

PRINCIPALES CONCEPTOS DE LA TEORÍA DE LA PROBABILIDAD

CONCEPTOS PREVIOS

EXPERIMENTO

RESULTADO

ESPACIO DE RESULTADOS, Ω

ÁLGEBRA DE SUCESOS

SUCESO

PROBABILIDAD (AXIOMÁTICA)

PROPIEDADES Y TEOREMAS DERIVADOS DE LOS AXIOMAS

PROBABILIDAD CONDICIONADA

TEOREMA DEL PRODUCTO (DE LA INTERSECCIÓN)

TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

TEOREMA DE BAYES

INDEPENDENCIA ESTOCÁSTICA DE SUCESOS

TEOREMA DE CARACTERIZACIÓN

EXPERIMENTO aleatorio :Cualquier operación / acción / observación cuyos efectos no son predecibles con exactitud.

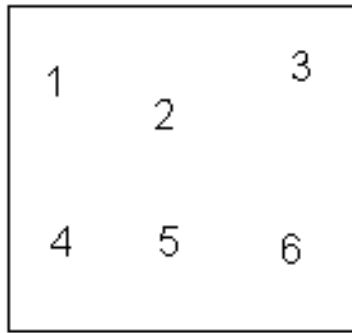
RESULTADO :cada uno de los efectos simples a los que puede dar lugar un experimento

ESPACIO DE RESULTADOS, Ω : El conjunto formado por todos los resultados.

ÁLGEBRA DE SUCESOS, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$: El conjunto de las partes de Ω .

SUCESO : Cualquier elemento del lgebra de sucesos.Cualquier conjunto formado por la unión de resultados (simples), además del conjunto vacío y de los propios resultados.

Ej .: Experimento : Lanzar un dado con puntos:

Ω 

$$A = \mathcal{P}(\Omega) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1,6\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{4,5\}, \{4,6\}, \{5,6\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{1,2,6\}, \dots, \Omega \}$$

Sobre el álgebra de sucesos pueden definirse las operaciones conjuntistas habituales ($\cup, \cap, ?$) que cumplirán las propiedades conocidas (conmutatividad, asociatividad, distributividad, Elemento Neutro, Elemento Simétrico y leyes de de Morgan).

PROBABILIDAD (de un suceso): una medida numérica de la "factibilidad" de un suceso que verifique la siguiente **axiomática (Kolmogorov)**:

Ax .1.- $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega): P(A) \geq 0$ La probabilidad (de cualquier suceso) es no negativa

Ax . 2 . - $P(\Omega) = 1$ La probabilidad del suceso cierto es 1.

Ax . 3 . - Dada una familia de numerable de sucesos: $\{A_i\}$ con $i=1,2,\dots$ tal que

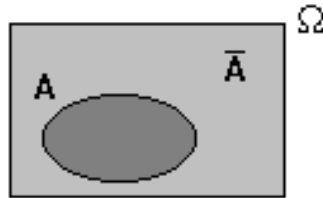
$A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$ se cumple que:

$$P\left(\bigcup A_i\right) = \sum P(A_i)$$

La probabilidad de la unión de sucesos disjuntos es la suma de las probabilidades.

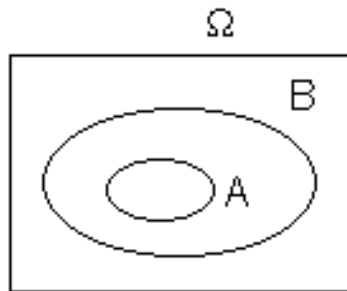
OTRAS PROPIEDADES Y TEOREMAS DERIVADOS DE LOS AXIOMAS:

P.1.Dado un suceso , A , la probabilidad de su complementario es 1 menos la probabilidad de A. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$



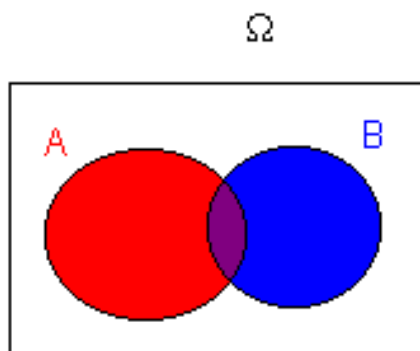
P.2.La probabilidad de cualquier suceso está comprendida entre cero y uno , ambos inclusive: $0 \leq P(A) \leq 1$

P.3.Dados dos sucesos A, B tales que $A \subseteq B$ se cumple que: $P(A) \leq P(B)$



P.4.Dados dos sucesos cualesquiera se cumple :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



PROBABILIDAD CONDICIONADA

Dados dos sucesos A y C, con $P(C) > 0$, la probabilidad de A condicionada a la ocurrencia de C, $P(A/C)$ supone una nueva asignación de probabilidad al suceso A , considerando que damos por ciertos el suceso C.

Ej . En el lanzamiento de un dado con puntos $P(\text{salga un } 2) = 1/6$.

