



Treball Fi de Grau – Curs 2024/2025

Adjuncions

Autor: **Altair Escrihuela Peñarrocha**

Tutor: ENRIC COSME LLÓPEZ

Índex

1	Introducció	1
2	Definicions fonamentals	3
2.1	Categories	3
2.2	Funtors	6
2.3	Transformacions naturals	9
2.3.1	Composicions de transformacions naturals	11
3	Adjuncions	19
3.1	Propietat universal	24
3.2	Composició d'adjuncions	29
3.3	Morfisme d'adjuncions	31
4	Exemples d'adjuncions	35
4.1	Adjuncions en conjunts preordenats	35
4.1.1	Un exemple concret	38
4.2	Monoides lliures	39
5	Mònades	47
5.1	Categoria de Kleisli d'una mònada	50
5.2	Categoria d'àlgebres d'Eilenberg-Moore d'una mònada	56
5.3	La categoria d'adjuncions	61
6	Conclusions	71

Capítol 1

Introducció

La teoria de categories va nèixer en 1945. Els seus pares foren Samuel Eilenberg i Saunders Mac Lane. El seu objectiu original era formalitzar de manera sistemàtica les relacions entre diverses construccions matemàtiques que apareixien en la teoria d'homologia. El que inicialment va sorgir com una eina auxiliar va acabar convertint-se, amb el temps, en un marc conceptual profund que permet descriure i analitzar estructures matemàtiques de forma unificada i altament abstracta.

Actualment, la teoria de categories s'ha convertit en una eina central dins les matemàtiques pures, gràcies a la seua capacitat d'unificar conceptes i estructures procedents de camps molt diversos. Aquesta visió abstracta es va vore profundament enriquida pel treball d'Alexandre Grothendieck en geometria algebraica, així com pel desenvolupament de la lògica categòrica i la teoria dels topoi. Aquests avanços van establir les bases d'un llenguatge universal que avui continua tenint un paper fonamental en àrees com l'àlgebra homològica, la geometria, la teoria de la demostració i els fonaments de les matemàtiques.

Des d'una perspectiva purament matemàtica, la teoria de categories ofereix un canvi de punt de vista: en lloc d'estudiar els objectes en si mateixos, posa l'èmfasi en les relacions entre ells, és a dir, en els morfismes. Aquest punt de vista relacional i estructural ha resultat ser no sols elegant, sinó també extremadament eficaç per a detectar patrons comuns entre diferents teories i per a construir noves nocions a partir de principis generals.

El present treball de fi de grau té com a objectiu proporcionar una introducció rigorosa als conceptes fonamentals de la teoria de categories, amb especial atenció a les situacions d'adjunció entre dues categories. Es presentaran les nocions bàsiques de categoria, funtor i transformació natural, i s'exploraran construccions essencials com les adjuncions i les mònades.

Per a l'elaboració d'aquest treball, he comptat principalment amb tres fonts de referència. D'una banda, el clàssic *Categories for the Working Mathematician* de Saunders Mac Lane [Mac98], que ha servit com a base per a les definicions i resultats formals. D'altra banda, el text *Category Theory in Context* d'Emily Riehl [Rie17] m'ha resultat especi-

alment útil per a comprendre millor els conceptes gràcies a la seua exposició més clara i contextualitzada. Finalment, l'obra *Introduction to Higher Order Categorical Logic* de Lambek i Scott [LS88] ha proporcionat una perspectiva més lligada a la lògica i m'ha estat especialment útil en l'elaboració de les demostracions del capítol dedicat a les mònades.

Vull destacar la tasca d'Enric Cosme, director d'aquest treball, per la seua guia i dedicació al llarg del procés, així com per l'ajuda que m'ha brindat a l'hora d'entendre les lliçons i aprofundir en els conceptes claus de la teoria.

El treball s'organitza com segueix: en el Capítol 2 s'introdueixen les definicions bàsiques de categories, functors i transformacions naturals. El Capítol 3 aprofundeix en les adjuncions. En el Capítol 4 vorem alguns exemples claus on les adjuncions ens ajuden a deduir propietats molt importants, amb un exemple imprescindible en teoria de l'ordre i un altra adjunció entre monoides i conjunts, amb la descripció dels monoides lliures, que és fàcilment extensible a qualsevol situació algebraica. El Capítol 5 tracta sobre la forta relació que mantenen les mònades amb les adjuncions. Finalment, el Capítol 6 presenta les conclusions més importants de tot el document, així com possibles direccions per a estudis posteriors.

Capítol 2

Definicions fonamentals

Aquest primer capítol té com a objectiu introduir els conceptes fonamentals de la teoria de categories: les nocions de categoria, funtor i transformació natural. A cadascuna de les tres seccions del capítol ens centrarem en un d'aquests conceptes, presentant-ne les definicions i proposicions més rellevants per al desenvolupament de la resta del document.

2.1 Categories

Informalment, una categoria és una estructura formada per objectes i fletxes entre aquests objectes, que anomenarem morfismes, i que satisfan certes propietats. L'objectiu d'aquesta definició és ser tan general com calga per a incloure una gran varietat de mons matemàtics, tot preservant les característiques comunes que ens permeten parlar d'ells de manera unificada.

Definició 2.1 (Categoria). Una categoria $\mathbf{C}$ està composta per una col·lecció d'objectes, que denotarem per $\text{Ob}(\mathbf{C})$ i, per a cada x, y , objectes en $\text{Ob}(\mathbf{C})$, una col·lecció de morfismes d' x en y , que denotarem per $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(x, y)$, satisfent que

- Els morfismes es poden compondre i la composició és associativa.

