P$, mientras que entre x y a $D_2 = \epsilon_0 E$.

La carga total sobre el dieléctrico es Q , luego

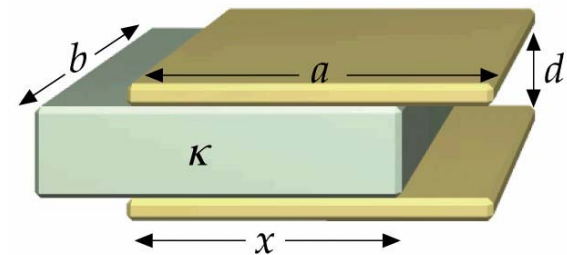
$$Q = Q_1 + Q_2 = D_1 xb + D_2 (a-x)b = [x\kappa + (a-x)] b\epsilon_0 E = [a + (\kappa - 1)x] \epsilon_0 bV/d$$

La capacidad del dieléctrico será por tanto

$$C = \epsilon_0 \frac{[a + (\kappa - 1)x]b}{d}$$

La energía almacenada,

$$U = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{\epsilon_0 [a + (\kappa - 1)x]b}$$





Si tomamos como densidad de energía eléctrica, en presencia de un dieléctrico,

$$u_E = \frac{1}{2} \kappa \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$$

la energía potencial será

$$U = \frac{1}{2} \int u_E d^3 \vec{r} = \frac{1}{2} E b d \left[\int_0^x D_1 dx + \int_x^a D_2 dx \right]$$

Integrando, obtenemos la misma expresión que antes:

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 b d [x \kappa + (a - x)] = \frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{\varepsilon_0 [a + (\kappa - 1)x] b}$$

Hemos visto que al introducir el dieléctrico, la energía almacenada disminuye en un factor κ . Esto implica que el condensador hace un trabajo en polarizar el dieléctrico. ¿Cómo podemos calcular ese trabajo? La forma trivial es a través de la diferencia de energía potencial. Una forma más académica sería calcular la fuerza sobre el dieléctrico e integrar entre $x=0$ y $x=a$. Hemos de poner U en términos de Q , que es constante, ¡el potencial V depende de x !

La fuerza vale:

$$F = -\frac{dU}{dx} = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 b} \frac{\kappa - 1}{[a + (\kappa - 1)x]^2} > 0$$

El trabajo que cuesta introducir el dieléctrico en el condensador es:

$$W = \int_0^a F(x) dx = - \int_0^a dU = U(0) - U(a) = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 b} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{\kappa a} \right] = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_0} \frac{\kappa - 1}{\kappa}$$

La fuerza es positiva (no nos cuesta trabajo introducir el dieléctrico) y por tanto el trabajo es positivo.

c) Si la batería permanece conectada, dado que la capacidad varía y V permanece constante, Q irá variando. Luego conviene expresar U en función de V :

$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{[a + (\kappa - 1)x]b}{d} V^2$$

En este caso la fuerza es:

$$F = -\frac{dU}{dx} = -\frac{\varepsilon_0 (\kappa - 1) b V^2}{2d} < 0$$

y el trabajo también es negativo. El trabajo es suministrado por la batería:

$$W = \int_0^a F(x) dx = - \int_0^a dU = U(0) - U(a) = \frac{\varepsilon_0 V^2 b}{2d} [a - \kappa a] = -\frac{1}{2} C_0 V^2 (\kappa - 1)$$

