

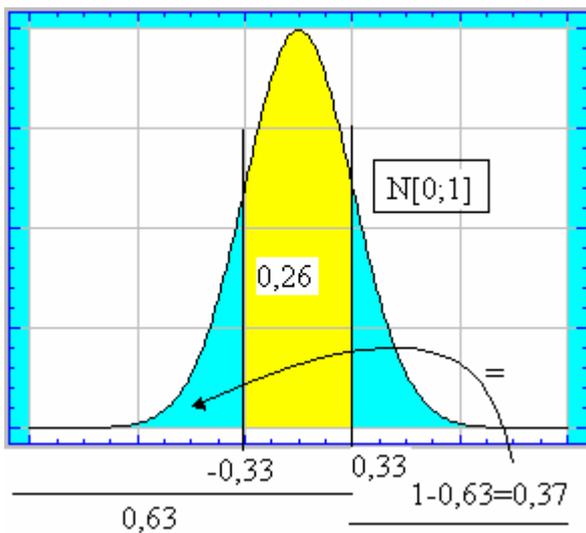
## Normal-Combinación Normales

116.- El coeficiente intelectual de los humanos se distribuye normalmente con media 100 y desviación típica 15 .En España con 40 millones de habitantes

- ¿Cuántos normales habrá, si se denomina normal a la persona con coeficiente entre 95 y 105 ?
- ¿Cuántas personas habrá de inteligencia superior si ésta es aquella cuyo coeficiente es superior a 130 ?
- Si denominamos “idiota” a aquella persona cuyo coeficiente está comprendido entre 70 y 100 ¿Cuántos idiotas habrá en España ?
- Manteniendo la situación anterior ¿ Cuántos idiotas habrá en grupo de 60 universitarios ? Discute y comenta dicho número.

a) C.I.  $N[100 ;15]$  si se denomina normal a  $95 < \text{C.I.} < 105$  la probabilidad o proporción de normales será  $P(95 \leq \text{C.I.} \leq 105) = P(95 < \text{C.I.} < 105)$  tipificando  $P(t_1 < t < t_2)$

$$t_1 = \frac{CI_1 - \mu}{\sigma} = \frac{95 - 100}{15} = -0,333 \quad \text{y} \quad t_2 = \frac{CI_2 - \mu}{\sigma} = \frac{105 - 100}{15} = 0,333 \quad \text{luego}$$



$$P(-0,333 < t < 0,333)$$

según tabla de  $N[0,1]$  que utilizemos podría ser :

$$\begin{aligned} P(-0,333 < t < 0,333) &= \\ &= F(0,333) - (1 - F(0,333)) = 0,63 - (1 - 0,63) = \\ &= 0,63 - 0,37 = 0,26. \end{aligned}$$

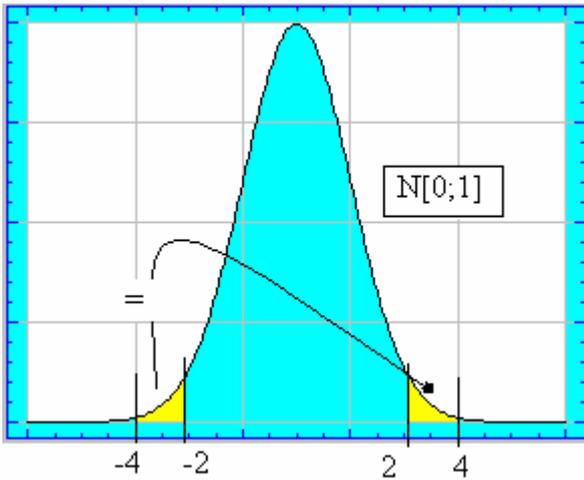
Por tanto dado que el número de españoles es de 40.000.000 el número de personas normales será de :  
 $0,26 \cdot 40.000.000 = 10.400.000$  españoles.

