ESTADÍSTICA

GRAU TURISME

TEMA 7: INTRODUCCIÓ ALS MODELS DE PROBABILITAT

Prof. Rosario Martínez Verdú

Universitat de València / Facultat d'Economia

ade gib fic a+d tur eco

graus

TEMA 7: INTRODUCCIÓ ALS MODELS DE PROBABILITAT

1. Nocions bàsiques de teoria de la probabilitat
2. Variable aleatòria unidimensional
3. Distribucions Bernoulli i binomial
4. Distribució normal

$$P(X=x_i)=\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{x}}{x!}$$

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$$

$$P(X=x_i)=\binom{n}{x}p^{x}(1-p)^{n-x}$$

1. NOCIONS BÀSIQUES DE TEORIA DE LA PROBABILITAT

Nocions de teoria de conjunts

Espai mostral: es refereix al conjunt de tots els resultats possibles d'un procés aleatori i l'anomenarem Ω (omega).
Ex.: en el llançament d'un dau de sis cares, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Esdeveniment: es tracta de qualsevol subconjunt de possibles resultats de Ω, i el representem per A. Diem que $A \subset \Omega$.
Dos esdeveniments possibles són: el conjunt buit ($\varnothing$) i Ω.
En l'exemple anterior, uns altres esdeveniments serien: A =que isca un nre. parell, $A = \{2,4,6\}$, o B =que isca un nre. senar, $B = \{1,3,5\}$.

Per a les operacions entre esdeveniments, també s'exigeix que siguen esdeveniments o subconjunts de Ω. Aquestes són:

a) Esdeveniment contrari o complementari: donat un esdeveniment A, es tracta de l'esdeveniment que conté tots els resultats de Ω que no pertanyen a A. L'anomenarem A^C.
En l'exemple anterior, B seria l'esdeveniment complementari de A, $B = A^C$.

b) Esdeveniment unió: donats dos esdeveniments A i B de Ω, es defineix com l'esdeveniment que conté tots els resultats que pertanyen a A o a B o a tots dos. Notació: $A \cup B$.

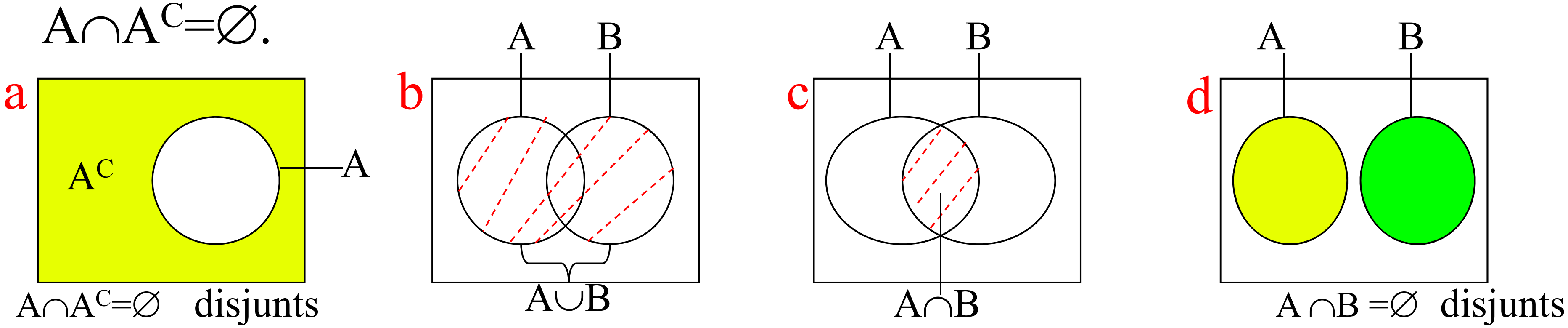
En el nostre exemple, $A \cup B = \Omega$, atès que són esdeveniments complementaris.

c) Esdeveniment intersecció: donats dos esdeveniments A i B de Ω, es defineix com l'esdeveniment que conté tots els resultats que pertanyen alhora a A i a B. Notació: $A \cap B$.

Exemple: siguen els esdeveniments A=nre. parell, i C=nre. menor que 4, $A \cap C = \{2\}$

d) Esdeveniments disjunts o incompatibles: dos esdeveniments A i B de Ω són disjunts si no tenen resultats en comú, és a dir, que $A \cap B = \varnothing$.

En el nostre exemple, $A \cap B = \varnothing$; per tant, són disjunts, és a dir, que $A \cap A^C = \varnothing$.



