

MODELOS DE PROBABILIDAD III

DISTRIBUCIÓN DE POISSON

DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

DISTRIBUCIÓN UNIFORME DE VARIABLE DISCRETA

DISTRIBUCIÓN UNIFORME DE VARIABLE CONTINUA

DISTRIBUCIÓN DE POISSON

Esta distribución es una de las más importantes distribuciones de variable discreta. Sus principales aplicaciones hacen referencia a la modelización de situaciones en las que nos interesa determinar el número de hechos de cierto tipo que se pueden producir en un intervalo de tiempo o de espacio, bajo presupuestos de aleatoriedad y ciertas circunstancias restrictivas. Otro de sus usos frecuentes es la consideración límite de procesos dicotómicos reiterados un gran número de veces si la probabilidad de obtener un éxito es muy pequeña.

Proceso experimental del que se puede hacer derivar

Esta distribución se puede hacer derivar de un proceso experimental de observación en el que tengamos las siguientes características

- Se observa la realización de hechos de cierto tipo durante un cierto periodo de tiempo o a lo largo de un espacio de observación
- Los hechos a observar tienen naturaleza aleatoria ; pueden producirse o no de una manera no determinística.
- La probabilidad de que se produzcan un número x de éxitos en un intervalo de amplitud t no depende del origen del intervalo (Aunque, sí de su amplitud)
- La probabilidad de que ocurra un hecho en un intervalo infinitésimo es prácticamente proporcional a la amplitud del intervalo.
- La probabilidad de que se produzcan 2 o más hechos en un intervalo infinitésimo es un infinitésimo de orden superior a dos.

En consecuencia, en un intervalo infinitésimo podrán producirse 0 ó 1 hecho pero nunca más de uno

- Si en estas circunstancias aleatorizamos de forma que la variable aleatoria X signifique o designe el "número de hechos que se producen en un intervalo de tiempo o de espacio", la variable X se distribuye con una distribución de parámetro λ .
- Así :

$$x \Rightarrow p(\lambda)$$

El parámetro de la distribución es, en principio, el factor de proporcionalidad para la probabilidad de un hecho en un intervalo infinitésimo. Se le suele designar como parámetro de intensidad, aunque más tarde veremos que se corresponde con el número medio de hechos que cabe esperar que se produzcan en un intervalo unitario (media de la distribución); y que también coincide con la varianza de la distribución.

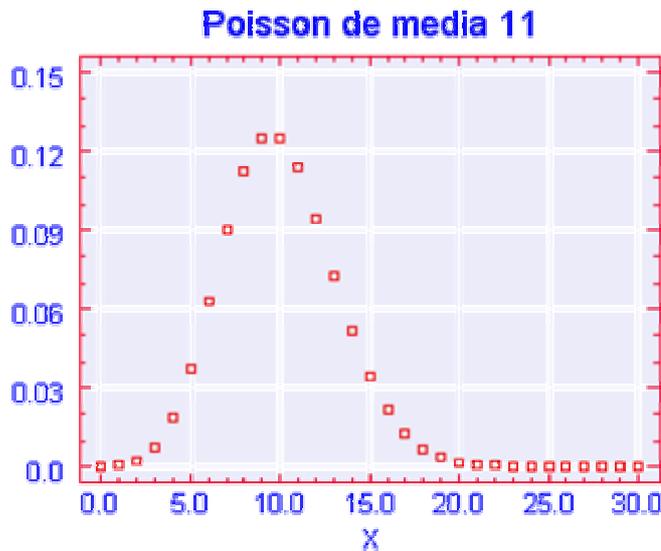
Por otro lado es evidente que se trata de un modelo discreto y que el campo de variación de la variable será el conjunto de los números naturales, incluido el cero:

$$x \in [0, 1, 2, 3, 4, \dots]$$

Función de cuantía

A partir de las hipótesis del proceso, se obtiene una ecuación diferencial de definición del mismo que puede integrarse con facilidad para obtener la función de cuantía de la variable "número de hechos que ocurren en un intervalo unitario de tiempo o espacio"