Si $x, y, z \in \text{Ob}(\mathbf{C})$, $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(x, y)$ i $g \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(y, z)$, aleshores existeix $(g \circ f) \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(x, z)$. A més, si $x, y, z, t \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ i $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(x, y)$, $g \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(y, z)$ i $h \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(z, t)$, aleshores

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

- Existència de morfisme identitat que actua d'element neutre per a la composició.

Per a cada objecte $x \in \text{Ob}(\mathbf{C})$, existeix un morfisme $\text{id}_x \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(x, x)$ satisfent que és element neutre per a la composició de morfismes. És a dir, per a tot $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(x, y)$ es té que

$$f \circ \text{id}_x = f = \text{id}_y \circ f.$$

Notem que aquesta definició és prou general per englobar els exemples d'estructures algebraiques. Per exemple, podem considerar **Set**, la categoria dels conjunts, on els objectes són conjunts i els morfismes són aplicacions entre conjunts. De manera anàloga, podem considerar categories com **Mon** (monoides), **Grp** (grups), **Fld** (cossos), **Vect** (espais vectorials), totes elles amb els respectius homomorfismes, entre moltes altres.

Ara bé, és important remarcar que el concepte de categoria va molt més enllà d'aquest tipus d'estructures. Els objectes no han de ser necessàriament conjunts, ni els morfismes han de correspondre a funcions entre ells. Aquesta flexibilitat la veurem reflectida més endavant amb exemples concrets, però ja podem avançar-ne un de senzill: considerem una categoria on els objectes són els nombres naturals, i els morfismes de n a m (quan $n \leq m$) són els subconjunts del conjunt $n, n+1, \dots, m$. Si $n \geq m$, no hi ha morfismes. La composició es defineix com la unió de subconjunts. Es convida el lector a comprovar que aquesta construcció defineix efectivament una categoria.

Nota 2.1. *En la Definició 2.1 hem emprat el terme “col·lecció”. Tot i que no entrarem en una exposició més formal d'aquest concepte, cal remarcar que, en el context d'aquest document, és suficient adoptar una visió intuïtiva segons la qual una col·lecció es pot entendre com una generalització del concepte de conjunt. A diferència dels conjunts en sentit estricte, les col·leccions ens permeten considerar categories com **Set**. Bastarà prendre un univers de discurs que ens permeti limitar la cardinalitat de les col·leccions d'objectes i morfismes sota consideració.*

A continuació, presentem algunes definicions fonamentals en el marc de la teoria de categories.

Definició 2.2 (Localment petita). Una categoria $\mathcal{C}$ és localment petita si per a tots $x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ es té que $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ és un conjunt.

Definició 2.3 (Petita). Una categoria $\mathcal{C}$ és petita si és localment petita i $\text{Ob}(\mathcal{C})$ també és un conjunt.

Definició 2.4 (Subcategoria). Si $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ categories, $\mathcal{D}$ és una subcategoria de $\mathcal{C}$ si $\text{Ob}(\mathcal{D}) \subseteq \text{Ob}(\mathcal{C})$, per a tots $x, y \in \text{Ob}(\mathcal{D})$, $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(x, y) \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ i la composició de morfismes en $\mathcal{D}$ és la mateixa que la composició de morfismes en $\mathcal{C}$.

A continuació introduïm el concepte de la categoria oposada.

Definició 2.5 (Categoria oposada). Siga $\mathcal{C}$ una categoria, definim la categoria oposada a $\mathcal{C}$ com la categoria $\mathcal{C}^{\text{op}}$ tal que $\text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}}) = \text{Ob}(\mathcal{C})$ i per a tots $x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$,

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(x, y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, x).$$

On la composició es defineix com segueix, si $x, y, z \in \text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}})$, $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(x, y)$ i $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(y, z)$, llavors,

$$g \circ^{\text{op}} f = f \circ g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(z, x) = \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(x, z)$$

On $\circ^{\text{op}}$ denota la composició en la categoria $\mathbf{C}^{\text{op}}$ i $\circ$ la composició en $\mathbf{C}$.

A continuació definirem alguns objectes especials, que es distingeixen perquè hi ha (com a molt) un únic morfisme entre ells i qualsevol altre objecte de la categoria.

Definició 2.6 (Objecte inicial, objecte final i objecte zero).

Siga $\mathbf{C}$ una categoria, diem que $i \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ és un objecte inicial si per a tot $x \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ existeix un únic $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(i, x)$.

També diem que $t \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ és un objecte final si per a tot $x \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ existeix un únic $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(x, t)$.

Un objecte és objecte zero si és final i inicial alhora.

A continuació introduïm el concepte d'isomorfisme.

Definició 2.7 (Isomorfires). Siga $\mathbf{C}$ una categoria, $x, y \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ objectes de $\mathbf{C}$ i $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(x, y)$ un morfisme de x en y . Direm que f és un *isomorfisme* si existeix $g \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(y, x)$ tal que

$$g \circ f = \text{id}_x \quad \text{i} \quad f \circ g = \text{id}_y$$

En aquest cas denotarem a g com f^{-1} i l'anomenarem l'invers d' f .

Ara veurem que, com en qualsevol altra estructura algebraica, els isomorfismes tenen un únic invers. Per això, la notació f^{-1} té sentit i és consistent.

Proposició 2.1 (Unicitat d'invers). Siga $\mathbf{C}$ una categoria, $x, y \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ objectes de $\mathbf{C}$ i $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(x, y)$ un isomorfisme, llavors hi ha un únic morfisme $g \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(y, x)$ que siga l'invers d' f . A més, g també serà isomorfisme i $g^{-1} = f$.