b) si la inteligencia superior es aquella cuyo  $\text{C.I.} > 130$  y dado que  $\text{C.I.} \sim N[100 ;15]$  la probabilidad o proporción de personas con inteligencia superior será  $P(\text{C.I.} > 130)$  tipificando para usar la tabla de la  $N[0,1]$

$$\text{tendremos : } P(\text{C.I.} > 130) = P(t > t_1) = P\left(t > \frac{CI - \mu}{\sigma}\right) = P\left(t > \frac{130 - 100}{15}\right) = P(t > 2) =$$

según tabla utilizada  $P(t > 2) = 1 - F(2) = 1 - 0,977 = 0,023$  por lo que la cantidad de españoles con inteligencia superior será  $0,023 \cdot 40.000.000 = 920.000$  españoles.

c) Si idiota es aquel cuyo  $\text{C.I.}$  está :  $40 < \text{C.I.} < 70$  la proporción o probabilidad de ser idiota es  $P(40 < \text{C.I.} < 70)$  en la normal antes citada ; así tipificando será :



$$P\left(\frac{40-100}{15} < t < \frac{70-100}{15}\right) = P(-4 < t < -2)$$

dado que habitualmente las tablas de la  $N[0;1]$  no contemplan los números negativos, la probabilidad que buscamos será la misma que existe (por simetría de la normal) para

$$P(2 < t < 4) = F(4) - F(2) = 1 - 0,977 = 0,023$$

por lo que el número de españoles idiotas se situará en :  
 $0,023 \cdot 40.000.000 = 920.000$

d) la probabilidad de idiota es, como hemos visto de 0,023 en el grupo de 60 universitarios, por tanto, debiera haber  $60 \cdot 0,023 = 1,38$  luego uno. Evidentemente esto sería cierto si el grupo estuviera compuesto por 60 personas elegida al azar y esto no es así dado que cabe suponer que el grupo de universitarios tienen un comportamiento diferente al resto de los españoles respecto al, precisamente, factor coeficiente intelectual, o por lo menos eso cabría esperar

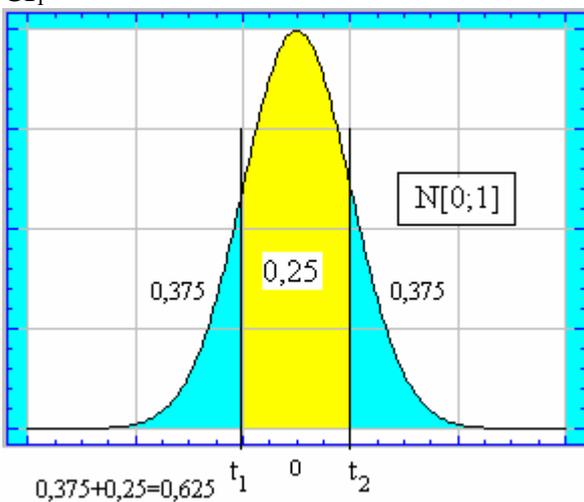
117.-Si el coeficiente intelectual de un amigo es de 115 ¿Qué porcentaje de personas tienen un coeficiente inferior al suyo ?

Manteniendo que el CI  $\sim N[100;15]$  la probabilidad o proporción de personas con  $CI < 115$  será  $P(CI < 115) = P(t < t_1) = P\left(t < \frac{115-100}{15}\right) = 1 = F(1) = 0,841$  ; 84,1%

118.-Si una persona tiene el coeficiente más bajo del grupo intermedio de personas que forman un 25% del total ¿Qué coeficiente tiene ?

Un grupo centrado (intermedio) con 0.25 de probabilidad, plantearíamos :

$0,25 = P(CI_1 < CI < CI_2)$  el coeficiente más bajo, el que estamos buscando, sería  $CI_1$



para la normal tipificada de la que tenemos tablas la situación sería :

$$0,25 = P(t_1 < t < t_2)$$

dado que es un intervalo centrado en cero los valores serán los mismo pero con distinto signo : así

$$F(t_2) = \frac{(1-0,25)}{2} + 0,25 = 0,375 + 0,25 = 0,625$$

según tabla  $t_2 = 0,3186$  siendo el intervalo en la tipificada

$P(-0,3186 < t < 0,3186) = 0,25$  destificando obtendremos los valores buscados así :

$$-0,3186 = \frac{CI_1 - 100}{15} \rightarrow CI_1 = (-0,3186 \cdot 15) + 100 = 95,2 \quad \text{y :}$$