PROBABILITAT

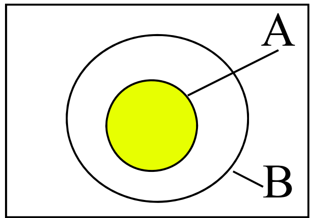
La probabilitat que ocórrega un esdeveniment A, p(A), és un nombre que ha de complir tres axiomes:

<u>Axioma 1</u>: $0 \leq p(A) \leq 1$

<u>Axioma 2</u>: $p(\Omega)=1$

<u>Axioma 3</u>: la probabilitat de la unió d'esdeveniments disjunts entre si és igual a la suma de les probabilitats d'aquests esdeveniments: $p(\cup B) = \sum p(A_i)$

Propietats:



1. Per a qualsevol esdeveniment A, $p(A^C)= 1 - p(A)$
2. $P(\varnothing) = 0$
3. Donats dos esdeveniments A i B, si $A \subset B \Rightarrow p(A) \leq p(B)$
4. Donats dos esdeveniments A i B, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
5. **Probabilitat condicionada**. Donats dos esdeveniments A i B, es tracta de la probabilitat de A, ja que se sap que B ha ocorregut i es defineix com a:

$$p(A / B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \qquad \text{se exije que } p(B) > 0$$

Exemple, en el llançament d'un dau, siga l'esdeveniment A= que isca un 5, p(A)=1/6, si a més se sap que l'esdeveniment B (que isca un nre. senar) ha ocorregut, aleshores

$$p(A / B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{1/6}{3/6} = 1/3 \qquad \text{saber que ha ocorregut B ha modificat } p(A)$$

6. **Esdeveniments independents.** Dos esdeveniments A i B són independents si: $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

En conseqüència, si A i B són independents, aleshores,

$$p(A / B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A) \cdot p(B)}{p(B)} = p(A)$$

la probabilitat de A no varia pel fet que se sàpia que ha ocorregut B.

7. Teorema de la intersecció

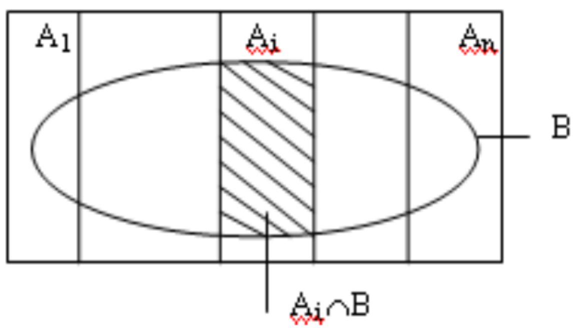
Si $p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$ y $p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$, entonces:

$$p(A \cap B) = p(A / B) \cdot p(B) = p(B / A) \cdot p(A)$$

8. Teorema de la probabilitat total

Donats els esdeveniments $A_1,..,A_i,..,A_n$, disjunts entre si. Tenim que: $A_i \cap A_j = \varnothing$ i $\cup A_i = \Omega$. Siga B un altre esdeveniment. Aleshores, els esdeveniments $A_1 \cap B,.., A_i \cap B$ són disjunts i $\cup A_i \cap B = B$. Es verifica que:

$$p(B) = \sum p(A_i \cap B) = \sum p(B/A_i) \cdot p(A_i)$$



8. Teorema de Bayes

Donats els esdeveniments $A_1,..,A_i,..,A_n$, disjunts entre si, i $\bigcup A_i=\Omega$, tals que $p(A_i)>0$, i donat un altre esdeveniment B, amb $p(B)>0$, aleshores es verificarà que:

$$p(A_i/B)=\frac{p(A_i \cap B)}{p(B)}=\frac{p(B/A_i)\cdot p(A_i)}{\sum p(B/A_i)\cdot p(A_i)} \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \frac{\text{Teorema Intersecció}}{\text{Teorema Probabilitat total}}$$

EXERCICI

Un hotel classifica les seues factures en dos tipus. Hi ha tres empleats que es dediquen a facturar, de forma que l'empleat A s'encarrega del 20% de la facturació, l'empleat B del 40% i el C, de la resta. A partir d'un control realitzat per la direcció, es va obtenir la informació següent: de la facturació que realitza l'empleat A, el 80% correspon al tipus I; el 50% de la facturació realitzada per l'empleat B correspon al tipus II, i per últim, el 30% de la facturació de l'empleat C és del tipus I.

a) Quina és la probabilitat que la factura l'haja realitzada l'empleat C i siga de tipus I?

b) Si se selecciona una factura a l'atzar, quina és la probabilitat que siga del tipus I?

c) S'ha rebut una queixa d'un client per un error que ha trobat en una factura de tipus I. Quina és la probabilitat que aquesta factura no la realitzara l'empleat C?