Demostració. Siguen $g_1, g_2 \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(y, x)$ tals que per a tot $i \in \{1, 2\}$,

$$g_i \circ f = \text{id}_x \quad \text{i} \quad f \circ g_i = \text{id}_y$$

llavors, notem que

$$g_1 = g_1 \circ \text{id}_y = g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 = \text{id}_x \circ g_2 = g_2$$

I, per tant, tenim la unicitat com volíem vore, el que fa que la notació f^{-1} tinga sentit. Si denotem $g = f^{-1}$, g és isomorfisme i $g^{-1} = f$ de forma directa per la definició d'isomorfisme. $\square$

Ara que ja hem vist la unicitat, veurem una altra propietat típica de les estructures algebraiques: l'invers d'una composició és la composició dels inversos, però en l'ordre contrari.

Proposició 2.2 (La composició d'isomorfismes és isomorfisme). *Siga $\mathcal{C}$ una categoria, $x, y, z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ objectes de $\mathcal{C}$, $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ i $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z)$ dos isomorfismes, llavors $g \circ f$ és isomorfisme i*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Demostració. Sols hem de comprovar que

$$f^{-1} \circ g^{-1} \circ (g \circ f) = \text{id}_x \quad \text{i} \quad (g \circ f) \circ f^{-1} \circ g^{-1} = \text{id}_z$$

Fem primer l'equació de l'esquerra. Per l'associativitat de $\circ$, tenim que,

$$f^{-1} \circ g^{-1} \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ \text{id}_y \circ f = f^{-1} \circ f = \text{id}_x$$

Ja que id_y és neutre per a la composició.

Fem l'altra equació de manera anàloga,

$$(g \circ f) \circ f^{-1} \circ g^{-1} = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ \text{id}_y \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \text{id}_z$$

Així, queda provat que $g \circ f$ és isomorfisme i $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. □

2.2 Funtors

Els functors són aplicacions estructurades que permeten establir una correspondència entre categories. De manera anàloga a com un morfisme relaciona objectes dins d'una categoria preservant-ne l'estructura, un functor pot considerar-se com una correspondència entre categories, ja que assigna a cada objecte i morfisme d'una categoria un objecte i un morfisme d'una altra, tot preservant la composició i les identitats.

Definició 2.8 (Funtors). Siguen $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ categories, un functor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ és una assignació que envia objectes x de $\mathcal{C}$ en objectes $F(x)$ de $\mathcal{D}$ i morfismes $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ de $\mathcal{C}$ en morfismes $F(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(x), F(y))$ de $\mathcal{D}$ de tal forma que

- F respecta identitats.

Per a tot $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, es té que

$$F(\text{id}_x) = \text{id}_{F(x)}.$$

- F respecta composicions.

Per a tot $x, y, z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ i $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z)$, es té que

$$F(g \circ^{\mathcal{C}} f) = F(g) \circ^{\mathcal{D}} F(f),$$

on $\circ^{\mathcal{C}}$ denota la composició en la categoria $\mathcal{C}$ i $\circ^{\mathcal{D}}$ la composició en $\mathcal{D}$.

Notació 2.1. A partir d'ara, simplifiquem la notació i denotarem amb $\circ$ totes les composicions de totes les categories sempre que no puga donar lloc a confusió.

A continuació comprovem que la composició de functors és functor.

Proposició 2.3 (La composició de functors és functor). *Siguen $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ i $\mathcal{E}$ categories i $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ functors, llavors $G \circ F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ és functor.*

Notació 2.2. En aquest punt és clau fer la distinció de la composició de morfismes en una categoria i la composició de functors. La composició de functors sempre l'entendrem com aplicar primer un i després l'altre, és a dir, si $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ i f un morfisme en $\mathcal{C}$, llavors,

$$(G \circ F)(x) = G(F(x)) \quad \text{i} \quad (G \circ F)(f) = G(F(f)).$$

Demostració. Sabem que $G \circ F$ és una assignació d'objectes de $\mathcal{C}$ en objectes de $\mathcal{E}$ i també amb els morfismes. Ara sols hem de comprovar les propietats dels functors. Siguen i $x, y, z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ i $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z)$.

En primer lloc, volem vore que $G(F(f)) \in \text{Hom}_{\mathcal{E}}(G(F(x)), G(F(y)))$. Però com F és functor tenim que $F(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(x), F(y))$ i ara com G és functor, al actuar sobre el morfisme $F(f)$ arribem a $G(F(f)) \in \text{Hom}_{\mathcal{E}}(G(F(x)), G(F(y)))$ que era el que volíem.

A continuació volem que $G(F(\text{id}_x)) = \text{id}_{G(F(x))}$. Ara, sabem que com F és functor, $F(\text{id}_x) = \text{id}_{F(x)}$, i ara, com G és functor $G(\text{id}_{F(x)}) = \text{id}_{G(F(x))}$. Així, tot junt ens queda que

$$G(F(\text{id}_x)) = G(\text{id}_{F(x)}) = \text{id}_{G(F(x))}.$$

Que és el que volíem vore.

Finalment, volem vore que $G(F(g \circ f)) = G(F(g)) \circ G(F(f))$. Però com que F és functor, tenim que $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ i com G és functor i $F(f)$ i $F(g)$ són morfismes en $\mathcal{D}$, tenim que $G(F(g) \circ F(f)) = G(F(g)) \circ G(F(f))$. Ara, tot junt arribem a que

$$G(F(g \circ f)) = G(F(g) \circ F(f)) = G(F(g)) \circ G(F(f)).$$

Com volíem vore.

Vistes totes les propietats, queda demostrat que $G \circ F$ és functor. □

Vejam ara que la composició de functors és associativa.