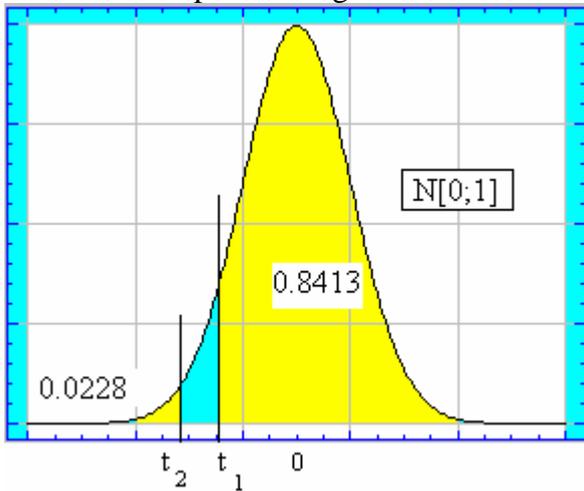
$$0,3186 = \frac{CI_2 - 100}{15} \rightarrow 2 = (0,3186 \cdot 15) + 100 = 104,779$$

siendo el coeficiente más bajo del intervalo 95,2.

120.- Si de un ratio comercial conocemos que  $P(R > 95) = 0,8413$  y  $P(R < 90) = 0,0228$ . Calcular su media y su desviación. Supuesta normalidad; claro.

Un ratio R sigue una  $N[\mu; \sigma]$  conocemos que :

$P(R > 95) = 0,8413 = P(t > t_1)$  y  $P(R < 90) = P(t < t_2) = 0,0228$  encontremos los valores de la tipificada según tabla :



el valor  $t_1$  será negativo dado que deja a su derecha más de 0,5 (0,8413) de probabilidad y lo encontraremos cambiando el signo del valor cuya probabilidad acumulada sea 0,8413 es decir  $F(t_1) = 0,8413$  siendo

$t_1 = 0,9998 \cong 1$  luego realmente -1

el valor  $t_2$  será también negativo pues deja a la izquierda menos de 0,5 (0,0228) o a la derecha más de 0,5 ( $1 - 0,0228 = 0,9772$ ) lo encontremos cambiando el signo al valor cuya probabilidad acumulada sea  $1 -$

$0,0228 = 0,9772$  es decir  $F(t_2) = 0,9772$  siendo  $t_2 = 1,999 \cong 2$  luego realmente -2 ; así :

$$-1 = t_1 = \frac{R_1 - \mu}{\sigma} = \frac{95 - \mu}{\sigma}$$

$$-2 = t_2 = \frac{R_2 - \mu}{\sigma} = \frac{90 - \mu}{\sigma}$$

donde tenemos dos ecuaciones para las incógnitas que deseamos conocer así resolviendo

obtenemos que  $\mu = 100$  y  $\sigma = 5$

121.- Se conoce que las ventas de octubre bajarán entre 350 y 610 millones con probabilidad de 0,8. Siendo lo más probable que ésta sea 480 millones. Calcular la probabilidad de que las ventas disminuyan menos de 500 millones si aceptamos que éstas se distribuyen como una normal.

$V \rightarrow N[\mu; \sigma]$  y conocemos que  $P(350 < V < 610) = 0,8$

para resolver la pregunta debemos conocer primero los parámetros de la normal, ventas la media en la normal coincide con la moda y la mediana luego como el valor más probable es 480 (la moda) será  $\mu = 480$  queda por conocer la varianza o desviación típica.