2. VARIABLE ALEATÒRIA UNIDIMENSIONAL

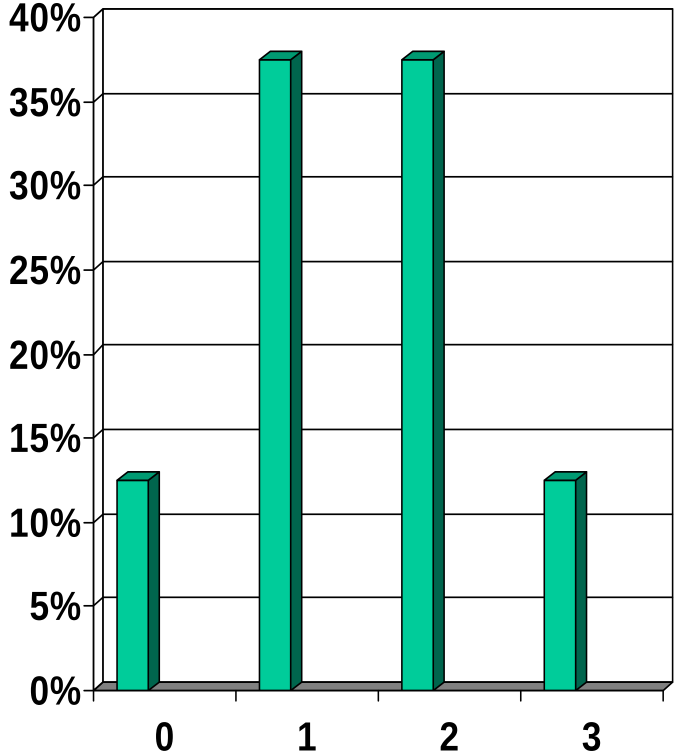
- De vegades ens interessa estudiar alguna característica del resultat d'un fenomen o experiment aleatori que pot ser representada per una quantitat numèrica.

- En aquests casos apareix la noció de variable aleatòria (va)
  - Funció que assigna a cada resultat un nombre.

- Les variables aleatòries poden ser discretes o contínues.
- Variable discreta: pot prendre un nombre (petit o gran) de valors aïllats o solts.
- Variable contínua: pot prendre qualsevol valor en un o en diversos intervals (ingressos, temps o durada).

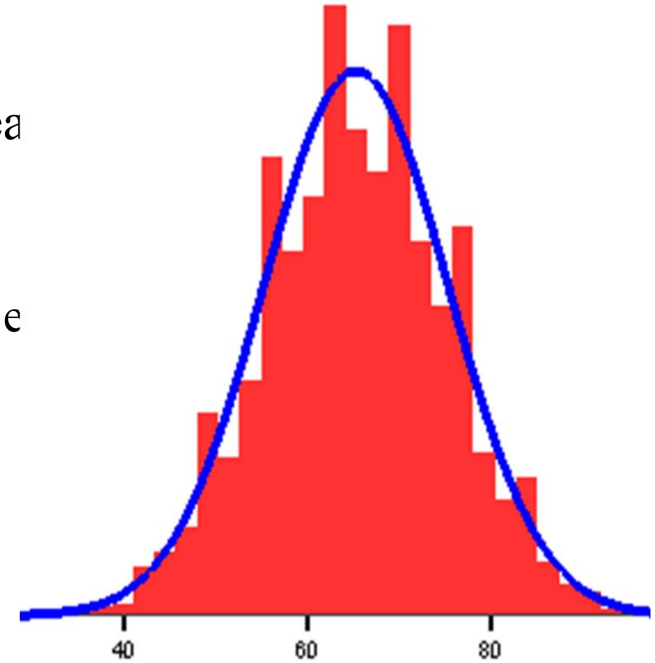
Variables discretes: funció de probabilitat P(x)

- Assigna a cada possible valor d'una variable discreta la seua probabilitat.
- Exemple
  – Nombre d'encerts en un test, que responem a l'atzar, amb tres preguntes amb resposta vertader o fals.
  – Possibles valors de X= 0,1,2,3
  – Les probabilitats P(0), P(1), P(2), P(3), les podreu calcular quan recordem la distribució binomial.



Variables contínues: funció de densitat f(x)

- Definició
  - És una funció no negativa la integral de la qual (àrea total) és 1.
    - Considereu-la com la generalització de l'histograma amb freqüències relatives per a variables agrupades e intervals.



