ISOMORFISMOS DE TIPO CURRY-HOWARD DE ORDEN SUPERIOR

Iniciación a la Investigación Matemática
Máster Universitario en Investigación Matemática

Enric Cosme Llópez

Departament de Matemàtiques
Universitat de València

BIBLIOGRAFÍA

J. Climent Vidal, E. Cosme Llópez. **From higher-order rewriting systems to higher-order categorial algebras and higher-order Curry-Howard isomorphisms**. ArXiv, abs/2402.12051, 2024.

Trabajo financiado por:

GENERALITAT VALENCIANA
Conselleria d'Educació, Universitats i Ocupació

CIAICO/2023/007

MINISTERIO DE CIENCIA, INNOVACIÓN Y UNIVERSIDADES
Cofinanciado por la Unión Europea
AGENCIA ESTATAL DE INVESTIGACIÓN

PID2024-159495NB-I00

Las matemáticas se **escriben**.
Calcular es **reescribir**.

SISTEMAS DE REESCRITURA

Un **sistema de reescritura** es una tupla ordenada $\boldsymbol{\mathcal{A}} = (\Sigma, X, \mathcal{A})$ donde

Σ es una signatura;

X es un conjunto de variables;

$\mathcal{A}$ es un conjunto de $\mathrm{T}_\Sigma(X)^2$.

Los elementos de $\mathcal{A}$ se llaman **reglas de reescritura**.

PATHS

Un **camino en $\mathcal{A}$** de longitud $m \in \mathbb{N}$ es

$$\mathfrak{P} = ((P_i)_{i \in m+1}, (\mathfrak{p}_i)_{i \in m}, (T_i)_{i \in m})$$

donde, para cada $i \in m$, si $\mathfrak{p}_i = (M_i, N_i)$, entonces

(1) $T_i(M_i) = P_i$; (2) $T_i(N_i) = P_{i+1}$.

$$\mathfrak{P}\colon P_0 \xrightarrow{(\mathfrak{p}_0, T_0)} P_1 \xrightarrow{(\mathfrak{p}_1, T_1)} \cdots \xrightarrow{(\mathfrak{p}_{m-2}, T_{m-2})} P_{m-1} \xrightarrow{(\mathfrak{p}_{m-1}, T_{m-1})} P_m$$

CAMINOS

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{P}:\ \oplus(x,\oplus(x,y)) &\xrightarrow{\ ((y,z),\,\oplus(x,\oplus(x,\_)))\ } \oplus(x,\oplus(x,z))\\
&\xrightarrow{\ ((\oplus(x,z),z),\,\oplus(x,\_))\ } \oplus(x,z)\\
&\xrightarrow{\ ((\oplus(x,z),\odot(\boxdot(z,x),z,\boxdot(x,x))),\,\_)\ } \odot(\boxdot(z,x),z,\boxdot(x,x))\\
&\xrightarrow{\ ((z,x),\,\odot(\boxdot(z,x),\_,\boxdot(x,x)))\ } \odot(\boxdot(z,x),x,\boxdot(x,x))\\
&\xrightarrow{\ ((\boxdot(z,x),y),\,\odot(\_,x,\boxdot(x,x)))\ } \odot(y,x,\boxdot(x,x))\\
&\xrightarrow{\ ((\boxdot(x,x),z),\,\odot(y,x,\_))\ } \odot(y,x,z)\\
&\xrightarrow{\ ((\odot(y,x,z),\top),\,\_)\ } \top
\end{aligned}
$$

CAMINOS

El problema de la palabra

En $G = \langle a, b \mid ab = ba \rangle$

$$\begin{aligned} babb^{-1}ab^{-1} &= baab^{-1} \\ &= abab^{-1} \\ &= a^2bb^{-1} \\ &= a^2. \end{aligned}$$

CAMINOS

Transformaciones elementales

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 18 \\ 2 & 3 & 23 \\ 0 & 2 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_1 = \frac{1}{2} f_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & 23 \\ 0 & 2 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2 = f_2 - 2 f_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3 = f_3 - 2 f_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

CAMINOS

Derivadas

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left[\cos(x^2+x)\right] &= (-\sin(x^2+x))\frac{\partial}{\partial x}\left[x^2+x\right] \\
&= -\sin(x^2+x)\left(\frac{\partial}{\partial x}\left[x^2\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[x\right]\right) \\
&= -\sin(x^2+x)(2x+1).
\end{aligned}
$$