Si  $P(350 < V < 610) = 0,8$  en la normal  $0,1$  tendremos que  $P(t_1 < t < t_2) = 0,8$  dado que es un intervalo centrado pues  $(350+610)/2 = 480 = \mu$  según tabla los valores serán :

$$t_1 = -1,282 \quad \text{y} \quad t_2 = 1,282 \quad \text{destipificando uno de ellos} \quad t_2 = 1,282 = \frac{610 - 480}{\sigma} \quad \text{ya que}$$

solo desconocemos una incógnita siendo por tanto  $\sigma = 101,4$   
por lo que las ventas  $V \rightarrow N[480 ; 101,4]$

$$\text{dado que nos preguntan por } P(V < 500) = P(t < t_1) = P\left(t < \frac{500 - 480}{101,4}\right) = P(t < 0,197)$$

que directamente en la tabla daría **0.578**

122.- Se ha comprobado que el peso de un paquete sigue una ley normal . Los controles de calidad revelaron que un tercio de los paquetes pesaban menos de 870 gr y que sólo dos de cada mil paquetes pesaban más de 1 kg . Calcular .

- a) La probabilidad de que si elegimos un paquete al azar éste pese más de 850 gr .  
.respuesta 0,8264
- b) Si en una semana salen al mercado 40000 paquetes ¿Cuántos cabe esperar que pesen mas de 900 gr. ?

Para resolver las preguntas a y b necesitamos conocer la distribución (parámetros) del peso P del paquete. Para ello si  $P(P < 870) = 0,33$  luego en normal  $[0,1]$   $P(t < t_1) = 0,33$

siendo  $t_1$  el valor negativo (dado que la probabilidad es menor que 0,5 ) de el valor que  $P(t > t_1) = 0,33$  siendo este 0,4307 es decir  $t_1$  real -0,4307

Conocemos también que 2 de cada mil pesan más de 1000 luego  $P(P > 1000) = 0,002$  luego en la tipificada  $P(t > t_2) = 0,002$  o mejor  $P(t < t_2) = 0,998$  por lo que por tablas tendremos que  $t_2 = 2,878$  .Destipificando y resolviendo el sistema :

$$-0,4307 = t_1 = \frac{P_1 - \mu}{\sigma} = \frac{870 - \mu}{\sigma} \quad \text{resolviendo el sistema} \quad \mu = 886,9 \quad \text{y} \quad \sigma = 39,29$$

$$2,878 = t_2 = \frac{P_2 - \mu}{\sigma} = \frac{1000 - \mu}{\sigma}$$

luego el peso del paquete será  $P \sim N[886,9 ; 39,29]$  luego

$$\text{a) } P(P > 850) = P(t > t_1) = P\left(t > \frac{850 - 886,9}{39,29}\right) = P(t > -0,939) = F(0,939) = 0,826$$

b) la proporción de paquetes con más 900 gr. será :

$$P(P > 900) = P(t > t_2) = P\left(t > \frac{900 - 886,9}{39,29}\right) = P(t > 0,3334) = 1 - F(0,3334) = 1 - 0,631 = 0,369$$

dado que tenemos 40000 paquetes que han de pesar más 900 o no estaremos ante una  $N =$  número de paquetes que pesan más de 900 que será una  $B(40000 ; 0,369)$

se nos pregunta cuantos cabe esperar luego esperanza matemática  $E[N] = np = 40000 \cdot 0,369 = 14760$

123.- Si la vida útil de un producto financiero es una normal de media 2000 horas y varianza 40000 horas al cuadrado . ¿Cuál es la probabilidad de que seleccionados 8 productos aleatoriamente , sólo dos de ellos aguanten más de 2300 horas ?

$V \rightarrow N[2000 ; 200]$  horas Nos planteamos la probabilidad (proporción) con la que un producto financiero sobrevivirá más 2300 horas siendo

$$P(P > 2300) = P(t > t_{11}) = P\left(t > \frac{2300 - 2000}{200}\right) = P(t > 1,5) = 1 - F(1,5) = 1 - 0,933 = 0,067$$

luego el número = N de productos de 8 que durarán más de 2300 sigue una  $B[8 ; 0,067]$

$$\text{luego la probabilidad de que solo 2 duren será } P(N=2) = \binom{8}{2} 0,067^2 \cdot 0,933^6 = 0,829$$

124.- El peso máximo que un ascensor puede elevar es de 250 kg. . Si conocemos que el peso humano se distribuye según una normal de media 70 y desviación 20 . Calcular la probabilidad de que el ascensor no aguante si suben en él tres personas.