Que sería :
$$P(x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}$$



Cuya representación gráfica para un modelo de media 11 sería la adjunta. Obsérvense los valores próximos a la media y su forma parecida a la campana de Gauss, en definitiva, a la distribución normal

La **función de distribución** vendrá dada por :
$$F(X) = \sum_{x=0}^X \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}$$

Función Generatriz de Momentos

Su expresión será :
$$\begin{aligned} \varphi(t) &= E[e^{tx}] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{tx} \cdot \lambda^x}{x!} = \\ &= e^{-\lambda} \left[1 + \frac{\lambda e^t}{1!} + \frac{(\lambda e^t)^2}{2!} + \frac{(\lambda e^t)^3}{3!} + \dots + \dots \right] = \end{aligned}$$

dado que $e^x = \left[1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \dots \right]$ tendremos que $\varphi(t) = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda e^t}$

luego :
$$\varphi(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

Para la obtención de la **media y la varianza** aplicaremos la F.G.M.; derivándola sucesivamente e igualando t a cero. Así.

$$\mu = E[x] = \alpha_1 \text{ donde } \alpha_1 = \varphi'(t)_{t \rightarrow 0}$$

$$\varphi'(t)_{t \rightarrow 0} = \lambda e^t \cdot e^{\lambda(e^t-1)}_{t \rightarrow 0} = \lambda \cdot 1 \cdot e^0 = \lambda$$

Una vez obtenida la media, obtendríamos la **varianza** en base a:

$$\sigma^2 = \alpha_2 - \mu^2$$

$$\alpha_2 = \varphi''(t) \text{ así}$$

$$\varphi''(t) = \lambda e^t \cdot e^{\lambda(e^t-1)} + (\lambda e^t)^2 \cdot e^{\lambda(e^t-1)}$$

haciendo t = 0

$$\varphi''(t=0) = \lambda + \lambda^2$$

$$\text{por lo que } \sigma^2 = \alpha_2 - \mu^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda$$

así se observa que media y varianza coinciden con el parámetro del modelo siendo λ

En cuanto a la **moda** del modelo tendremos que será el valor de la variable que tenga mayor probabilidad, por tanto si M_o es el valor modal se cumplirá que:

$$P(M_o) \geq P(x_i)$$

$$\text{Y, en particular: } \left. \begin{array}{l} P(M_o) \geq P(M_o + 1) \\ P(M_o) \geq P(M_o - 1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

A partir de estas dos desigualdades, es muy sencillo probar que la moda tiene que verificar: $\lambda - 1 \leq M_o \leq \lambda$. De manera que la moda será la parte entera del parámetro λ o dicho de otra forma, la parte entera de la media.

Podemos observar cómo el intervalo al que debe pertenecer la moda tiene una amplitud de una unidad, de manera que la única posibilidad de que una distribución tenga dos modas será que los extremos de este intervalo sean números naturales, o lo que es lo mismo que el parámetro λ sea entero, en cuyo caso las dos modas serán $\lambda - 1$ y λ .

Teorema de adición.

La distribución de Poisson verifica el teorema de adición para el parámetro λ .
 "La variable suma de dos o más variables independientes que tengan una distribución de Poisson de distintos parámetros λ (de distintas medias) se distribuirá, también con una distribución de Poisson con parámetro λ (con media, la suma de las medias):

En efecto:

Sean x e y dos variables aleatorias que se distribuyen con dos distribuciones de Poisson de distintos parámetros siendo además x e y independientes

$$\text{Así } x \Rightarrow \wp(\lambda_1) \text{ e } y \Rightarrow \wp(\lambda_2)$$

Debemos probar que la variable $Z = x + y$ seguirá una Poisson con parámetro igual a la suma de los de ambas: $Z \Rightarrow \wp(\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_z)$

En base a las F.G.M para X $\varphi_x(t) = e^{\lambda_1(e^t-1)}$

Para Y $\varphi_y(t) = e^{\lambda_2(e^t-1)}$

De manera que la función generatriz de momentos de Z será el producto de ambas ya que son independientes : $\varphi_z(t) = \varphi_x(t) \cdot \varphi_y(t) = e^{\lambda_1(e^t-1)} \cdot e^{\lambda_2(e^t-1)} = e^{\lambda_1 + \lambda_2(e^t-1)}$