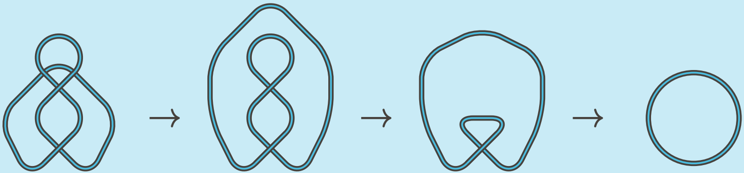
CAMINOS

Demostraciones por Deducción Natural

$$\dfrac{P \lor Q \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P]}{[\neg Q]}}{P \qquad \neg P}}{\bot}}{\neg\neg Q}}{Q}}{P \to Q} \qquad \dfrac{\dfrac{[Q]}{Q}}{Q \to Q}}{Q}$$

CAMINOS

Movimientos de Reidemeister



LA PREGUNTA PRINCIPAL

¿Bajo qué condiciones pueden dos sistemas de reescritura considerarse **equivalentes**?

COMPOSICIÓN

Los caminos se pueden componer.

Si $\mathfrak{P}\colon P \longrightarrow Q$ y $\mathfrak{Q}\colon Q \longrightarrow R$, entonces $\mathfrak{Q} \circ \mathfrak{P}\colon P \longrightarrow R$.

La composición es una operación binaria parcial.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Pth}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} \arrow[r, shift left=2, "\mathrm{sc}"] \arrow[r, shift right=2, "\mathrm{tg}"'] & \mathrm{T}_{\Sigma}(X) \arrow[l, "\mathrm{ip}" description] \end{tikzcd}$$

Denotamos por $\mathbf{Pth}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ a la categoría cuyos objetos son términos y cuyos morfismos son caminos.

DESCOMPOSICIÓN

Los caminos se pueden descomponer.

Si $\mathfrak{p} = (M, N)$ es una regla de reescritura en $\mathcal{A}$, su **escalón** asociado es el camino de longitud 1

$$\mathrm{Ech}(\mathfrak{p}) : M \xrightarrow{(\mathfrak{p},\_)} N$$

Diremos que un camino tiene escalones si alguno de sus subcaminos de longitud 1 es un escalón.

DESCOMPOSICIÓN

Ejemplo

$$
\begin{array}{rcl}
\mathfrak{P}:\ \oplus(x, \oplus(x, y)) & \to & \oplus(x, \oplus(x, z)) \\
 & \to & \oplus(x, z) \\
\text{escalón} & \to & \odot(\boxdot(z, x), z, \boxdot(x, x)) \\
 & \to & \odot(\boxdot(z, x), x, \boxdot(x, x)) \\
 & \to & \odot(y, x, \boxdot(x, x)) \\
 & \to & \odot(y, x, z) \\
\text{escalón} & \to & \top
\end{array}
$$

Proposición. Los caminos sin escalones son caminos entre términos complejos y homogéneos.

DESCOMPOSICIÓN

Ejemplo

$$\begin{array}{ccccccc}
\odot(& \boxdot(z,x) & , & z & , & \boxdot(x,x) &) \\
 & \| & & \downarrow & & \| & \\
\odot(& \boxdot(z,x) & , & x & , & \boxdot(x,x) &) \\
 & \downarrow & & \| & & \| & \\
\odot(& y & , & x & , & \boxdot(x,x) &) \\
 & \| & & \| & & \downarrow & \\
\odot(& y & , & x & , & z &)
\end{array}$$

Proposición. En un camino sin escalones podemos extraer tantos subcaminos como la aridad de la operación.

DESCOMPOSICIÓN

Denotamos por $\prec$ a la relación binaria en $\mathrm{Pth}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ definida por $\mathfrak{Q} \prec \mathfrak{P}$ si

i. $\mathfrak{P}$ tiene longitud estrictamente mayor a 1, tiene su primer escalón en la posición i y $\mathfrak{Q}$ es el subcamino inicial precediendo estrictamente al escalón o el subcamino final conteniendo al escalón; o

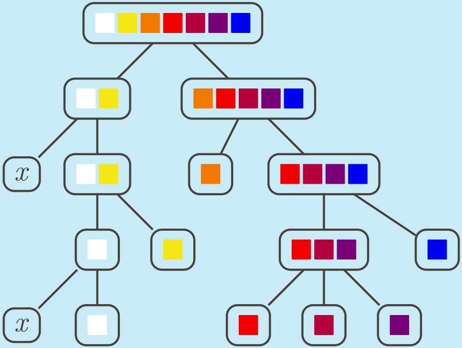
ii. $\mathfrak{P}$ es una camino no-identidad sin escalones y $\mathfrak{Q}$ es uno de los subcaminos extraídos de $\mathfrak{P}$.