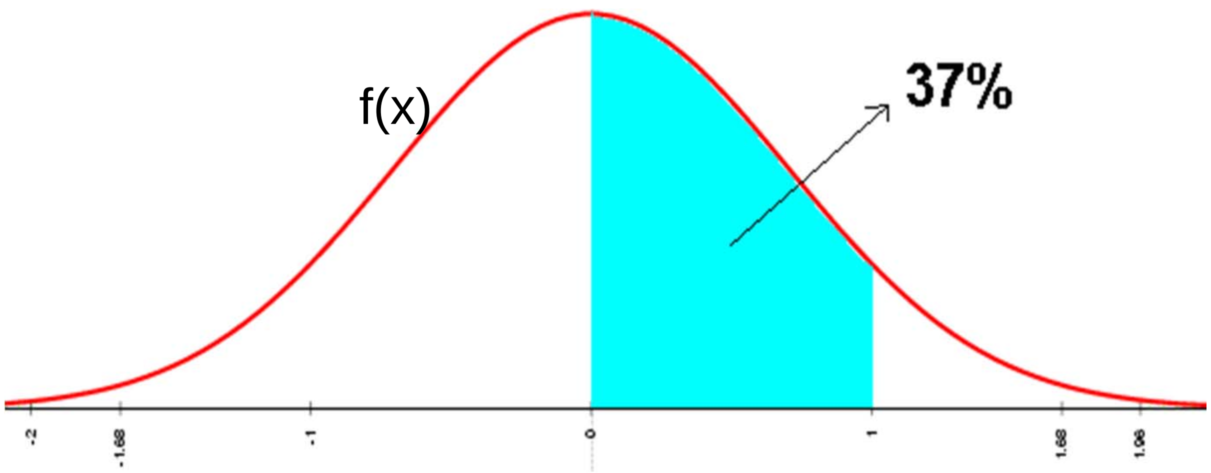
- Per a què la farem servir?
  - No la fareu servir mai directament.
  - Els seus valors no representen probabilitats.

Per a què serveix la funció de densitat f(x)?

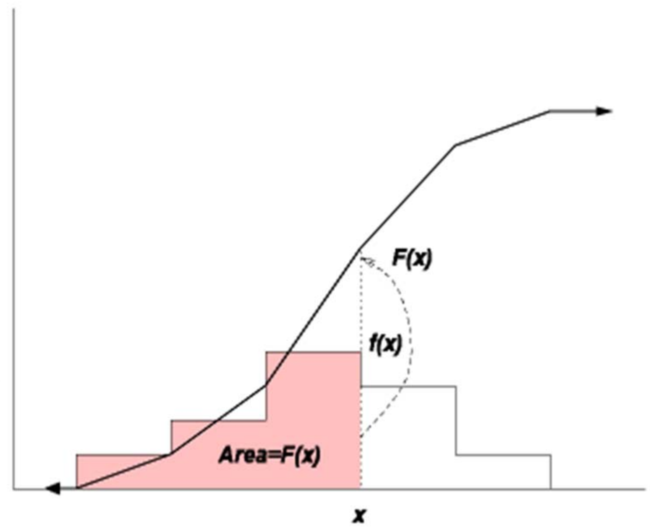
- Molts fenòmens aleatoris es representen amb variables, de forma que interessa calcular les probabilitats d'intervals.

- La integral definida de la funció de densitat en aquests intervals coincideix amb la seua probabilitat.

- És a dir, identifiquem la probabilitat d'un interval amb l'**àrea** sota la funció de densitat.



Funció de distribució: F(x) o de probabilitat acumulada



- És la funció que calcula per a cada valor d'una variable la probabilitat acumulada fins als valors menors o iguals que aquest valor. $F(x)=P(X\leq x)$
  - Considereu-la com la generalització de les freqüències acumulades.
    - Als valors extremament baixos corresponen valors de la funció de distribució propers a zero.
    - Als valors extremament alts corresponen valors de la funció de distribució propers a u.

Per a què serveix la funció de distribució?

És fonamental per a calcular probabilitats en el cas de variables contínues.

Principals característiques d'una variable aleatòria X: mitjana i variància

- Mitjana o valor esperat
  - Es representa per μ o $E[X]$
- Variància
  - Es representa per σ^2 o $VAR[X]$
  - Mesura la dispersió o allunyament dels possibles valors de X respecte a la mitjana μ. Sempre pren valors positius.
  - Es diu desviació estàndard σ, la seua arrel quadrada. $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$
- Transformacions lineals:

$$Y = a\,X + b \quad \left\langle \begin{array}{l} \mu_Y = a\,\mu_X + b \\ \sigma_Y^2 = a^2 \sigma_X^2 \\ \sigma_Y = a\,\sigma_X \end{array} \right.$$

Alguns models específics de distribucions de probabilitat

- Hi ha models de probabilitat que serveixen per a representar fenòmens econòmics i turístics.
- Experiments dicotòmics (amb dos resultats possibles).
    - Bernoulli

  – Comptar èxits en experiments dicotòmics repetits:
    - Binomial

  – I en moltes ocasions…
    - Distribució normal

- Les transparències següents estan dedicades a estudiar aquestes distribucions de probabilitat específiques.

3. DISTRIBUCIONS BERNOULLI I BINOMIAL

a) Distribució de Bernoulli

- Tenim un fenomen de Bernoulli si en analitzar-lo només són possibles dos resultats:

  X=1 **èxit** amb probabilita p

  X=0 **fracàs** amb probabilitat 1-p =q

  - *a*) Si s'encerta o no en respondre a l'atzar una pregunta de tipus test amb dos resultats possibles (vertader o fals).