Proposició 2.4 (La composició de functors és associativa). *Siguen $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ i $\mathcal{F}$ categories, $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ i $H : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ functors, llavors*

$$(H \circ G) \circ F = H \circ (G \circ F).$$

Demostració. Notem que si $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ i f un morfisme en $\mathcal{C}$, llavors

$$(H \circ G) \circ F(x) = H(G(F(x))) = H \circ (G \circ F(x)).$$

$$(H \circ G) \circ F(f) = H(G(F(f))) = H \circ (G \circ F(f)).$$

Com que aquests functors fan les mateixes assignacions, són el mateix functor. □

Ara vorem que podem definir una identitat funtorial per a cada categoria. Com és d'esperar, aquesta identitat és neutre per a la composició.

Proposició 2.5. *Per a tota categoria existeix un funtor identitat i aquest funtor és neutre per a la composició de functors, és a dir, si $\mathcal{C}$ és una categoria, definim $\text{Id}_{\mathcal{C}}$ per assignar a tot $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ i f un morfisme en $\mathcal{C}$*

$$\text{Id}_{\mathcal{C}}(x) = x \quad \text{i} \quad \text{Id}_{\mathcal{C}}(f) = f.$$

Demostració. Primer demostrem que és un funtor, clarament $\text{Id}_{\mathcal{C}}$ és una assignació d'objectes de $\mathcal{C}$ en objectes de $\mathcal{C}$ i també de morfismes, vejam que satisfà les propietats dels functors. Siguen $x, y, z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ i $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z)$.

En primer lloc, volem vore que $\text{Id}_{\mathcal{C}}(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{Id}_{\mathcal{C}}(x), \text{Id}_{\mathcal{C}}(y))$, aplicant la definició de $\text{Id}_{\mathcal{C}}$ tenim que això és equivalent a què $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ que és d'on partim.

A continuació volem vore que $\text{Id}_{\mathcal{C}}(\text{id}_x) = \text{id}_{\text{Id}_{\mathcal{C}}(x)}$, de nou, aplicant la definició de $\text{Id}_{\mathcal{C}}$ tenim que això és equivalent a $\text{id}_x = \text{id}_x$ que és cert.

Finalment, volem vore que $\text{Id}_{\mathcal{C}}(g \circ f) = \text{Id}_{\mathcal{C}}(g) \circ \text{Id}_{\mathcal{C}}(f)$, una vegada més, aplicant la definició de $\text{Id}_{\mathcal{C}}$ tenim que això és equivalent a $(g \circ f) = g \circ f$ que també és cert.

Vistes totes les propietats podem concloure que $\text{Id}_{\mathcal{C}}$ és un funtor.

A continuació volem que és neutre per a la composició.

Si $\mathcal{D}$ una categoria, $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ i $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ functors, anem a vore que $\text{Id}_{\mathcal{C}} \circ G = G$ i també que $F \circ \text{Id}_{\mathcal{C}} = F$. Si $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ i f un morfisme de $\mathcal{C}$, $y \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ i g un morfisme de $\mathcal{D}$, llavors,

$$(F \circ \text{Id}_{\mathcal{C}})(x) = F(\text{Id}_{\mathcal{C}}(x)) = F(x).$$

$$(F \circ \text{Id}_{\mathcal{C}})(f) = F(\text{Id}_{\mathcal{C}}(f)) = F(f).$$

$$(\text{Id}_{\mathcal{C}} \circ G)(y) = \text{Id}_{\mathcal{C}}(G(y)) = G(y).$$

$$(\text{Id}_{\mathcal{C}} \circ G)(g) = \text{Id}_{\mathcal{C}}(G(g)) = G(g).$$

Com que els functors fan les mateixes assignacions, concloem que són els mateixos functors, és a dir, $\text{Id}_{\mathcal{C}} \circ G = G$ i també $F \circ \text{Id}_{\mathcal{C}} = F$. $\square$

Notació 2.3. Farem una distinció notacional entre les identitats d'una categoria com a morfismes d'objectes i com a functors de tota la categoria. Els functors identitat sempre els escriurem amb majúscula i els morfismes identitat amb minúscula.

A continuació volem que els functors respecten els isomorfismes i els seus inversos.

Proposició 2.6 (La imatge per un funtor d'un isomorfisme és un isomorfisme). *Siguen $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categories, $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un funtor, $x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ i $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ un isomorfisme, llavors, $F(f)$ és isomorfisme i*

$$F(f)^{-1} = F(f^{-1}).$$

Demostració. Sols hem de comprovar que

$$F(f^{-1}) \circ F(f) = \text{id}_{F(x)} \quad \text{i} \quad F(f) \circ F(f^{-1}) = \text{id}_{F(y)}.$$

Fem primer l'equació de l'esquerra. Com F és funtor, respecta composicions i identitats, per tant,

$$F(f^{-1}) \circ F(f) = F(f^{-1} \circ f) = F(\text{id}_x) = \text{id}_{F(x)}.$$

Fem ara l'altra equació de manera anàloga,

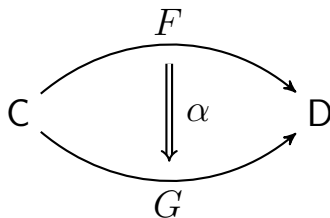
$$F(f) \circ F(f^{-1}) = F(f \circ f^{-1}) = F(\text{id}_y) = \text{id}_{F(y)}.$$

Així, queda provat que $F(f)$ és isomorfisme i $F(f)^{-1} = F(f^{-1})$. $\square$

2.3 Transformacions naturals

Ara que hem definit les categories i els functors, i n'hem vist les propietats bàsiques, podem continuar avançant en l'abstracció. Hem introduït els functors com a anàlegs dels morfismes entre categories. Seguint aquesta analogia, pensarem ara les transformacions naturals com a morfismes entre functors.

