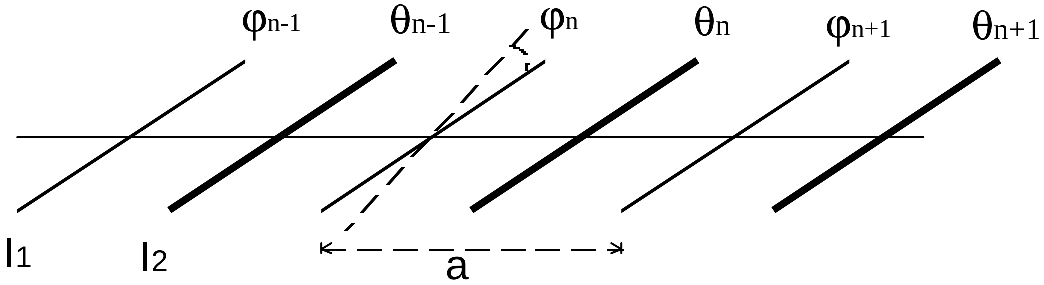
PRACTICA Nº 3
VIBRACIONES DE UNA CADENA LINEAL: MODOS ACÚSTICOS Y ÓPTICOS

1. INTRODUCCIÓN

Las vibraciones de los átomos en una red cristalina pueden, en determinadas condiciones, asimilarse a las vibraciones de una serie de osciladores armónicos acoplados. Ello es debido a que, en sus posiciones de equilibrio, la energía de la red es mínima, por lo que las variaciones de energía frente a pequeños desplazamientos serán siempre cuadráticas respecto al desplazamiento y, por tanto, fuerzas recuperadoras dependen linealmente del desplazamiento. Así, para estudiar las vibraciones de una red cristalina, sustituimos los átomos por masas puntuales unidas por resortes caracterizados por una constante elástica. Es la que se llama la aproximación del **cristal armónico**. Una cadena lineal de osciladores acoplados, con parámetro de red a, sería el modelo más sencillo Si se alternan dos tipos de átomos, de masas diferentes M y m, se podrán observar modos acústicos y ópticos.

En esta práctica, el sistema de osciladores acoplados será una serie de varillas transversales ligadas a un eje elástico de acero. Se alternan varillas de bronce y aluminio, de la misma longitud y diámetro. En las vibraciones que vamos a estudiar las varillas giran respecto al eje y la fuerza recuperadora está generada por la torsión del hilo. La coordenada será el ángulo de giro de cada varilla.



Si llamamos τ a la constante de torsión del eje de acero, las ecuaciones del movimiento serían formalmente idénticas a las de una cadena de átomos unidos por resortes, salvo que los momentos de inercia aparecen en lugar de las masas y los ángulos de giro en lugar de los desplazamientos:

$$I_1 \frac{d^2\varphi_n}{dt^2} = -\tau\left(2\varphi_n - \theta_n - \theta_{n-1}\right) \qquad I_2 \frac{d^2\theta_n}{dt^2} = -\tau\left(2\theta_n - \varphi_n - \varphi_{n+1}\right) \qquad [3.1]$$

Dado que buscamos soluciones que se propaguen como ondas armónicas escribimos:

$$\varphi_n = \varphi_0 e^{inak} e^{-i\omega t} \qquad \theta_n = \theta_0 e^{i(n+\frac{1}{2})ak} e^{-i\omega t} \qquad [3.2]$$

donde k es el vector de ondas ($2\pi/\lambda$) y φ_0 , θ_0 las amplitudes de vibración de ambos tipos de varilla (*na* es, obviamente, la coordenada de la varilla n, medida a lo largo de la cadena). Sustituyendo en la ecuación 1, obtenemos:

$$-I_1\omega^2\varphi_0 e^{inak} e^{-i\omega t} = -2\tau\varphi_0 e^{inak} e^{-i\omega t} + \tau\theta_0\left(1 + e^{-ika}\right) e^{i(n+\frac{1}{2})ak} e^{-i\omega t}$$

$$-I_2\omega^2\theta_0 e^{i(n+\frac{1}{2})ak} e^{-i\omega t} = -2\tau\theta_0 e^{i(n+\frac{1}{2})ak} e^{-i\omega t} + \tau\gamma_0\left(1 + e^{-ika}\right) e^{i(n+\frac{1}{2})ak} e^{-i\omega t}$$