    P(encertar)= P(X=1) = p = 0,5 P(no encertar)= P(X=0) = 1-p = 0,5
  - *b*) Segons dades de l'IET, el 40% dels turistes elegeixen una determinada destinació turística per a les vacances. Seleccioneu un turista a l'atzar i que elegisca o no aquesta destinació turística.

    P(elegir destinació)= P(X=1) = p = 0,4

    P(no elegir destinació)= P(X=0) = 1-p = 0,6
  - En ambdós exemples la mitjana μ i la variància σ^2 de la variable aleatòria X són:

    $\mu=E[X]=\Sigma x\, p(x) = 1.p + 0.\,(1-p) = \mathbf{p}$

    $\sigma^2 = \Sigma x^2\, p(x) - \mu^2 = 1^2.p + 0^2.\,(1-p) - p^2 = p - p^2 = \mathbf{p(1-p)}$

    a) $\mu = 0,5$ $\sigma^2 = 0,5.0,5=0,25$

    b) $\mu = 0,4$ $\sigma^2 = 0,4.0,6=0,24$

Distribució de Bernoulli

- Funció de probabilitat:

$$\boxed{P[X = \mathrm{x}] = p^{\mathrm{x}}(1-p)^{1-\mathrm{x}} \quad , \quad \mathrm{X=1 \text{ ó } X=0}}$$

- Mitjana: $\mu = p$
- Variància: $\sigma^2 = p\,(1\text{-}p)$
- Com s'hi aprecia, en experiments en què el resultat és dicotòmic, la variable queda perfectament determinada coneixent el paràmetre **p**.

  X ~ Be(p), que es llegeix així: la va X segueix una distribució Bernoulli de paràmetre p.

b) Distribució binomial

- Si es repeteix un nombre fix de vegades, **n**, i de forma independent cada vegada, un fenomen de Bernoulli amb paràmetre **p**, la va que representa el nombre d'èxits obtinguts en les n repeticions segueix una distribució

  binomial de paràmetres (n,p).

  - X=nombre d'encerts en un test, que es respon a l'atzar, amb tres preguntes de dues respostes possibles (vertader o fals).

    Distribució de X: binomial(n=3,p=0,5) possibles valors de X=0,1,2,3

  - Segons dades de l'IET, el 40% dels turistes elegeix una determinada destinació turística per a les vacances. Per a un total de cinc turistes seleccionats a l'atzar, la variable aleatòria X representaria el nombre de turistes d'aquests cinc que elegirien aquesta destinació turística.

    Distribució de X: binomial(n=5,p=0,4) possibles valors de X=0,1,2,3,4,5

Distribució binomial

- Funció de probabilitat:

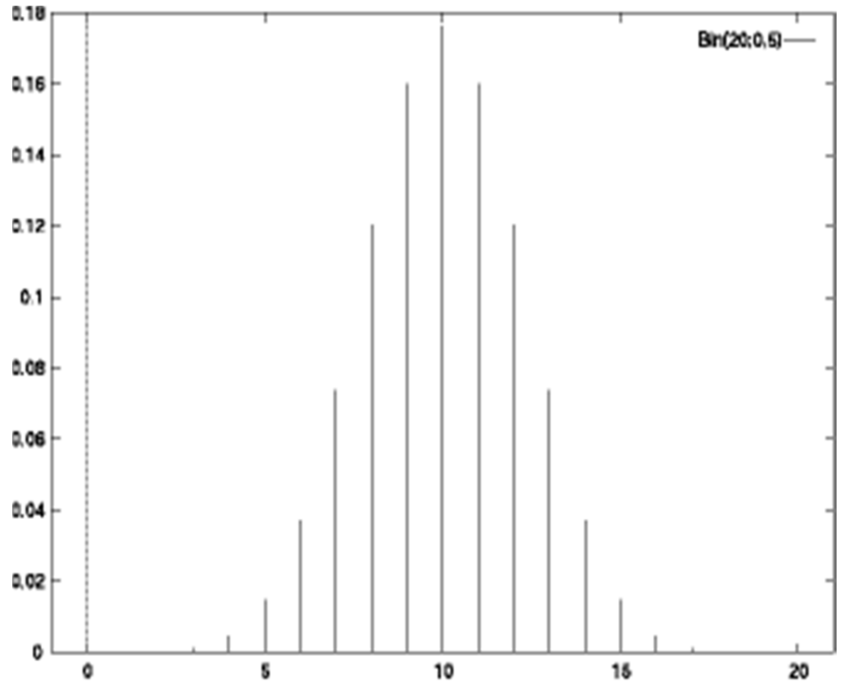
$$P[X = \mathrm{x}] = \binom{n}{\mathrm{x}} p^{\mathrm{x}} (1-p)^{\mathrm{n-x}} \quad , \quad \mathrm{X}=0,1,2,\ldots,\mathrm{n}$$

$$\binom{n}{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{n!}}{\mathrm{x!(n-x)!}}$$ es un nº combinatorio

  - Calculeu la probabilitat d'obtenir x èxits i n-x fracassos.
  - Problemes de càlcul si n és gran i/o p proper de 0 o 1.