Si ho representem en un diagrama, podem pensar en un diagrama com aquest



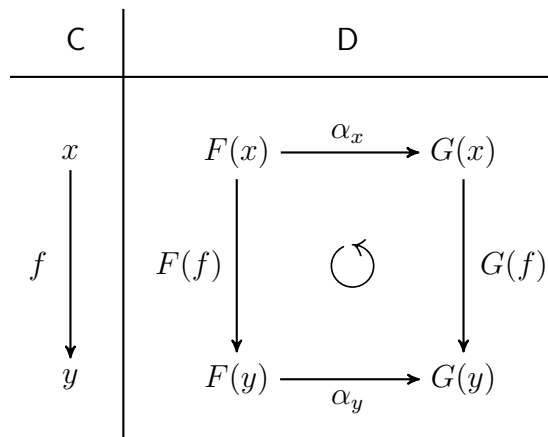
Ací queda representat que, C i D són categories, F i G són functors de C en D i la transformació natural α és una transformació de F en G . L'abstracció queda reflectida en la doble fletxa.

Definició 2.9 (Transformació natural). Siguen C i D categories i $F, G : C \longrightarrow D$ functors. Una transformació natural α de F a G és una col·lecció indexada sobre els objectes de C $\alpha = (\alpha_x)_{x \in \text{Ob}(C)}$ de tal forma que, per a cada $x \in \text{Ob}(C)$, $\alpha_x \in \text{Hom}_D(F(x), G(x))$ satisfent l'anomenada condició de naturalitat. És a dir, per a cada $f \in \text{Hom}_C(x, y)$, es té que

$$G(f) \circ \alpha_x = \alpha_y \circ F(f).$$

En aquest cas, escriurem $\alpha : F \Longrightarrow G$.

La condició de naturalitat sorgeix de considerar, per a cada morfisme f , el següent diagrama, i exigir que siga commutatiu; és a dir, que el resultat siga el mateix independentment del camí que seguim per recórrer-lo.



Ara donarem un nom a la situació en què totes les components d'una transformació natural són isomorfismes: en direm isomorfisme natural.

Definició 2.10 (Isomorfisme natural). Siguen C i D categories i $F, G : C \longrightarrow D$ functors, i $\alpha : F \Longrightarrow G$ transformació natural. Direm que α és un *isomorfisme natural* si α_x és un isomorfisme per a tot $x \in \text{Ob}(C)$.

Si C i D són categories i $F, G : C \longrightarrow D$ functors per als què existeix $\alpha : F \Longrightarrow G$ isomorfisme natural, llavors escriurem $F \cong G$ i direm que F i G són *naturalment isomorfs*.

Ara vorem que, per a qualsevol functor, sempre podem considerar la transformació natural identitat del functor en ell mateixa, on totes les seues components són els morfismes identitat corresponents.

Proposició 2.7. Siguen C i D categories i $F : C \longrightarrow D$ functor. Aleshores la col·lecció definida per $\text{id}_F = (\text{id}_{F(x)})_{x \in \text{Ob}(C)}$ és un isomorfisme natural $\text{id}_F : F \Longrightarrow F$.

Demostració. Que id_F és una col·lecció indexada sobre els objectes de C ho tenim per definició, i que si $x \in \text{Ob}(C)$, llavors $\text{id}_{F(x)} \in \text{Hom}_C(F(x), F(x))$ també ho tenim. Així, sols falta comprovar l'última propietat de les transformacions naturals. Siguen $x, y \in \text{Ob}(C)$ i $f \in \text{Hom}_C(x, y)$, volem vore que

$$F(f) \circ \text{id}_{F(x)} = \text{id}_{F(y)} \circ F(f),$$

però com la identitat és neutre per a la composició, això és equivalent a que $F(f) = F(f)$, que és cert.

Així, hem vist que id_F és transformació natural. Vist això, sols queda notar que per a tot $x \in \text{Ob}(C)$ tenim que $\text{id}_x = (\text{id}_x)^{-1}$, ja que la identitat és neutre per a la composició, i per tant totes les id_x són isomorfismes.

Concloem, doncs, que id_F és un isomorfisme natural. □

A continuació vorem que, donat un isomorfisme natural, podem invertir-lo per obtenir una transformació natural que vaja en sentit contrari i que també serà un isomorfisme natural.

Proposició 2.8. *Siguen $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ categories i $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ functors, i $\alpha : F \Longrightarrow G$ isomorfisme natural, llavors*

$$\alpha^{-1} = (\alpha_x^{-1})_{x \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

és isomorfisme natural de G en F , és a dir, $\alpha^{-1} : G \Longrightarrow F$ és isomorfisme natural.

Demostració. Que α^{-1} és una col·lecció indexada sobre els objectes de $\mathcal{C}$ ho tenim per definició, i si $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, llavors $\alpha_x^{-1} \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(G(x), F(x))$ també ho tenim, ja que com α és transformació natural de F a G , tenim que $\alpha_x \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(x), G(x))$ i per tant, $\alpha_x^{-1} \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(G(x), F(x))$.