Denotamos por $\leq$ a la clausura reflexivo-transitiva de $\prec$.

Proposición. $\leq$ es un orden Artiniano en $\mathrm{Pth}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ cuyos elementos minimales son caminos identidad y escalones.

DESCOMPOSICIÓN

Ejemplo



SIGNATURA CATEGORIAL

Definimos la **signatura categorial** determinada por el sistema de reescritura $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ como la signatura que amplía Σ con

i. las reglas de reescritura en $\mathcal{A}$ como constantes;
ii. dos operaciones unarias sc y tg;
iii. una operación binaria $\circ$.

Denotaremos esta signatura por $\Sigma^{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$.

LA APLICACIÓN DE CURRY-HOWARD

La aplicación de Curry-Howard se define por **recursión Artiniana**

$$\mathrm{CH}\colon \mathrm{Pth}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} \longrightarrow \mathrm{T}_{\Sigma^{\boldsymbol{\mathcal{A}}}}(X)$$

1. Para caminos minimales

$$\mathrm{CH}(\mathrm{ip}(P)) = P; \qquad \mathrm{CH}(\mathrm{Ech}(\mathfrak{p})) = \mathfrak{p}.$$

2. Para caminos no-minimales

$$\mathrm{CH}(\mathfrak{P}) = \begin{cases} \mathrm{CH}(\mathfrak{P}^{i,|\mathfrak{P}|-1}) \circ \mathrm{CH}(\mathfrak{P}^{0,i-1}); \\ \sigma((\mathrm{CH}(\mathfrak{Q}_j))_{j\in n}). \end{cases}$$

LA APLICACIÓN DE CURRY-HOWARD

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{P}:\ \oplus(x, \oplus(x, y)) &\to \oplus(x, \oplus(x, z)) \\
&\to \oplus(x, z) \\
&\to \odot(\boxdot(z, x), z, \boxdot(x, x)) \\
&\to \odot(\boxdot(z, x), x, \boxdot(x, x)) \\
&\to \odot(y, x, \boxdot(x, x)) \\
&\to \odot(y, x, z) \\
&\to \top
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{CH}(\mathfrak{P}) = ((\blacksquare \circ (\odot(\blacksquare, \blacksquare, \blacksquare))) \circ \blacksquare) \circ (\oplus(x, \blacksquare \circ \oplus(x, \blacksquare)))
$$

EL ÁLGEBRA DE CAMINOS

Proposición. El conjunto $\mathrm{Pth}_{\mathcal{A}}$ tiene estructura de $\Sigma^{\mathcal{A}}$-álgebra parcial, que denotaremos por $\mathbf{Pth}_{\mathcal{A}}$, donde las operaciones están dadas por

$$\mathbf{sc}(\mathfrak{P}) = \mathrm{ip}(\mathrm{sc}(\mathfrak{P})); \qquad \mathbf{tg}(\mathfrak{P}) = \mathrm{ip}(\mathrm{tg}(\mathfrak{P}));$$

$$\boldsymbol{\mathfrak{p}} = \mathrm{Ech}(\mathfrak{p}); \qquad \mathfrak{Q} \mathbin{\boldsymbol{\circ}} \mathfrak{P} = \mathfrak{Q} \circ \mathfrak{P}.$$

EL ÁLGEBRA DE CAMINOS

Si $\sigma \in \Sigma_n$ y $(\mathfrak{P}_j)_{j\in n} \in \mathrm{Pth}^n_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$, entonces

$$\boldsymbol{\sigma}((\mathfrak{P}_j)_{j\in n}) : \begin{array}{lcccccccc}
\sigma(& \mathrm{sc}(\mathfrak{P}_0) & , & \mathrm{sc}(\mathfrak{P}_1) & , & \cdots & , & \mathrm{sc}(\mathfrak{P}_{n-1}) &) \\
 & \downarrow\mathfrak{P}_0 & & \| & & & & \| & \\
\sigma(& \mathrm{tg}(\mathfrak{P}_0) & , & \mathrm{sc}(\mathfrak{P}_1) & , & \cdots & , & \vdots &) \\
 & \| & & \downarrow\mathfrak{P}_1 & & & & \| & \\
\sigma(& \vdots & , & \mathrm{tg}(\mathfrak{P}_1) & , & \ddots & , & \mathrm{sc}(\mathfrak{P}_{n-1}) &) \\
 & \| & & \| & & & & \downarrow\mathfrak{P}_{n-1} & \\
\sigma(& \mathrm{tg}(\mathfrak{P}_0) & , & \mathrm{tg}(\mathfrak{P}_1) & , & \cdots & , & \mathrm{tg}(\mathfrak{P}_{n-1}) &)
\end{array}$$

Proposición. $\sigma((\mathfrak{P}_j)_{j\in n})$ es un camino sin escalones.