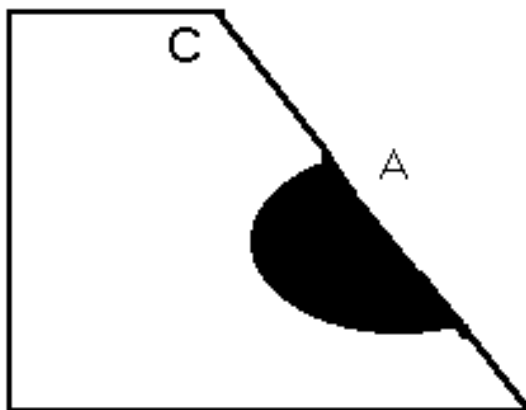
pero si damos por cierto que el resultado obtenido ha sido un número par: $P(\text{salga un } 2 / \text{ha salido par}) = 1/3$.

Condicionar las probabilidades a un suceso C , supone , por tanto, rediseñar el espacio de resultados, que originariamente era Ω , y ahora pasa a ser C . De esta forma cualquier suceso A pasa a ser en el espacio de resultados condicionado $A \cap C$:

Espacio de resultados original --> Espacio de resultados condicionado

Ω	$\Omega \cap C = C$
cualquier suceso $A \in P$	$A \cap C$
(Ω)	

Gráficamente



Teniendo en cuenta esto la asignación de probabilidades condicionadas, deber seguir verificando la axiom tica en el marco de la nueva álgebra de sucesos, y, para que esto ocurra la probabilidad condicionada deber definirse como:

$$P(A / C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)}$$

TEOREMA DEL PRODUCTO (DE LA INTERSECCIÓN):

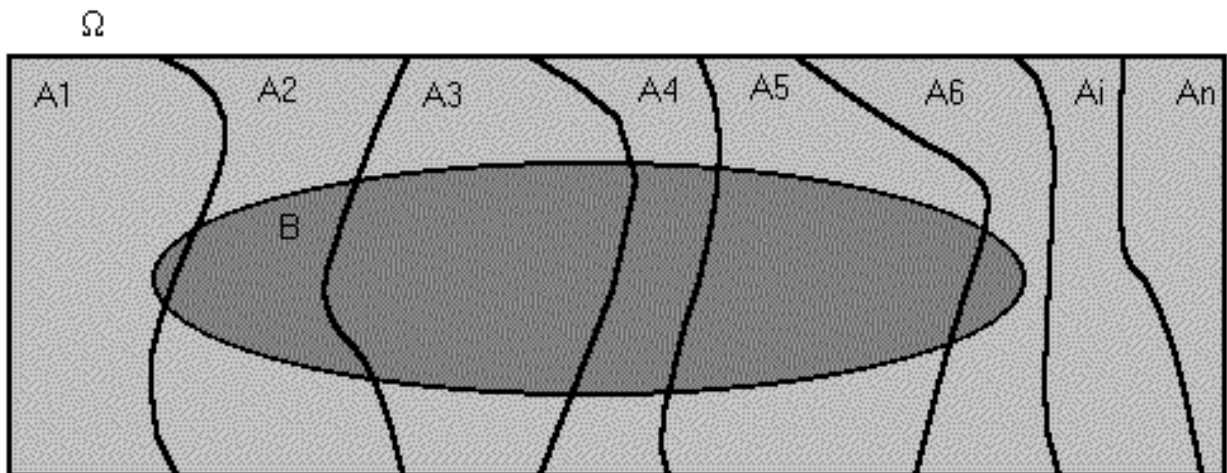
$P(A \cap B) = P(A/B).P(B)$ o bien $P(A \cap B) = P(B/A).P(A)$

y para una intersección de sucesos generalizada:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_2 \cap A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n / \bigcap_{j=1}^{n-1} A_j)$$

TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

dada la situación del gráfico:



Es decir una familia de sucesos $\{ A_i \}$ que constituyen una partición, y un suceso B con $P(B) > 0$ y siendo $P(A_i)$ y $P(B / A_i)$ conocidas para todo valor de i ; se cumple que:

$$P(B) = \sum P(B/A_i) \cdot P(A_i)$$

TEOREMA DE BAYES:

En las mismas condiciones que en el caso anterior se cumple que:

$$P(A_j / B) = \frac{P(A_j) \cdot P(B / A_j)}{\sum P(A_i) \cdot P(B / A_i)}$$

INDEPENDENCIA ESTOCÁSTICA DE SUCESOS:

Dos sucesos A y B son estoc sticamente independientes cuando la información sobre la ocurrencia de uno de ellos no modifica la probabilidad de que ocurra el otro. Esto es:

$$P(A/B) = P(A) \text{ o equivalentemente } P(B/A) = P(B)$$

CARACTERIZACIÓN DE LA INDEPENDENCIA: TEOREMA DE CARACTERIZACIÓN

$$A \text{ y } B \text{ son independientes} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

PROPIEDADES:

- 1.- Si A y B son independientes el complementario de A y el suceso B también lo son.
 - 2.- Si A y B son independientes los complementarios también lo son.
 - 3.- Si A implica B ($A \subseteq B$), A y B NO SON INDEPENDIENTES
 - 4.- Si dos sucesos son incompatibles (mutuamente excluyentes)(de intersección vacía) NO SON INDEPENDIENTES.
-