Siendo $\varphi_z(t) = e^{\lambda_1 + \lambda_2(e^t-1)}$ la F.G.M de una Poisson $Z \Rightarrow \rho(\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_z)$

Convergencia de la distribución binomial a la Poisson

Se puede probar que la distribución binomial tiende a converger a la distribución de Poisson cuando el parámetro n tiende a infinito y el parámetro p tiende a ser cero, de manera que el producto de n por p sea una cantidad constante. De ocurrir esto la distribución binomial tiende a un modelo de Poisson de parámetro λ igual a n por p

Este resultado es importante a la hora del cálculo de probabilidades, o, incluso a la hora de inferir características de la distribución binomial cuando el número de pruebas sea muy grande ($n \rightarrow \infty$) y la probabilidad de éxito sea muy pequeña ($p \rightarrow 0$).

El resultado se prueba, comprobando como la función de cuantía de una distribución binomial con ($n \rightarrow \infty$) y ($p \rightarrow 0$) tiende a una función de cuantía de una distribución de Poisson con $\lambda = np$ siempre que este producto sea una cantidad constante (un valor finito)

En efecto : la función de cuantía de la binomial es $P(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$

Y llamamos $\lambda = np$ tendremos que:

$$P(x) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-x+1)}{x!} \cdot \frac{\lambda^x}{n^x} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} =$$

$$P(x) = \frac{n}{n} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \cdot \frac{\lambda^x}{x!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x} = G$$

realizando $\lim_{x \rightarrow \infty, n \rightarrow 0} G = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$ que es la función de cuantía de una distribución de Poisson

Estimación Bayesiana sobre muestras de poisson.

Análogamente a como planteábamos el problema de necesitar estimar la proporción de una característica, en el caso de un modelo binomial, en alguna situación práctica, podemos estar interesados en determinar el parámetro desconocido de una distribución de Poisson. Por ejemplo podríamos estar interesados en determinar el número medio de clientes que acuden a una ventanilla de una oficina pública.

El planteamiento de la estimación podría hacerse utilizando información suministrada por una experiencia (la observación de cuántos hechos se producen en un intervalo experimental), conjuntamente con algún otro tipo de información a priori. En este caso, estaríamos, como ya comentábamos en el caso binomial ante un planteamiento bayesiano del problema.

La solución requerirá que dispongamos de una información inicial que puede especificarse a través de una distribución a priori de probabilidad. De manera que la función de cuantía de esta distribución a priori (o su f. de densidad si fuera continua) nos asigne probabilidades a cada posible valor del parámetro λ .

Utilizando únicamente la información inicial la estimación sería la media de la distribución a priori.

Pero realizando una experiencia podremos mejorar la información acerca de λ . Si observamos la realización de hechos durante un intervalo experimental y se producen x hechos, para cada posible valor de λ podremos calcular su verosimilitud definida como la probabilidad de que se dé ese resultado si el valor de λ es el considerado:

$$P(x / \lambda = \lambda_i)$$

Obviamente esta probabilidad condicionada será la función de cuantía de una distribución de Poisson con $\lambda = \lambda_i$ para el valor de la variable x .

Finalmente podemos calcular las probabilidades de cada valor alternativo de λ , condicionada al resultado de la experiencia aplicando el teorema de Bayes:

$$P(\lambda_i / x) = \frac{P(\lambda_i) \cdot P(x / \lambda_i)}{\sum_{\forall j} P(\lambda_j) \cdot P(x / \lambda_j)}$$

Estas probabilidades finales (a posteriori) constituirán la función de cuantía de la distribución a posteriori que nos dará cuenta de toda la información disponible (tanto muestral como no muestral).

La estimación mejorada del parámetro será, entonces, la media de la distribución a posteriori.

Planteamos un ejemplo:

Tres ejecutivos del Insalud opinan que el número medio de pacientes que llegan a cierto servicio nocturno de guardia durante una hora es 2, según el primero, 3, según el segundo, y 5 según el tercero.