EL NÚCLEO DE LA APLICACIÓN DE CURRY-HOWARD

Proposición. $\mathrm{Ker}(\mathrm{CH})$ es una $\Sigma^{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$-congruencia cerrada.

El cociente $\mathrm{Pth}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}/\mathrm{Ker}(\mathrm{CH})$ será denotado por $[\mathrm{Pth}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}]$ y la clase de un camino $\mathfrak{P}$ será denotada por $[\mathfrak{P}]$.

EL COCIENTE DE CAMINOS

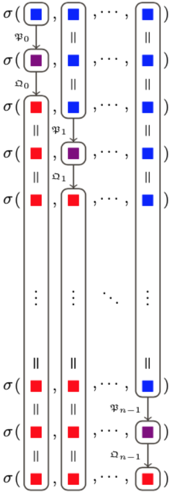
El cociente $[\mathrm{Pth}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}]$ tiene estructura de $\Sigma^{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$**-álgebra parcial, conjunto parcialmente ordenado, y categoría**.

Además, las operaciones $\sigma \in \Sigma$ de aridad n son **funtores** de $[\mathrm{Pth}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}]^n$ en $[\mathrm{Pth}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}]$, ya que

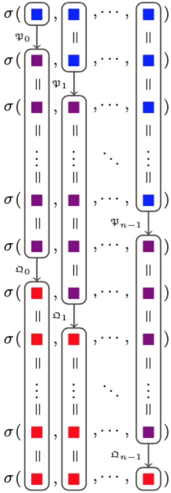
$$\begin{aligned}
\mathbf{sc}\left(\sigma\left(([\mathfrak{P}_j])_{j\in n}\right)\right) &= \sigma\left((\mathbf{sc}\,([\mathfrak{P}_j]))_{j\in n}\right)\\
\mathbf{tg}\left(\sigma\left(([\mathfrak{P}_j])_{j\in n}\right)\right) &= \sigma\left((\mathbf{tg}\,([\mathfrak{P}_j]))_{j\in n}\right)\\
\sigma\left(([\mathfrak{Q}_j]\circ[\mathfrak{P}_j])_{j\in n}\right) &= \sigma\left(([\mathfrak{Q}_j])_{j\in n}\right)\circ\sigma\left(([\mathfrak{P}_j])_{j\in n}\right)
\end{aligned}$$

Esto es lo que en el trabajo llamamos Σ**-álgebra categorial** y que denotamos por $[\mathbf{Pth}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}]$.

EL COCIENTE DE CAMINOS



$\sigma((\mathfrak{Q}_j \circ \mathfrak{P}_j)_{j\in n})$



$\sigma((\mathfrak{Q}_j)_{j\in n}) \circ \sigma((\mathfrak{P}_j)_{j\in n})$

UN RESULTADO DE TIPO CURRY-HOWARD

Teorema. Existen un par de aplicaciones mútuamente inversas

$$[\mathbf{Pth}_{\mathcal{A}}] \underset{\mathrm{ip}^{\mathrm{fc}}}{\overset{\mathrm{CH}}{\rightleftarrows}} [\mathbf{PT}_{\mathcal{A}}] \quad (\cong)$$

- isomorfismos de $\Sigma^{\mathcal{A}}$-álgebras;
- isomorfismos de órden;
- isomorfismos de categorías.

CAMINOS DE SEGUNDO ORDEN

Este proceso se puede **iterar**.

Un camino de segundo orden $\mathfrak{P}^{(2)}$ tiene la forma

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, bend left, "\mathfrak{P}"{name=U}] \arrow[r, bend right, "\mathfrak{Q}"'{name=D}] & Q \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\mathfrak{P}^{(2)}"] \end{tikzcd}$$

Recuperamos los resultados anteriores en orden dos.