Així, sols falta comprovar l'última propietat de les transformacions naturals. Siguen $x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ i $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$, volem vore que

$$F(f) \circ \alpha_x^{-1} = \alpha_y^{-1} \circ G(f).$$

Ara bé, com α transformació natural de F a G tenim que

$$G(f) \circ \alpha_x = \alpha_y \circ F(f).$$

Composant per la dreta amb α_x^{-1} i per l'esquerra amb α_y^{-1} obtenim la següent igualtat,

$$\alpha_y^{-1} \circ G(f) \circ \alpha_x \circ \alpha_x^{-1} = \alpha_y^{-1} \circ \alpha_y \circ F(f) \circ \alpha_x^{-1}.$$

Per tant,

$$F(f) \circ \alpha_x^{-1} = \alpha_y^{-1} \circ G(f).$$

Just com volíem vore, així, hem provat que α^{-1} és transformació natural.

Vist això, sols queda notar que, per a tot $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ tenim que $(\alpha_x^{-1})^{-1} = \alpha_x$, ja que fer inverses sobre morfismes és una involució, i per tant α_x^{-1} isomorfisme.

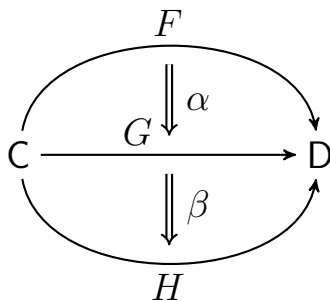
Concloem doncs que α^{-1} és un isomorfisme natural. $\square$

2.3.1 Composicions de transformacions naturals

Ara que hem vist les propietats bàsiques de les transformacions naturals, analitzarem com podem composar-les per obtenir una nova transformació natural. El que vorem en aquesta subsecció és que la composició es pot fer de dues maneres diferents: composició vertical i composició horitzontal.

Composició vertical de transformacions naturals

Comencem introduïnt la composició vertical de transformacions naturals i comprovant que aquesta composició ens retorna una transformació natural. La situació en la que podem donar una composició vertical ve representada en el següent diagrama; on volem que la composició vertical d' α en β vaja des de F fins a H . En el diagrama s'aprecia que el funtor G és el lloc intermedi per fer la composició i també justifica el nom de composició vertical.



Definició 2.11 (Composició vertical de transformacions naturals). Siguen C i D categories i $F, G, H : C \longrightarrow D$ functors i $\alpha : F \Longrightarrow G$, on $\alpha = (\alpha_x)_{x \in \text{Ob}(C)}$, i $\beta : G \Longrightarrow H$, on $\beta = (\beta_x)_{x \in \text{Ob}(C)}$, transformacions naturals. Denotem a la composició vertical d' α i β com

$$\beta \circ \alpha = (\beta_x \circ \alpha_x)_{x \in \text{Ob}(C)}.$$

En la situació que acabem d'introduïr, podem demostrar que $\beta \circ \alpha : F \Longrightarrow H$ és una transformació natural d' F en H .

Proposició 2.9. *La composició vertical de transformacions naturals està ben definida, és a dir, en la situació de la Definició 2.11, $\beta \circ \alpha : F \Longrightarrow H$ és una transformació natural d' F en H .*

Demostració. Notem que $\beta \circ \alpha$ és una col·lecció indexada sobre els objectes de C . Ara, si $x \in \text{Ob}(C)$ hem de veure que $\beta_x \circ \alpha_x \in \text{Hom}_D(F(x), H(x))$. Com α és transformació natural $\alpha_x \in \text{Hom}_D(F(x), G(x))$ i com β és transformació natural $\beta_x \in \text{Hom}_D(G(x), H(x))$. Així, $\beta_x \circ \alpha_x \in \text{Hom}_D(F(x), H(x))$ com volíem veure.

Sols falta comprovar l'última propietat de les transformacions naturals, siguen $x, y \in \text{Ob}(C)$ i $f \in \text{Hom}_C(x, y)$, volem veure que

$$H(f) \circ (\beta_x \circ \alpha_x) = (\beta_y \circ \alpha_y) \circ F(f).$$

Però ara, com α i β són transformacions naturals, tenim que

$$G(f) \circ \alpha_x = \alpha_y \circ F(f).$$

$$H(f) \circ \beta_x = \beta_y \circ G(f).$$

Component amb β_y la primera igualtat per l'esquerra obtenim que

$$\beta_y \circ G(f) \circ \alpha_x = \beta_y \circ \alpha_y \circ F(f).$$

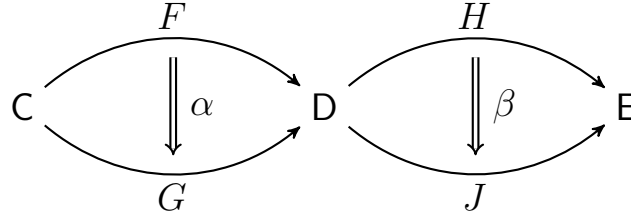
I ara aplicant la segona igualtat obtenim

$$H(f) \circ \beta_x \circ \alpha_x = \beta_y \circ \alpha_y \circ F(f).$$

Que és el que volíem vore. Així hem provat que $\beta \circ \alpha$ és transformació natural de F a H . $\square$

Composició horitzontal de transformacions naturals

Continuem ara amb la composició horitzontal de transformacions naturals i comprovant que aquesta composició ens retorna una transformació natural. Fins ara hem considerat com a punt intermedi un funtor, però també té sentit considerar com a punt intermedi una categoria. Això ens permetrà introduir la definició de la composició horitzontal. A continuació, representarem amb un diagrama la situació que necessitem per formalitzar aquesta definició.



En aquesta situació volem que la composició horitzontal d' α amb β vaja des d' $H \circ F$ en $J \circ G$. En el diagrama s'aprecia que la categoria D és el lloc intermedi per fer la composició i també justifica el nom de composició horitzontal.