Sus opiniones pueden ponderarse teniendo en cuenta que el primero tiene el doble de experiencia profesional que los otros dos.

Para tomar una decisión de asignación de personal en ese servicio quieren estimar el número medio de pacientes, sin despreciar sus opiniones, por lo que realiza una experiencia controlando una hora de actividad en el servicio en la que acuden 3 pacientes. Esta información la van a combinar con la inicial a través de un proceso Bayesiano: ¿cómo lo harían?

La distribución a priori será tal que deberá asignarse el doble de probabilidad a la alternativa propuesta por el primer experto que a las de los otros dos. Así que será:

λ_i	$P(\lambda_i)$
2	0,5
3 0,25	
4 0,25	

De manera que la estimación inicial de sería, la media de la distribución a priori:

$$\hat{\lambda} = E[\lambda] = 3 \quad \text{tres pacientes por hora}$$

Realizada la experiencia, las verosimilitudes de las tres alternativas nos vendrán dadas por la función de cuantía de la distribución de Poisson, con $\lambda = \lambda_i$ para $x = 3$

λ_i	$L(\lambda) = P(x / \lambda_i) = \frac{e^{-\lambda_i} \cdot \lambda_i^3}{3!}$
2	0,180447
3 0,224042	
5 0,140374	

La función de cuantía de la distribución a posteriori la obtendremos aplicando el Teorema de Bayes y resultará ser:

λ_i	$\lambda_i = P(\lambda_i / x)$
2	0,497572
3 0,308891	
5 0,193536	

Esta distribución a posteriori nos dará cuenta de toda la información disponible acerca del parámetro desconocido, (número medio de pacientes por hora); tanto de la información subjetiva de los expertos (convenientemente ponderada) como de la información empírica suministrada por la observación.

A partir de esta distribución a posteriori podemos plantear nos dar un valor concreto para la estimación de considerando una función de pérdida cuadrática. La estimación adecuada sería la media de la distribución a posteriori:

$$\hat{\lambda} = E[\lambda / x] = 2,8895 \quad \text{pacientes la hora}$$

DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

A pesar de la sencillez analítica de sus funciones de definición, la distribución exponencial tiene una gran utilidad práctica y a que podemos considerarla como un modelo adecuado para la distribución de probabilidad del tiempo de espera en ciertos hechos que sigan un proceso de Poisson. De hecho la distribución exponencial puede derivarse de un proceso experimental de Poisson con las mismas características que las que enunciábamos al estudiar la distribución de Poisson, pero tomando como variable aleatoria, en este caso, el tiempo que tarda en producirse un hecho

Obviamente, entonces, la variable aleatoria será continua. Por otro lado existe una relación entre el parámetro α de la distribución exponencial, que más aparecerá, y el parámetro de intensidad del proceso λ , esta relación es $\alpha = \lambda$

Al ser un modelo adecuado para estas situaciones tiene una gran utilidad en los siguientes casos:

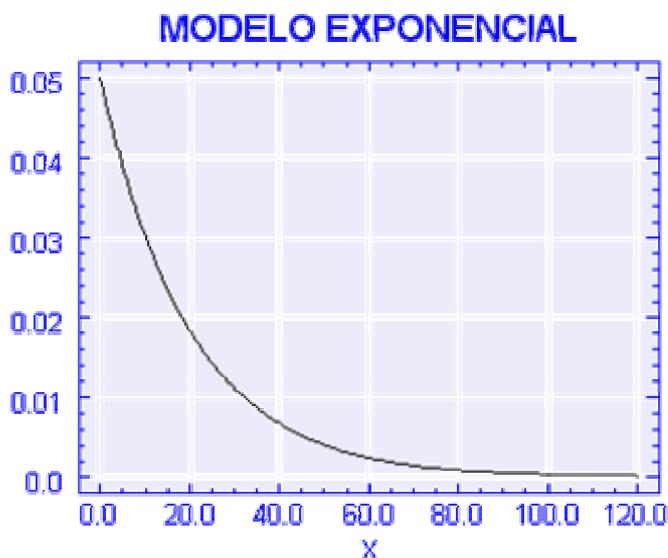
- Distribución del tiempo de espera entre sucesos de un proceso de Poisson
- Distribución del tiempo que transcurre hasta que se produce un fallo, si se cumple la condición que la probabilidad de producirse un fallo en un instante no depende del tiempo transcurrido. Aplicaciones en fiabilidad y teoría de la supervivencia.