[3.3]

Eliminando las exponenciales que aparecen en ambos términos y reagrupando:

$$(2t - I_1 w^2) j_0 - t\left(1 + e^{-ika}\right) e^{\frac{ika}{2}} q_0 = 0 \qquad [3.4]$$
$$t\left(1 + e^{ika}\right) e^{-\frac{ika}{2}} j_0 - (2t - I_2 w^2) q_0 - = 0$$

Dicho sistema homogéneo solo tiene solución si se anula el determinante:

$$(2t - I_1 w^2)(2t - I_2 w^2) = t^2\left(1 + e^{-ika}\right)\left(1 + e^{ika}\right) \qquad [3.5]$$

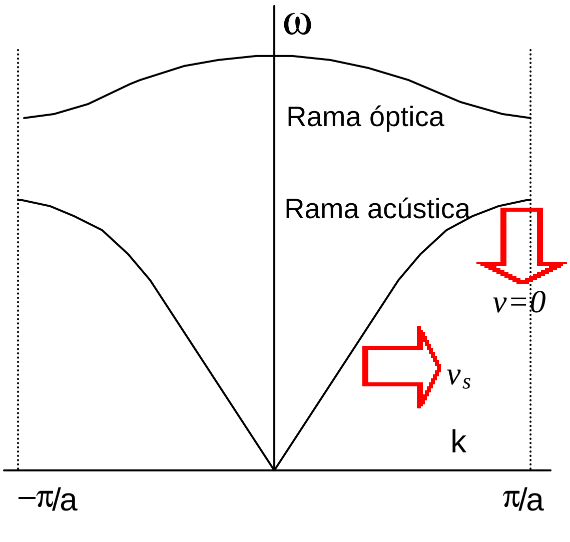
Al reagrupar términos obtenemos una ecuación de segundo grado en ω^2:

$$I_1 I_2 w^4 - 2t(I_1 + I_2) w^2 + 2t^2 (1 - \cos ka) = 0 \qquad [3.6]$$

cuya solución indica cómo las frecuencias de vibración dependen del vector de ondas a través de las siguientes **relaciones de dispersión**:

$$w^2 = t\frac{I_1 + I_1}{I_1 I_2} \pm \sqrt{\left(t\frac{I_1 + I_1}{I_1 I_2}\right)^2 - 2\frac{t^2}{I_1 I_2}(1 - \cos ka)} = \frac{t}{I_r} \pm \sqrt{\left(\frac{t}{I_r}\right)^2 - 2\frac{t^2}{I_1 I_2}(1 - \cos ka)} \qquad [3.7]$$

donde hemos definido un momento de inercia reducido de las dos varillas $I_r = I_1 I_2/(I_1 + I_2)$. Los posibles modos de vibración de la cadena lineal de átomos se clasifican, pues, en dos grandes grupos, correspondientes a los signos + y - en la solución encontrada. La figura muestra la relación de dispersión para ambas soluciones.



Para ver en que consiste la diferencia entre ellos, estudiemos lo que ocurre para k $\rightarrow$ 0, es decir, para longitudes de onda mucho más grandes que las distancias interatómicas:

$$w^2 = \frac{t}{I_r}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{I_r^2}{I_1 I_2} k^2 a^2}\right)$$

$$w_+^2 = \frac{t}{I_r}\left(2 - \frac{I_r^2}{2 I_1 I_2} k^2 a^2\right) \approx \frac{2t}{I_r} \qquad [3.8]$$

$$w_-^2 = \frac{t}{2(I_1 + I_2)} k^2 a^2$$

Vemos que la rama correspondiente a la solución ω_- corresponde a un tipo de ondas cuya frecuencia aumenta linealmente con el vector de ondas, para longitudes de onda largas, es decir, esta solución corresponde a las ondas sonoras, de ahí que se le llame rama acústica . La velocidad de propagación de dichas ondas sería