Definició 2.12 (Composició horitzontal de transformacions naturals). Siguen C, D i E categories i $F, G : C \rightarrow D$, $H, J : D \rightarrow E$ functors i $\alpha : F \Rightarrow G$, on $\alpha = (\alpha_x)_{x \in \text{Ob}(C)}$, i $\beta : H \Rightarrow J$, on $\beta = (\beta_y)_{y \in \text{Ob}(D)}$, transformacions naturals. Denotem a la composició horitzontal d' α i β com

$$\beta * \alpha = (J(\alpha_x) \circ \beta_{F(x)})_{x \in \text{Ob}(C)}.$$

En la situació que acabem d'introduir, podem demostrar que $\beta * \alpha : H \circ F \Rightarrow J \circ G$ és una transformació natural d' $H \circ F$ en $J \circ G$.

Proposició 2.10. La composició horitzontal de transformacions naturals està ben definida, és a dir, en la situació de la Definició 2.12, $\beta * \alpha : H \circ F \Rightarrow J \circ G$ és una transformació natural d' $H \circ F$ en $J \circ G$.

Demostració. Notem que $\beta * \alpha$ és una col·lecció indexada sobre els objectes de $\mathbf{C}$. Ara, si $x \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ hem de veure que $J(\alpha_x) \circ \beta_{F(x)} \in \text{Hom}_{\mathbf{E}}(H(F(x)), J(G(x)))$. Ara, com α és transformació natural entre F i G ,

$$\alpha_x \in \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(x), G(x)).$$

Així, ara com J és funtor entre $\mathbf{D}$ i $\mathbf{E}$,

$$J(\alpha_x) \in \text{Hom}_{\mathbf{E}}(J(F(x)), J(G(x))).$$

D'altra banda, com β és transformació natural,

$$\beta_{F(x)} \in \text{Hom}_{\mathbf{E}}(H(F(x)), J(F(x))).$$

Per últim, podem compondre, i la composició pertany on volem, és a dir,

$$J(\alpha_x) \circ \beta_{F(x)} \in \text{Hom}_{\mathbf{E}}(H(F(x)), J(G(x))).$$

Sols falta veure l'última propietat de les transformacions naturals, siguen $x, y \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ i $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(x, y)$, volem veure que

$$(J \circ G(f)) \circ (J(\alpha_x) \circ \beta_{F(x)}) = (J(\alpha_y) \circ \beta_{F(y)}) \circ (H \circ F(f)).$$

En primer lloc, com que F és funtor tenim que $F(f) \in \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(x), F(y))$, així, com β és transformació natural, tenim que

$$J(F(f)) \circ \beta_{F(x)} = \beta_{F(y)} \circ H(F(f)).$$

Ara, composant en la igualtat anterior amb $J(\alpha_y)$ per l'esquerra arribem a

$$J(\alpha_y) \circ J(F(f)) \circ \beta_{F(x)} = J(\alpha_y) \circ \beta_{F(y)} \circ H(F(f)).$$

Com J és funtor, $J(\alpha_y) \circ J(F(f)) = J(\alpha_y \circ F(f))$ i com α és transformació natural, $G(f) \circ \alpha_x = \alpha_y \circ F(f)$.

Posant-ho tot junt tenim que

$$J(\alpha_y) \circ J(F(f)) = J(\alpha_y \circ F(f)) = J(G(f) \circ \alpha_x) = J(G(f)) \circ J(\alpha_x).$$

Substituint aquesta igualtat en l'anterior arribem a que

$$J(G(f)) \circ J(\alpha_x) \circ \beta_{F(x)} = J(\alpha_y) \circ \beta_{F(y)} \circ H(F(f)).$$

Que és exactament el que volíem veure i, per tant, queda demostrat que $\beta * \alpha$ és transformació natural de $H \circ F$ en $J \circ G$. $\square$

Nota 2.1. En la situació de la Definició 2.12, notem que, tot i que definim $(\beta * \alpha)_x = J(\alpha_x) \circ \beta_{F(x)}$, també tenim la següent igualtat

$$(\beta * \alpha)_x = J(\alpha_x) \circ \beta_{F(x)} = \beta_{G(x)} \circ H(\alpha_x).$$

Esta igualtat es deu al fet que $\alpha_x \in \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(x), G(x))$ i β és transformació natural d' H en J . Així, la definició de $\beta * \alpha$ es pot donar, independentment, en funció de F i J o en funció de G i H .

Propietats de les composicions

Ara que hem vist com compondre transformacions naturals, volem com interactuen aquestes composicions amb les transformacions identitats d'algun funtor. Vejam-ho primer amb la composició vertical.

Proposició 2.11 (Composició vertical i identitats). *Siguen $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ categories, $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ functors i $\alpha : F \Longrightarrow G$ una transformació natural. Llavors,*

$$\alpha = \text{id}_F \circ \alpha = \alpha \circ \text{id}_G.$$

Demostració. Avaluem en cada $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$,

$$(\alpha \circ \text{id}_F)_x = \alpha_x \circ (\text{id}_F)_x = \alpha_x \circ \text{id}_{F(x)} = \alpha_x.$$

$$(\text{id}_G \circ \alpha)_x = (\text{id}_G)_x \circ \alpha_x = \text{id}_{G(x)} \circ \alpha_x = \alpha_x.$$

Així, com per a tot $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ les transformacions naturals α , $\text{id}_F \circ \alpha$, $\alpha \circ \text{id}_G$ tenen les mateixes components, deduïm que són la mateixa transformació natural. $\square$

Vejam-ho ara amb composició horitzontal.