Función de densidad.

A pesar de lo dicho sobre que la distribución exponencial puede derivarse de un proceso de Poisson, vamos a definirla a partir de la especificación de su función de densidad:

Dada una variable aleatoria X que tome valores reales no negativos $\{x \geq 0\}$ diremos que tiene una distribución exponencial de parámetro α con $\alpha \geq 0$, si y sólo si su función de densidad tiene la expresión: $f(x) = \alpha \cdot e^{-\alpha x}$

Diremos entonces que $x \Rightarrow Exp(\alpha)$



Gráficamente como ejemplo planteamos el modelo con parámetro $\alpha = 0,05$

En consecuencia , la **función de distribución** será:

$$F(X) = \int_0^X \alpha \cdot e^{-\alpha x} dx = \left[-e^{-\alpha x} \right]_0^X = 1 - e^{-\alpha X}$$

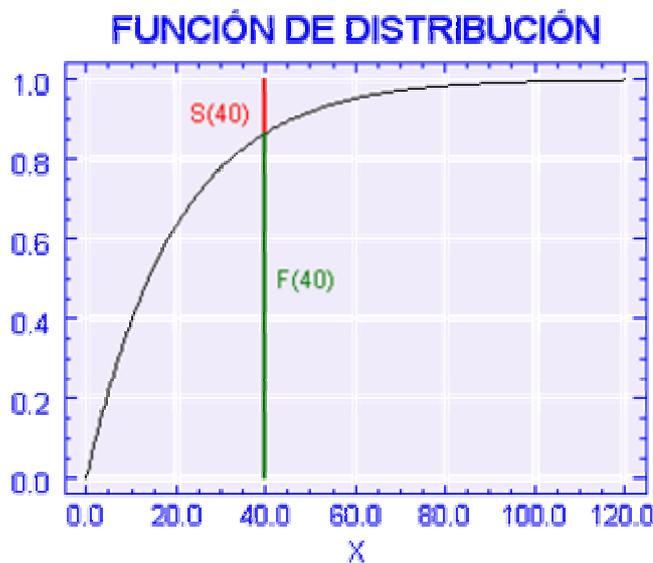
En la principal aplicación de esta distribución , que es la Teoría de la Fia bilidad, resulta m ás interesante que la función de distribución la llam ada Función de Supervivencia o Función de Fiabilidad.

La función de Superv ivencia se define cómo la probabilidad de que la variab le aleatoria tome valores superiores al valor dado X:

$$S(X) = P(x > X) = 1 - F(X) = 1 - (1 - e^{-\alpha X}) = e^{-\alpha X}$$

Si el significado de la variable aleatoria es "el tiempo que transcurre hasta que se produce el fallo": la función de distribución será la probabili dad de que el fallo ocurra antes o en el in stante X: y , en consecuen cia la función de s upervivencia será la probabilidad de que el fallo ocurra después de transcurrido el ti empo X ; por lo tanto, será la probabilidad de que el elem ento, la pieza o el ser considerado "Sobreviva" al tiempo X ; de ahí el nombre.