RESULTADOS DE SEGUNDO ORDEN

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\mathbf{T}_{\Sigma}(X)} \arrow[d, dashed, "\mathrm{ip}^{([1],0)\sharp}"] \\
{[\mathbf{Pth}_{\mathscr{A}}]} \arrow[u, shift left=3, "\mathrm{sc}^{(0,[1])}"] \arrow[u, shift right=3, "\mathrm{tg}^{(0,[1])}"'] \arrow[d, shift right=2, "\mathrm{CH}^{[1]}"'] \arrow[d, phantom, "\cong"] \\
{[\mathbf{PT}_{\mathscr{A}}]} \arrow[u, shift right=2, "\mathrm{ip}^{([1],X)@}"'] \arrow[d, dashed, "\mathrm{ip}^{([\![2]\!],[1])\sharp}"] \\
{[\![\mathbf{Pth}_{\mathscr{A}^{(2)}}]\!]} \arrow[u, shift left=3, "\mathrm{sc}^{([1],[\![2]\!])}"] \arrow[u, shift right=3, "\mathrm{tg}^{([1],[\![2]\!])}"'] \arrow[d, shift right=2, "\mathrm{CH}^{[\![2]\!]}"'] \arrow[d, phantom, "\cong"] \\
{[\![\mathbf{PT}_{\mathscr{A}^{(2)}}]\!]} \arrow[u, shift right=2, "\mathrm{ip}^{([\![2]\!],X)@}"']
\end{tikzcd}
$$

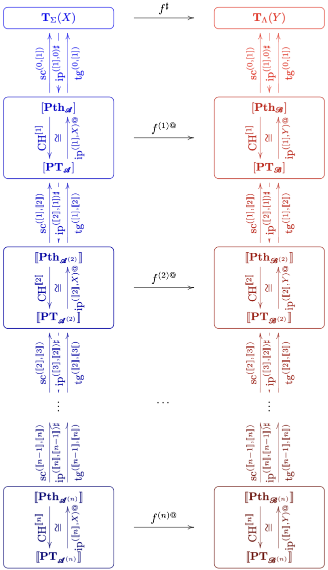
RESULTADOS DE ORDEN n

$$
\begin{tikzcd}[row sep=large]
\mathbf{T}_{\Sigma}(X) \arrow[d, dashed, "\mathrm{ip}^{([1],0)\sharp}" description] \\
{[\mathbf{Pth}_{\mathscr{A}}]} \arrow[u, shift left=2, "\mathrm{sc}^{(0,[1])}"] \arrow[u, shift right=2, "\mathrm{tg}^{(0,[1])}"'] \arrow[d, shift right=2, "\mathrm{CH}^{[1]}"'] \arrow[d, phantom, "\cong"] \\
{[\mathbf{PT}_{\mathscr{A}}]} \arrow[u, shift right=2, "\mathrm{ip}^{([1],X)@}"'] \arrow[d, dashed, "\mathrm{ip}^{(\llbracket 2\rrbracket,[1])\sharp}" description] \\
\llbracket \mathbf{Pth}_{\mathscr{A}^{(2)}} \rrbracket \arrow[u, shift left=2, "\mathrm{sc}^{([1],\llbracket 2\rrbracket)}"] \arrow[u, shift right=2, "\mathrm{tg}^{([1],\llbracket 2\rrbracket)}"'] \arrow[d, shift right=2, "\mathrm{CH}^{\llbracket 2\rrbracket}"'] \arrow[d, phantom, "\cong"] \\
\llbracket \mathbf{PT}_{\mathscr{A}^{(2)}} \rrbracket \arrow[u, shift right=2, "\mathrm{ip}^{(\llbracket 2\rrbracket,X)@}"'] \arrow[d, dashed, "\mathrm{ip}^{(\llbracket 3\rrbracket,\llbracket 2\rrbracket)\sharp}" description] \\
\vdots \arrow[u, shift left=2, "\mathrm{sc}^{(\llbracket 2\rrbracket,\llbracket 3\rrbracket)}"] \arrow[u, shift right=2, "\mathrm{tg}^{(\llbracket 2\rrbracket,\llbracket 3\rrbracket)}"'] \arrow[d, dashed, "\mathrm{ip}^{(\llbracket n\rrbracket,\llbracket n-1\rrbracket)\sharp}" description] \\
\llbracket \mathbf{Pth}_{\mathscr{A}^{(n)}} \rrbracket \arrow[u, shift left=2, "\mathrm{sc}^{(\llbracket n-1\rrbracket,\llbracket n\rrbracket)}"] \arrow[u, shift right=2, "\mathrm{tg}^{(\llbracket n-1\rrbracket,\llbracket n\rrbracket)}"'] \arrow[d, shift right=2, "\mathrm{CH}^{\llbracket n\rrbracket}"'] \arrow[d, phantom, "\cong"] \\
\llbracket \mathbf{PT}_{\mathscr{A}^{(n)}} \rrbracket \arrow[u, shift right=2, "\mathrm{ip}^{(\llbracket n\rrbracket,X)@}"']
\end{tikzcd}
$$