El peso sigue una  $P \rightarrow N[70 ; 20]$  Kg. El peso de 3 personas evidentemente no gemelas o iguales será la suma del peso de ellas , lógicamente independientes , así :

Peso de las 3 =  $P_3 = P + P + P$  combinación lineal de normales independientes luego :

$$P_3 \rightarrow N\left[70 + 70 + 70; \sqrt{1^2 \cdot 20^2 + 1^2 \cdot 20^2 + 1^2 \cdot 20^2}\right] \rightarrow N[210; 34,64]$$

el ascensor no aguanta si sube en él un peso superior a 250 , luego la probabilidad de que no aguante será la probabilidad de que el peso de las tres personas sea superior a 250 , así :

$$P[P_3 > 250] = P[t > t_1] = P\left[t > \frac{250 - 210}{34,64}\right] = P(t > 1,1547) = 1 - F(1,1547) = 1 - 0,876 = 0,124$$

125.- Una cartera de valores está compuesta por tres acciones de la sociedad A , cuyos dividendos se distribuyen como una normal (mucho suponer) con media 1000 um y desviación típica 25 . Calcular la probabilidad con la que obtendremos más de 3100 um de dividendos por dicha cartera .

Los dividendos de una acción serán  $D \rightarrow N[1000 ; 25]$  . Los dividendos que proporciona la cartera (3 acciones) y dado que los dividendos de una acción varían pero son idénticos a los que proporcionan las otras , serán 3 · Dividendos de una = 3D ; dado que D es normal .

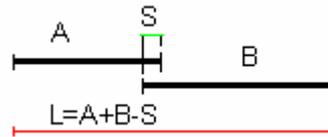
$3D \rightarrow N\left[3 \cdot 1000; \sqrt{3^2 \cdot 25^2}\right] = N[3000; 75]$  la probabilidad de obtener más de 3100 um de la cartera se tres acciones será :

$$P[3D > 3100] = P[t > t_1] = P\left[t > \frac{3100 - 3000}{75}\right] = P(t > 1,333) = 1 - F(1,333) = 1 - 0,909 = 0,091$$

126.- Una vigueta está compuesta por dos elementos A y B . La longitud de A sigue una normal [100 ; 2] cm. y la de B una normal [ 200; 4] . Ambos elementos se solapan ( se incrustan) una longitud normal con media 2 cm y varianza 1 cm<sup>2</sup> . Una vigueta es utilizable si su longitud está comprendida entre 297 y 300 cm . Necesitamos 10 viguetas

útiles para lo que montamos a priori 11 de ellas . Calcular la probabilidad de que consigamos nuestro objetivo.

La vigueta quedaría con una longitud total



$L = A+B-S$  dado que las tres longitudes son normales tendríamos

$$L \rightarrow N[\mu_A + \mu_B + \mu_S; \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_S^2}] =$$

$$L \rightarrow N[100 + 200 - 2; \sqrt{2^2 + 4^2 + 1^2}] =$$

$$L \rightarrow N[298; \sqrt{21}]$$

Una vigueta es correcta y útil cuando  $297 < L < 300$  luego :

$$P(297 < L < 300) = P\left(\frac{297 - 298}{\sqrt{21}} < t < \frac{300 - 298}{\sqrt{21}}\right) =$$

$$= P(-0,21 < t < 0,43)$$

En tablas tendríamos :