Gráficamente, la función de distribución para un modelo exponencial de parámetro $\alpha = 0,05$ sería :



En la que se observa lo que sería la diferencia entre función de distribución y la de supervivencia

La Función Generatriz de Momentos será :

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= E[e^{tx}] = \int_0^{\infty} e^{tx} \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha x} dx = \\ &= \alpha \int_0^{\infty} e^{-(\alpha-t)x} dx = \frac{\alpha}{\alpha-t} \underbrace{\int_0^{\infty} (\alpha-t) \cdot e^{-(\alpha-t)x} dx}_{\text{que es la } f(x) \text{ de una } \text{Exp}(\alpha-t)} = \\ &\quad \text{luego su valor será 1} \end{aligned}$$

tendremos así que la F.G.M será :

$$\varphi(t) = \frac{\alpha}{\alpha - t} = \frac{1}{1 - \frac{t}{\alpha}} = \left(1 - \frac{t}{\alpha}\right)^{-1}$$

Una vez calculada la F.G.M podemos , partiendo de ella , calcular la media y la varianza

Así la **media** será:

$$\mu = E[x] = \alpha_1 = \varphi'(t)_{t \rightarrow 0} = -1 \left(1 - \frac{t}{\alpha}\right)^{-2} \left(-\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}$$

En cuando a la **varianza** su expresión será :

$$\sigma_x^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2} \quad \text{ya que}$$

$$\alpha_2 = \varphi''(t)_{t \rightarrow 0} = -\frac{2}{\alpha} \left(1 - \frac{t}{\alpha}\right)^{-3} \left(-\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{2}{\alpha^2}$$

La **mediana** del modelo exponencial será aquel valor de la variable $x = Me$ que verifica que $F(Me) = 1/2$

De manera que $F(Me) = 1 - e^{-\alpha Me} = 1/2$ por lo que $e^{\alpha Me} = 2 \rightarrow Me = \frac{\ln 2}{\alpha}$

Tasa instantánea de fallo.

Dentro del marco de la teoría de la fiabilidad si un elemento tiene una distribución del tiempo para un fallo con una función de densidad $f(x)$, siendo x la variable tiempo para que se produzca un fallo , y con una función de supervivencia $S(X)$ La probabilidad de que un superviviente en el instante t falle en un instante posterior $t + \Delta t$ será una probabilidad condicionada que vendrá dada por:

$$P(t < x \leq t + \Delta t / x > t) = \frac{P(t < x \leq t + \Delta t)}{P(x > t)} = \frac{S(t) - S(t + \Delta t)}{S(t)}$$

Al cociente entre esta probabilidad condicionada y la amplitud del intervalo considerado, Δt , se le llama tasa media de fallo en el intervalo $[t, t + \Delta t]$:

$$z([t, t + \Delta t]) = \frac{S(t) - S(t + \Delta t)}{\Delta t \cdot S(t)}$$

Y a la tasa media de fallo en un intervalo infinitésimo es decir, al límite de la tasa media de fallo cuando $\Delta t \rightarrow 0$ se le llama Tasa Instantánea de Fallo (o, simplemente, tasa de fallo) en t:

$$z(t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{S(t) - S(t + \Delta t)}{\Delta t \cdot S(t)} = \frac{1}{S(t)} \frac{dS(x)}{dx} [x = t] =$$

$$= \frac{f(t)}{S(t)} = -\frac{d}{dt} \ln S(t)$$

La tasa de fallo es, en general, una función del tiempo, que define unívocamente la distribución.

Pues bien, puede probarse que el hecho de que la tasa de fallo sea constante es condición necesaria y suficiente para que la distribución sea exponencial y que el parámetro es, además, el valor constante de la tasa de fallo. en efecto:

si $z(t) = \alpha(cte) \rightarrow x \rightarrow Exp(\alpha)$

$z(t) = \alpha = -\frac{d}{dt}(\ln S(t))$ de donde $-\alpha dt = d(\ln S(t))$ integrando esta ecuación diferencial entre 0 y x :

$$-\alpha x = \ln S(x) - \ln S(0) \quad S(0) = 1 \rightarrow \ln S(0) = 0$$

$S(x) = e^{-\alpha x}$ de modo que la función de distribución será

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x} \text{ Función de Distribución de una Exponencial}$$

si $x \rightarrow Exp(\alpha) \rightarrow z(x) = \alpha$

Si X tiene una distribución exponencial $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ y $S(x) = e^{-\alpha x}$

de manera que $z(x) = \frac{f(x)}{S(x)} = \frac{\alpha e^{-\alpha x}}{e^{-\alpha x}} = \alpha(cte)$