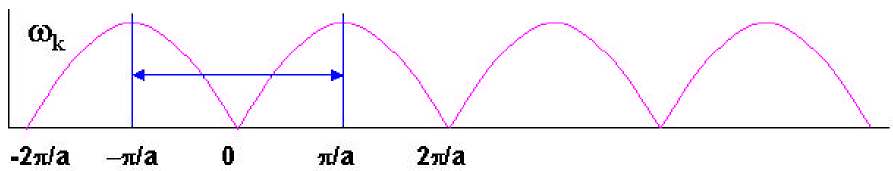
$$v_s = \sqrt{\frac{ta^2}{2(I_1 + I_2)}} \qquad [3.9]$$

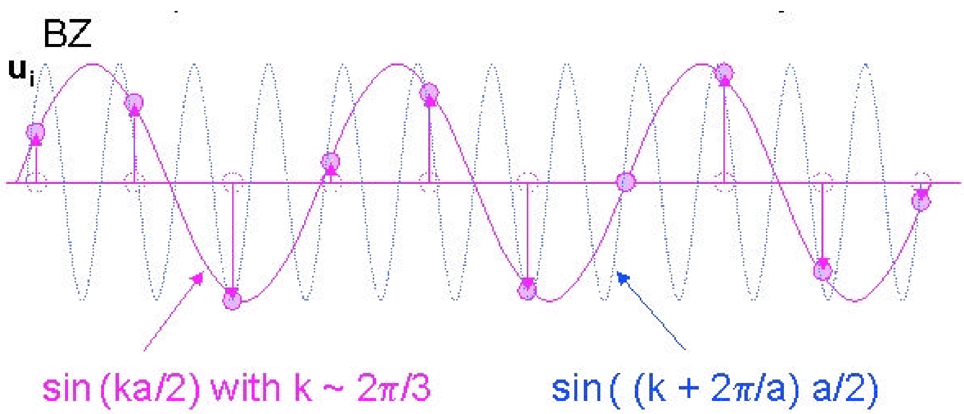
Hay que señalar que existe una frecuencia máxima, por encima de la cual no existen modos de vibración acústicos. Esa frecuencia corresponde a $k= \pi / a$ es decir, una longitud de onda 2a. Obviamente, la longitud de onda más corta que puede propagarse en la red corresponde al modo de vibración en que las varillas de dos celdas contiguas vibran en oposición de fase.

La rama descrita por ω_+ corresponde a ondas cuya frecuencia tiende a un valor constante para longitudes de onda largas, valor que depende del momento de inercia reducido y de la constante de torsión del eje Sería la frecuencia de vibración de dos varillas de momentos I_1 e I_2 unidas por un eje de constante 2τ . Es la rama equivalente a lo que en un sólido se llama rama óptica, debido a que estos modos de vibración interactúan fuertemente con la radiación infrarroja lejana. Es fácil ver que para k tendiendo a cero, todas las varillas de cada tipo vibran en fase y en cada celda, las dos varillas vibrarían en contrafase, con amplitudes relativas dadas por $\varphi_0 I_1 + \theta_0 I_2 = 0$. Entre el borde de la rama acústica y el de la rama óptica existe un intervalo de frecuencia en el que no hay modos permitidos.

Los valores posibles del vector de ondas se determinan imponiendo una condición de contorno. Usualmente, en física de los sólidos, se imponen las condiciones de contorno cíclicas, es decir, si tenemos en total N átomos, imponemos $u_n=u_{n+N}$ lo que equivalen a suponer que la cadena se cierra sobre sí misma. En ese caso, la ecuación 1 conduce inmediatamente a $k= 2 \pi m /L = (2 \pi /a) (m/N)$, donde L=Na es la longitud de la cadena. En nuestro modelo los extremos están fijos, por lo que la condición sería: exp (ikNa)=0 , es decir, $k= (\pi /a)(2m+1)/N$, o, en función de la longitud de onda : $(2m+1)(\pi /2)=L$. La diferencia está en que, en las condiciones cíclicas habría ondas que se propagan mientras que, en las condiciones de contorno con extremos fijos, las ondas son estacionarias.