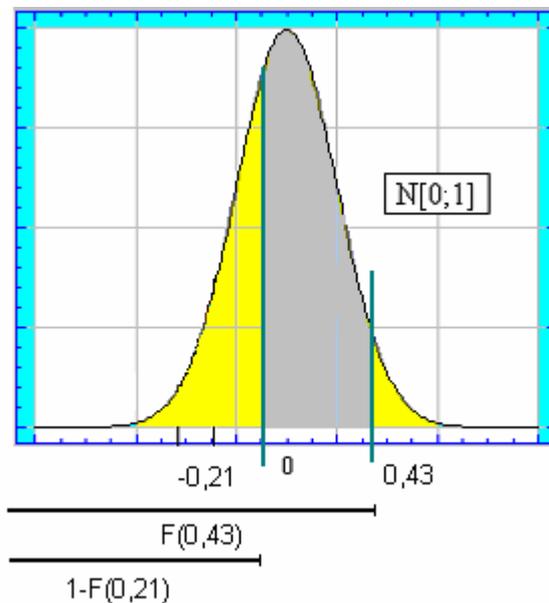
$$P(-0,21 < t < 0,43) =$$

$$F(0,43) - [1 - F(0,21)] =$$

$$= 0,6664 - [1 - 0,5831] =$$

$$= 0,6664 - 0,4169 =$$

$$= 0,2495$$



Conocemos ahora la probabilidad de montar una vigueta correcta. Dado que vamos a montar 11 ; tendremos que  $X =$  número de viguetas correctas (útiles) de 11 . Luego :

$$X \Rightarrow B(n, p) = B(11; 0,249) \text{ luego } P(\text{alcanzar el objetivo}) = P(X \geq 10)$$

$$P(X \geq 10) = P(X=10) + P(X=11) \text{ así :}$$

$$\binom{11}{10} \cdot 0,249^{10} \cdot 0,751^1 + \binom{11}{11} \cdot 0,249^{11} \cdot 0,751^0 =$$

$$0,00000756 + 0,00000228 \cong 0$$

127.- Una producto financiero está compuesto por 20 acciones tipo A y 30 del tipo o empresa B . Los gastos anuales para cada una de las acciones son una cantidad para todas que sigue una  $N [0,06 ; 1]$  €. El rendimiento anual de las acciones A sigue una

$N[3,2]$  euros , por otro lado el rendimiento de las acciones B una  $N[4,1]$  euros . El período de vigencia del producto es de tres años. Calcular :

a) Probabilidad de que en el período de vigencia se hayan obtenido más de 564 euros de rendimiento

b) Probabilidad de que sea precisamente el tercer año de vigencia del producto el primero en el que se obtengan, más de 197 euros de rendimiento .

Rendimiento anual =R= 20 Rendimiento de A + 30 Rendimiento de B – 50 gastos de cada una

Rendimiento de A es  $N[3,2]$  y Rendimiento de B es  $N[4,1]$  por T.F.D.Normales (no es posible la desigualdad de rendimientos entre las acciones iguales , por tanto ;producto) Los gastos son iguales para cada una de las 50 acciones, luego 50 por el gasto de cada una

$$\text{Luego } R \Rightarrow N \left[ 20 \cdot 3 + 30 \cdot 4 - 50 \cdot 0,06; \sqrt{20^2 \cdot 4 + 30^2 \cdot 1 + 50^2 \cdot 1} \right] = N[177;70,71]$$

a) En período de vigencia el Rendimiento será  $RT= R+R+R$  luego.(posible desigualdad entre cada año, por tanto suma)

$$RT \Rightarrow N \left[ 177 + 177 + 177; \sqrt{70,71^2 + 70,71^2 + 70,71^2} \right] = N[531;122,47]$$

$$P(RT > 564) = P(t > t_1) = P\left(t > \frac{564 - 531}{122,47}\right) = P(t > 0,269) = 1 - F(0,269) = 0,394$$

b) primer éxito (más de 197 euros de rendimiento) en el tercer año .luego

$X=$  número de pruebas para primer éxito. Luego  $X \Rightarrow G(p)$

$p=$ probabilidad de éxito =

$$p = P(R > 197) = P(t > t_1) = P\left(t > \frac{197 - 177}{70,71}\right) = P(t > 0,2828) = 1 - F(0,2828) = 0,389$$

$$x \Rightarrow G(0,389) \quad ; \quad P(x=3) = p \cdot (1-p)^{x-1} = 0,389 \cdot 0,611^2 = 0,145$$

128.- Una producto financiero está compuesto por 20 acciones tipo A y 30 del tipo o empresa B . Los gastos anuales fijos son de 3 €. El rendimiento anual de las acciones

A sigue una  $N[3,2]$  euros , por otro lado el rendimiento de las acciones B una  $N[4,1]$  euros . El período de vigencia del producto es de tres años. Calcular :

- a) Probabilidad de que en el período de vigencia se hayan obtenido más de 564 euros de rendimiento  
 b) Probabilidad de que en solo dos, de los tres años de vida del producto, se hayan obtenido más de 197 euros de rendimiento .