Así pues si un elemento tiene una distribución de fallos exponencial su tasa de fallos se mantiene constante a lo largo de toda la vida del elemento. La probabilidad de fallar en un instante no depende del momento de la vida del elemento en el que nos encontremos; lo que constituye la propiedad fundamental de la distribución que ahora enunciamos:

Propiedad fundamental de la distribución exponencial

La distribución exponencial no tiene memoria :

Poseer información de que el elemento que consideramos ha sobrevivido un tiempo S (hasta el momento) no modifica la probabilidad de que sobreviva t unidades de tiempo más. La probabilidad de que el elemento falle en una hora (o en un día, o en segundo) no depende del tiempo que lleve funcionando. No existen envejecimiento ni mayor probabilidad de fallos al principio del funcionamiento

$$P(x > s + t / x > s) = \frac{P(x > s + t)}{P(x > s)} = \frac{S(s + t)}{S(s)} = \frac{e^{-\alpha(s+t)}}{e^{-\alpha s}} = e^{-\alpha t}$$

Expresión que no depende , como se observa , del tiempo sobrevivido s.

DISTRIBUCIÓN UNIFORME (DE V.DISCRETA)

Es una distribución muy sencilla que asigna probabilidades iguales a un conjunto finito de puntos del espacio.

Modeliza fenómenos en los que tenemos un conjunto de n sucesos posibles, cada uno de los cuales con la misma probabilidad de ocurrir. Si aleatorizamos de forma que cada uno de éstos sucesos se corresponda con un número natural del 1 al n obtendremos una distribución uniforme. Tendremos un único parámetro ; n

Diremos , por tanto que

$$X \Rightarrow U(n)$$

Puede hacerse derivar en consecuencia de un proceso experimental de selección aleatoria, en el que la característica que consideramos en la selección sólo puede tomar un conjunto de n valores discretos y donde cualquiera de estos valores puede obtenerse con igual probabilidad.

Por su elementalidad no es una distribución de excesivo interés práctico.

Su **función de cuantía** definida para los valores de $x = \{ 1, 2, \dots, n \}$ vendrá dada por la constante:

$$P(x) = 1/n \text{ para } x = \{ 1, 2, \dots, n \}$$

Su **función de distribución** vendrá dada por

$$F(x_k) = P(X \leq x_k) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$$

$$\text{Así si } X \Rightarrow U(n)$$

$$\text{como ejemplo } F(4) = 4/n$$

Puede comprobarse que su **media** será

$$\mu = \alpha_1 = E[x] = \sum_{\forall x} x_i P(x_i) = \sum_{\forall x} x_i \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{\forall x} x_i = \frac{1}{n} (1 + 2 + \dots + n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1+n}{2} n = \frac{n+1}{2}$$

su **varianza** será :

$$\sigma^2 = \alpha_2 - \mu^2 = \frac{n^2 - 1}{12} = \text{dado que}$$

$$\sigma^2 = \alpha_2 - \mu^2 = \frac{1}{n} \sum_{\forall x} x^2 - \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 = \frac{1}{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 = \frac{n^2 - 1}{12} \text{ dado que}$$

$$\sum_{\forall x} x_i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

por último, su **Función Generatriz de Momentos**, quedará expresada como

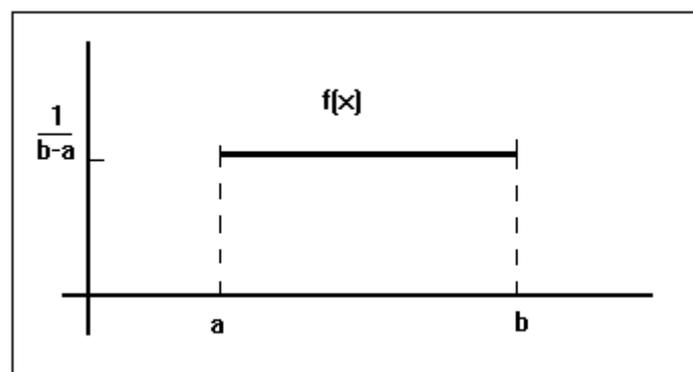
$$\varphi(t) = E[e^{tx}] = \frac{1}{n} \sum_{\forall x} e^{tx_i} = \frac{e^t(e^{n+1} - 1)}{n(e^t - 1)}$$