- Mitjana: $\mu = \mathrm{n\ p}$

- Variància: $\sigma^2 = \mathrm{n\ p\ (1\text{-}p)}$



4. DISTRIBUCIÓ NORMAL

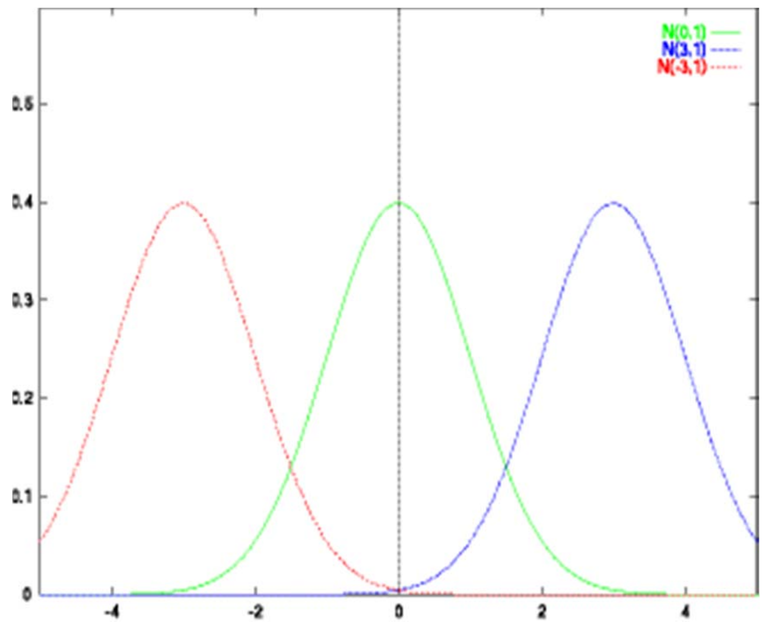
- És apropiada per a modelitzar:
  - Alçada, pes, coeficient d'intel·ligència…
  - Modelitza fenòmens socioeconòmics, com ara els ingressos, les vendes, els beneficis, etc.
  - Exemple: siga X una variable aleatòria que expressa la despesa anual en turisme i viatges, en euros, de les famílies valencianes. Se suposa que el comportament d'aquesta variable es pot modelitzar mitjançant una distribució normal amb una mitjana de 1.700 € i una desviació estàndard de 200€.
- Està caracteritzada per dos paràmetres: la mitjana, μ, i la desviació estàndard, σ (també pot ser la variància σ^2).
- La seua funció de densitat és:

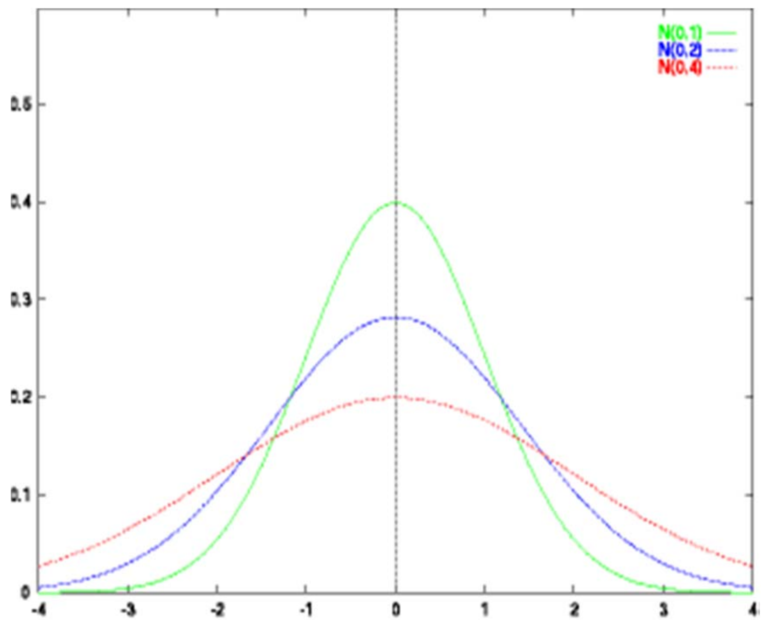
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

N(μ, σ): interpretació geomètrica

- Es pot interpretar la mitjana com un factor de translació.