Rendimiento anual =  $R = 20$  Rendimiento de A +  $30$  Rendimiento de B – gastos fijos  
 Rendimiento de A es  $N[3,2]$  y Rendimiento de B es  $N[4,1]$  por T.F.D.Normales (no es posible la desigualdad de rendimientos entre las acciones iguales , por tanto ;producto)

$$\text{Luego } R \Rightarrow N\left[20 \cdot 3 + 30 \cdot 4 - 3; \sqrt{20^2 \cdot 4 + 30^2 \cdot 1}\right] = N[177;50]$$

a) En período de vigencia el Rendimiento será  $RT = R + R + R$  luego.(posible desigualdad entre cada año, por tanto suma)

$$RT \Rightarrow N\left[177 + 177 + 177; \sqrt{50^2 + 50^2 + 50^2}\right] = N[531;86,6]$$

$$P(RT > 534) = P(t > t_1) = P\left(t > \frac{564 - 531}{86,6}\right) = P(t > 0,381) = 1 - F(0,381) = 0,352$$

b) en dos de tres = dos éxitos de tres pruebas ;  $X =$  número de éxitos en tres pruebas  
 $X \sim B(3; p)$  donde  $p =$  probabilidad de éxito = probabilidad de más de 197 euros de rendimiento al año. Como  $R$  anual =  $R \sim N[177;50]$

$$p = P(R > 197) = P(t > t_1) = P\left(t > \frac{197 - 177}{50}\right) = P(t > 0,4) = 1 - F(0,4) = 0,345$$

luego  $X \sim B(3; 0,345)$  así  $P(\text{dos de tres}) = P(x = 2) =$

$$\binom{3}{2} 0,345^2 \cdot 0,655^1 = 3 \cdot 0,119 \cdot 0,655 = 0,2338$$

129.- La producción diaria de piezas en una empresa sigue una normal de media 1000 y desviación típica 10 unidades . Podemos soportar , sin pérdidas , unos costes semanales de producción de 49895 euros de los cuales son fijos 10000 y el resto dedicado a las piezas fabricadas cuyo coste unitario de producción es de 39,5 euros. Calcular la probabilidad de que en un mes de cuatro semanas en ninguna de ellas tengamos pérdidas por producción .

Costes asumibles =  $49895 = 10000 + 39895$

Costes asumibles a la semana por piezas producidas =  $39895 = 39,5 \cdot 1010$

Piezas máximas a producir 1010 para no tener pérdidas .

$X =$  número de piezas producidas a la semana  $X$  sigue  $[1000;10]$

$P(\text{no tener pérdidas por producción a la semana}) = P(X < 1010) =$

$$P(t < t_1) = P\left(t < \frac{1010 - 1000}{10}\right) = P(t < 1) = 0,841 \text{ luego } P(\text{pérdidas}) = 0,159$$

En un mes de 4 semanas ninguna con pérdidas

Y= número de semanas con pérdidas de 4 Y seguirá  $B(4 ; 0,159)$

$$P(Y=0) = \binom{4}{0} 0,159^0 \cdot 0,841^4 = 0,5$$

130.- El rendimiento anual de una acción de la empresa A se distribuye según una  $N[100;2]$  euros . Somos propietarios de 100 acciones de dicha empresa . Calcular la probabilidad de que dicho paquete de acciones nos rinda más de 9775 euros al año.

RA = rendimiento anual de una acción RA sigue  $N[100,2]$

RP= rendimiento anual del paquete = 100RA y será:

$$RP \rightarrow N\left[100 \cdot 100; \sqrt{100^2 \cdot 4}\right] = N[10000;200]$$

$$P(RP > 9775) = P(t > t_1) = P\left(t > \frac{9775 - 10000}{200}\right) = P(t > -1,125) = 0,87$$