Implícitamente, se han representado exclusicamente los valores de k correspondientes a la primera zona de Brillouin. Se puede comprobar que la expresión para $\omega(k)$ es periódica, con periodicidad $2\pi/a$ (es decir, las frecuencias $\omega(k)$ y $\omega(k+G)$ son las mismas, siendo G un vector de la red recíproca):





Oscilador forzado amortiguado:

El conjunto de osciladores puede considerarse como un sistema con distintos modos de vibración. Si se obliga al sistema a oscilar con una determinada frecuencia, la amplitud de su movimiento dependerá de la proximidad de dicha frecuencia a la de uno de los modos del sistema (respuesta máxima en la frecuencia de resonancia). Recordemos la ecuación del oscilador armónico amortiguado, con una frecuencia ω_0 y una constante de amortiguamiento γ, sometido a una fuerza armónica de amplitud F_0 y frecuencia ω:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x - m\gamma\frac{dx}{dt} + F_o e^{-i\omega t} \qquad [3.10]$$

Si buscamos soluciones armónicas $x(t)=x_0\exp(-i\omega t)$, es fácil ver que la amplitud vendrá dada por:

$$x_0 = \frac{F_0}{m}\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega} \qquad [3.11]$$

La expresión compleja determina el módulo y el desfase respecto a la fuerza. El módulo será:

$$|x_0| = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}} \qquad [3.12]$$

expresión que tiene un máximo para $\omega=\omega_0$, tanto más pronunciado cuanto menor es el amortiguamiento γ. En cuanto al desfase, se obtiene:

$$tg\phi = -\frac{\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \qquad [3.13]$$

y es fácil ver que, al pasar por la resonancia, habrá un cambio de fase de 180º.

2. MATERIAL DISPONIBLE

2.1 Un bastidor con 15 varillas de aluminio y 15 de bronce, alternadas, ligadas a un eje de acero, con una distancia media entre sus centros de 31 mm. La longitud de las varillas es 30 cm y su diámetro 8 mm. Densidad del Al: 2.7 gr/cm^3. Densidad del bronce: 8.5 gr/cm^3.

2.2 Un sistema de excitación de los modos de la red formado por:

- Un vibrador
- Un oscilador de baja frecuencia
- Sistema de detección de vibraciones:
- Imanes que se pueden fijar en el extremo de las barras.
- Bobina de detección
- Osciloscopio

Al acercar la bobina a un imán en vibración se generará en ella una fuerza electromotriz inducida que puede observarse en el osciloscopio, y compararla con la señal de excitación proveniente del generador.

3. MEDIDAS A REALIZAR

El objetivo de la práctica es ilustrar el modelo del cristal armónico, mediante una red de osciladores acoplados, buscando la relación de dispersión de los modos de vibración. Para ello, hemos de buscar esos modos excitándolos mediante oscilaciones forzadas. La frecuencia de excitación viene dada por el contador digital del oscilador.

3.1 Detección de modos:

Parar detectar los modos hay que variando la frecuencia a partir de 1 Hz, procurando que la amplitud de vibración del vibrador sea pequeña. Los modos de baja frecuencia deben observarse a simple vista, cuando se forme una onda estacionaria. Se anotará la frecuencia correspondiente y el número de vientres N_v observado en la onda estacionaria. La longitud de onda del modo será $\lambda=2L/N_v$, donde L es la longitud del eje. (como los modos de una cuerda sujeta en sus extremos)

Para frecuencias superiores a 10 Hz, puede ya utilizarse el osciloscopio para detectar los modos. Los imanes y la bobina permiten tanto fijar con precisión la frecuencia del modo (frecuencia a la que se obtiene un máximo de la fem inducida), como la longitud de onda, al observar si vibran o no en fase determinadas varillas.

Verifica la existencia de una frecuencia de corte, comprobando que, por encima de cierta frecuencia solo se excitan modos evanescentes (es decir, modos que solo excitan las varillas próximas a la que está siendo forzada a vibrar), tanto en la rama acústica como en la rama óptica.

En el caso de la rama óptica, debido a la proximidad de los modos y su gran amortiguamiento, es posible solo determinar las frecuencias correspondientes al centro y al extremo de la primera zona de Brillouin.

3.2 Curva de resonancia:

Para alguno de los modos que pueda observarse mediante la bobina, determina la amplitud de vibración en función de la frecuencia (curva de resonancia).