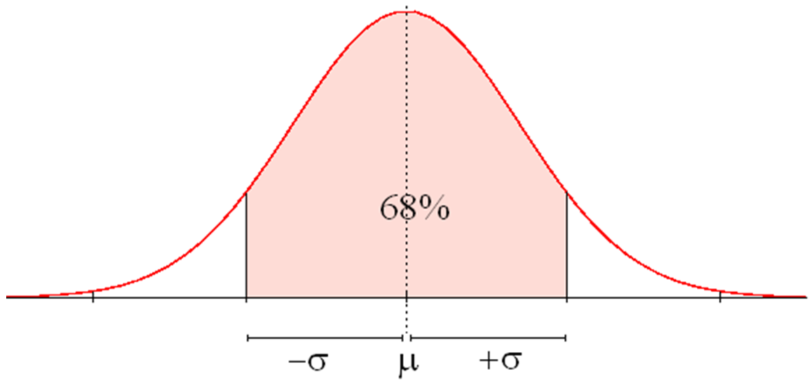
- I la desviació estàndard com un factor d'escala, grau de dispersió…



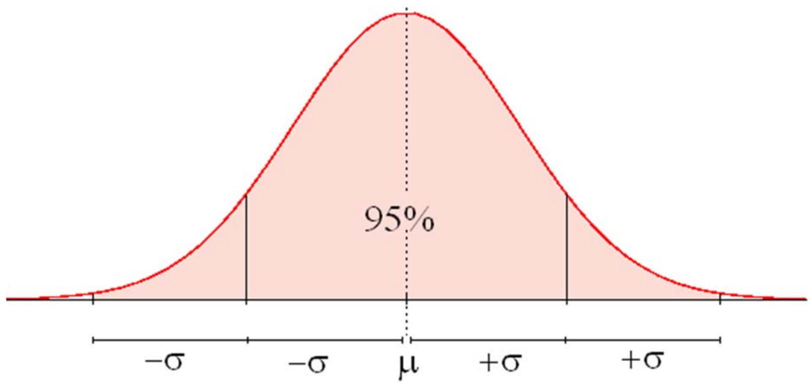


N(μ, σ): interpretació probabilista

- Entre la mitjana i una desviació estàndard tenim sempre la mateixa probabilitat: aprox. 68%



- Entre la mitjana i dues desviacions estàndard típiques: aprox. 95%



Algunes característiques de la normal

- La funció de densitat és simètrica respecte a la mitjana μ.
  - Mitjana, mediana i moda coincideixen.
- No és possible calcular la probabilitat d'un interval integrant simplement la funció de densitat, ja que no té primitiva expressable en termes de funcions 'comunes'. Per això utilitzarem unes taules.
- Totes les distribucions normals $N(\mu, \sigma^2)$ poden transformar-se mitjançant una transformació lineal especial que s'anomena tipificació. De la distribució resultant de tipificar, se'n diu **normal tipificada N(0,1)**. És una normal, però amb mitjana 0 i variància 1.
- Si considerem intervals centrats en μ, els extrems dels quals estan…
  - a distància **2 σ**, ➔ tenim probabilitat **95%**
  - a distància **σ**, ➔ tenim probabilitat **68%**
  - a distancia **2,5 σ**, ➔ tenim probabilitat **99%**

Tipificació

- Donada una variable X normal de mitjana μ i desviació típica σ, es denomina variable tipificada, **Z**, d'una observació x, la transformació de X següent:

$$\boxed{Z = \frac{X - \mu}{\sigma}}$$

- De la distribució resultant de tipificar, se'n diu **normal tipificada N(0,1)**. És una altra normal, però amb mitjana 0 i variància 1.
- En el cas de variable X normal, la interpretació és clara: assigna a tot valor de $N(\mu, \sigma^2)$ un valor de N(0,1), que deixa **exactament** la mateix probabilitat per davall.