DISTRIBUCIÓN UNIFORME (DE V.CONTINUA)

La distribución o modelo uniforme puede considerarse como proveniente de un proceso de extracción aleatoria. El planteamiento radica en el hecho de que la probabilidad se distribuye uniformemente a lo largo de un intervalo. Así: dada una variable aleatoria continua, x , definida en el intervalo $[a, b]$ de la recta real, diremos que x tiene una distribución uniforme en el intervalo $[a, b]$ cuando su función de densidad

para $x \rightarrow U[a, b]$ sea: $f(x) = \frac{1}{b-a}$ para $x \in [a, b]$.

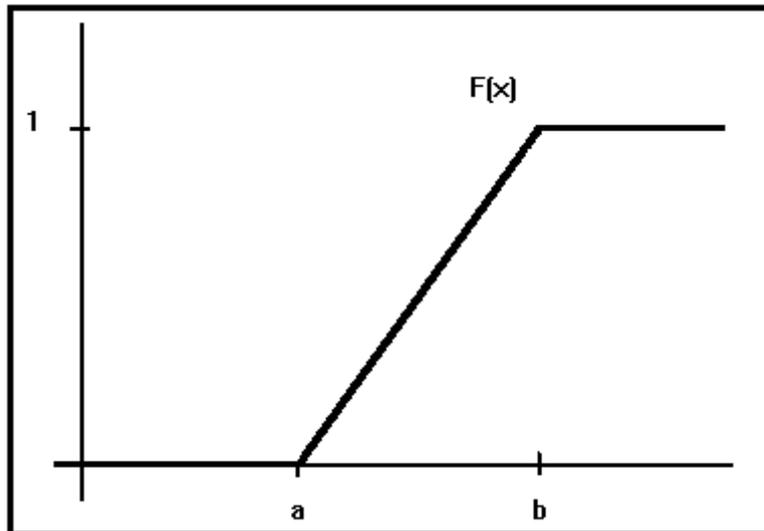
Su representación gráfica será:



De manera que la **función de distribución** resultará:

$$F(X) = P(x \leq X) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < a \\ \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq X \leq b \\ 1 & \text{si } X \geq b \end{cases}$$

Su representación gráfica será :



Este modelo tiene la característica siguiente : Si calculamos la probabilidad del suceso

$$[X \leq x \leq X + \Delta X]$$

Tendremos os: $P[X \leq x \leq X + \Delta X] = \int_x^{x+\Delta X} \frac{dx}{b-a} = \frac{\Delta X}{b-a}$

Este resultado nos lleva a la conclusión de que la probabilidad de cualquier suceso depende únicamente de la amplitud del intervalo (ΔX), y no de su posición en la recta real $[a, b]$. Lo que viene a demostrar el reparto uniforme de la probabilidad a lo largo de todo el campo de actuación de la variable, lo que, por otra parte, caracteriza al modelo.

En cuanto a las ratios de la distribución tendremos que **la media** tiene la expresión:

$$\mu = E[x] = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{2} \frac{(b^2 - a^2)}{b-a} = \frac{1}{2} \frac{(b-a)(b+a)}{b-a} = \frac{a+b}{2}$$

La varianza tendrá la siguiente expresión:

$$\sigma^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = E[x^2] - \mu^2$$

$$\text{de donde } \alpha_2 = E[x^2] = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{1}{3} \frac{(b^3 - a^3)}{b-a}$$

$$\text{por lo que } \sigma^2 = \frac{1}{3} \frac{(b^3 - a^3)}{b - a} - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

La función generatriz de momentos vendrá dada por :

$$\varphi(t) = E[e^{tx}] = \int_a^b e^{tx} \frac{1}{b-a} dx = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$$

Lógicamente partiendo de esta función podríamos recalcular media y varianza gracias al teorema de los momentos