TRABAJO FUTURO

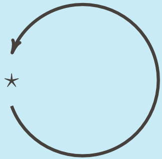
1. Morfismos entre sistemas de reescritura.
2. Torres de sistemas de reescritura
3. Límites proyectivos de sistemas de reescritura
4. Espacios de clasificación
5. Algebroides fundamentales.

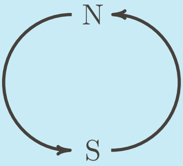
MORFISMOS DE SISTEMAS DE REESCRITURA



Dos sistemas de reescritura

$$\mathbb{S}^1 = \begin{cases} X &= \{\star\} \\ \Sigma &= \varnothing \\ \mathcal{A} &= \{(\star,\star)\} \end{cases} \qquad \mathbb{SI} = \begin{cases} Y &= \{\mathrm{N},\mathrm{S}\} \\ \Gamma &= \varnothing \\ \mathcal{B} &= \{(\mathrm{N},\mathrm{S}),(\mathrm{S},\mathrm{N})\} \end{cases}$$



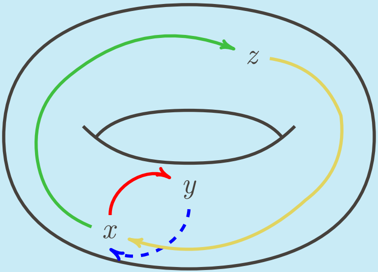


Una simulación de $\mathbb{S}^1$

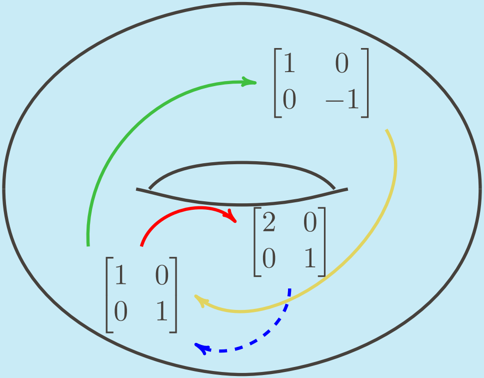
$$
\begin{tikzcd}
& \sin(x) \arrow[dr, bend left, "\frac{\partial}{\partial x}"] & \\
-\cos(x) \arrow[ur, bend left, "\frac{\partial}{\partial x}"] & & \cos(x) \arrow[dl, bend left, "\frac{\partial}{\partial x}"] \\
& -\sin(x) \arrow[ul, bend left, "\frac{\partial}{\partial x}"] &
\end{tikzcd}
$$

Una especificación para $\mathbb{T}^2$

$$\mathbb{T}^2 = \begin{cases} X & = & \{x, y, z\} \\ \Sigma & = & \varnothing \\ \mathcal{A} & = & \{\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}, \mathfrak{s}\} \\ \mathcal{A}^{(2)} & = & \{((\mathfrak{s} \circ \mathfrak{r}) \circ (\mathfrak{q} \circ \mathfrak{p}), (\mathfrak{q} \circ \mathfrak{p}) \circ (\mathfrak{s} \circ \mathfrak{r}))\} \end{cases}$$



Una simulación de $\mathbb{T}^2$



$$(-f_2 \circ -f_2) \circ \left(\tfrac{1}{2} f_1 \circ 2 f_1\right) = \left(\tfrac{1}{2} f_1 \circ 2 f_1\right) \circ (-f_2 \circ -f_2)$$

¿Podemos demostrar **propiedades topológicas** utilizando sistemas de reescritura?

- $\mathbb{T}^2 \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.
- $\pi_1\left(\mathbb{T}^2\right) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.
- $\mathbb{T}^2$ es orientable.
- $\ldots$

La possibilité de la traduction implique l'existence d'un invariant. Traduire, c'est précisément dégager cet invariant.

—H. Poincaré.

Gracias!