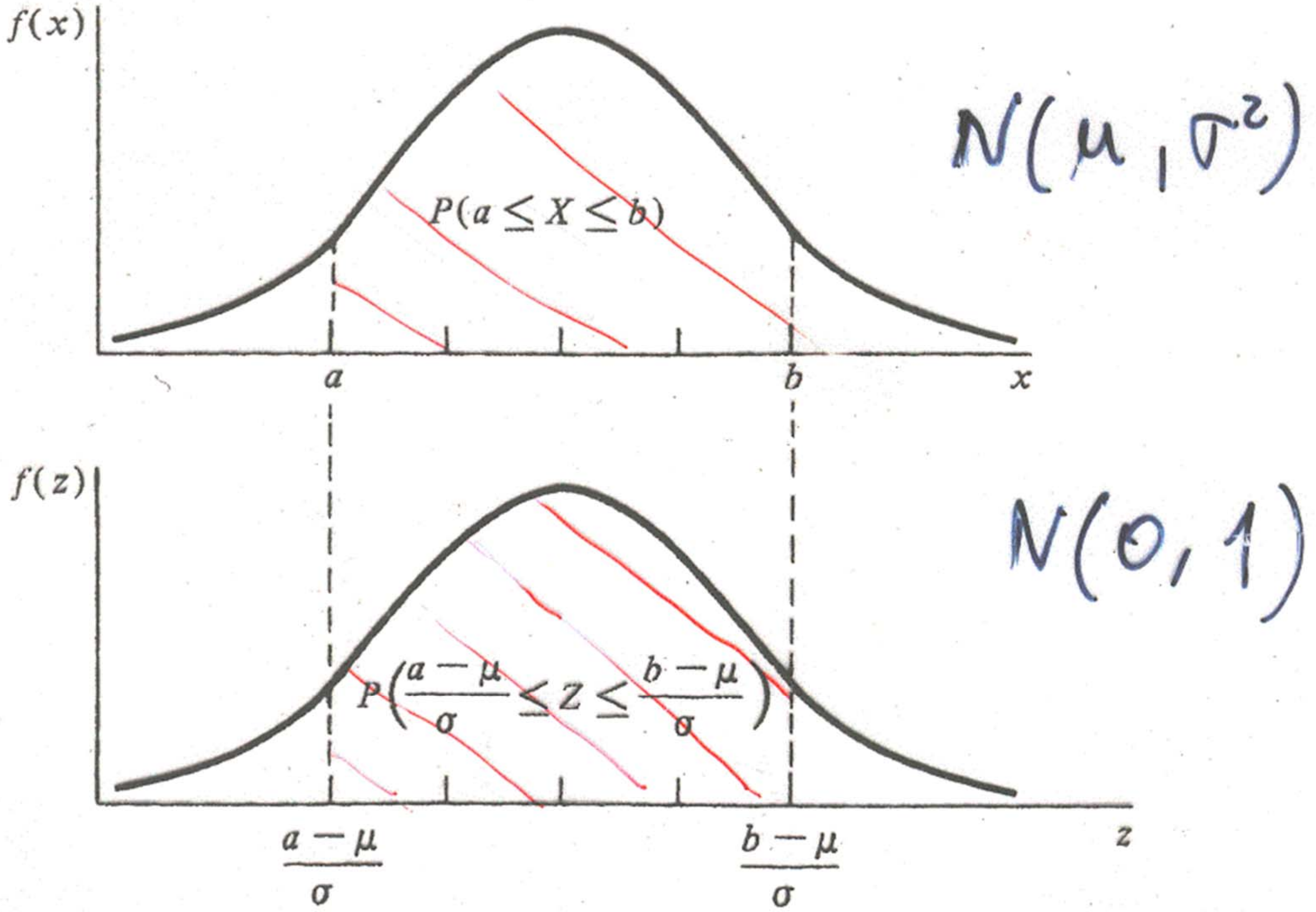


FIGURA 5.3 Correspondencia entre las probabilidades de X y de Z

Propietat de la distribució normal de les transformacions lineals

- Siga X una variable aleatòria amb distribució normal $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.
- Siga Y una transformació lineal de X: $Y = a X + b$.

- Aquesta propietat diu que tota variable aleatòria que siga una transformació lineal d'una variable aleatòria amb distribució normal, també té una distribució normal.
- És a dir, $Y = a X + b \sim N(\mu_Y = a\,\mu + b\,,\ \sigma_Y^2 = a^2\sigma^2)$

- Z, la variable X tipificada que té una distribució N(0,1), és un cas particular d'una transformació lineal de X, per això també té una distribució normal.

Més informació sobre aquest tema en:

- PARRA, E; CALERO, F. J.: *Estadística para turismo*, Ed. McGraw-Hill, Madrid, 2007. Capítol 9.
- ESTEBAN, J. i altres: *Estadística descriptiva y nociones de probabilidad*, Ed. Thomson. Segona impressió 2006. Capítols 7 i 8.
- MONTIEL, A. M.; RIUS, F.; BARÓN F. J.: *Elementos básicos de estadística económica y empresarial*, Ed. Prentice Hall, Madrid, 1997. Capítols 9, 10 i 11.
- RONQUILLO, A: *Estadística aplicada al sector turístico*, Ed Ramón Areces, Madrid, 1997. Capítol 10.
- http://www.uv.es/ceaces/base/probabilidad/simple.htm
  http://www.uv.es/ceaces/base/variable%20aleatoria/simple.htm
  http://www.uv.es/ceaces/base/modelos%20de%20probabilidad/simple.htm
  http://www.uv.es/ceaces/tex1t/1%20normal/simple.htm
- http://webpersonal.uma.es/de/J_SANCHEZ/Capitulo6.PDF