Proposició 2.12 (Composició horitzontal i identitats). *Siguen $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ i $\mathcal{E}$ categories, $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ functors i $\alpha : F \Longrightarrow G$ una transformació natural. Siga també $H : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}$ i $J : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$. Llavors, per a tot $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ i per a tot $z \in \text{Ob}(\mathcal{E})$*

$$(\alpha * \text{id}_H)_z = \alpha_{H(z)}.$$

$$(\text{id}_J * \alpha)_x = J(\alpha_x).$$

Demostració. Vejam primer la primera igualtat.

$$\alpha * \text{id}_H : F \circ H \Longrightarrow G \circ H$$

Avaluant en cada $z \in \text{Ob}(\mathcal{E})$ ens queda que

$$(\alpha * \text{id}_H)_z = G((\text{id}_H)_z) \circ \alpha_{H(z)} = G(\text{id}_{H(z)}) \circ \alpha_{H(z)} = \text{id}_{G(H(z))} \circ \alpha_{H(z)} = \alpha_{H(z)}.$$

Ara vejam la segona.

$$\text{id}_J * \alpha : J \circ F \Longrightarrow J \circ G$$

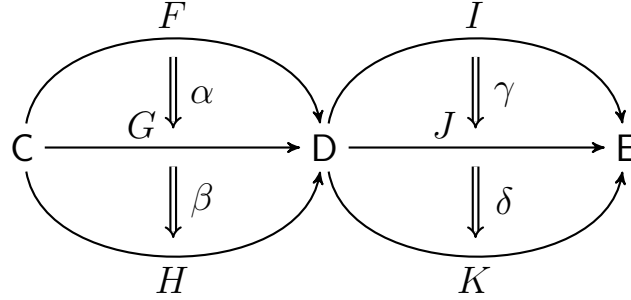
Avaluant en cada $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ens queda que

$$(\text{id}_J * \alpha)_x = J(\alpha_x) \circ (\text{id}_J)_{F(x)} = J(\alpha_x) \circ \text{id}_{J(F(x))} = J(\alpha_x).$$

$\square$

Corol·lari 2.1. *Siga $\mathcal{C}$ una categoria. La transformació natural $\text{id}_{\text{Id}_{\mathcal{C}}}$ és neutre per a la composició vertical i per a la composició horitzontal de transformacions naturals.*

A continuació, vorem una forta relació entre la composició horitzontal i la vertical de transformacions naturals. Més específicament, en la situació del diagrama següent



Comprovarem a continuació que serà el mateix compondre verticalment α amb β i γ amb δ i després compondre el resultat horitzontalment, que fer primer la composició horitzontal d' α amb γ i β amb δ i després compondre el resultat verticalment. En forma d'equació tenim la següent igualtat

$$(\delta \circ \gamma) * (\beta \circ \alpha) = (\delta * \beta) \circ (\gamma * \alpha).$$

Aquesta és l'anomenada llei d'intercanvi.

Proposició 2.13 (Llei d'intercanvi). *Siguen $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ i $\mathcal{E}$ categories i $F, G, H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, $I, J, K : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ functors i $\alpha : F \Rightarrow G$, $\beta : G \Rightarrow H$, $\gamma : I \Rightarrow J$, $\delta : J \Rightarrow K$ transformacions naturals, llavors,*

$$(\delta \circ \gamma) * (\beta \circ \alpha) = (\delta * \beta) \circ (\gamma * \alpha).$$

Demostració. Primer volem que aquestes dues expressions són transformacions naturals de $I \circ F$ en $K \circ H$, açò és perquè $\delta \circ \gamma$ és transformació natural entre I i K , $\beta \circ \alpha$ és transformació natural entre F i H , $\delta * \beta$ és transformació natural entre $J \circ G$ i $K \circ H$ i $\gamma * \alpha$ és transformació natural entre $I \circ F$ i $J \circ G$.

Ara sols falta comprovar que sobre el mateix objecte $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ porten al mateix morfisme en $\text{Hom}_{\mathcal{E}}(I(F(x)), K(H(x)))$.

Tot el que hem de fer és anar a poc a poc. D'una banda,

$$((\delta \circ \gamma) * (\beta \circ \alpha))_x = K((\beta \circ \alpha)_x) \circ (\delta \circ \gamma)_{F(x)} = K(\beta_x) \circ K(\alpha_x) \circ \delta_{F(x)} \circ \gamma_{F(x)}.$$

En l'altra banda obtenim que

$$((\delta * \beta) \circ (\gamma * \alpha))_x = (\delta * \beta)_x \circ (\gamma * \alpha)_x = K(\beta_x) \circ \delta_{G(x)} \circ J(\alpha_x) \circ \gamma_{F(x)}.$$

Així notem que sols falta verificar la següent igualtat

$$K(\alpha_x) \circ \delta_{F(x)} = \delta_{G(x)} \circ J(\alpha_x).$$

Però aquesta igualtat és certa, ja que $\alpha_x \in \text{Hom}_{\mathbb{D}}(F(x), G(x))$ i δ és transformació natural de J a K . □

Capítol 3

Adjuncions

En aquest capítol vorem formes de comparar dues categories, anirem de més restrictives a menys i acabarem amb la noció que més ens interessa, la noció d'adjunció.

Definició 3.1 (Igualtat). Direm que una categoria C és *igual* a una altra D , i escriurem $C = D$, si $\text{Ob}(C) = \text{Ob}(D)$, per a tots $x, y \in \text{Ob}(C)$ tenim que $\text{Hom}_C(x, y) = \text{Hom}_D(x, y)$, i tenen la mateixa composició de morfismes i les identitats per a cada objecte.

Equivalentment, C és igual a D si, i sols si, C és una subcategoria de D i D és una subcategoria de C . L'exemple canònic d'igualtat el tenim en considerar C una categoria qualsevol. Llavors trobem la igualtat

$$C = (C^{\text{op}})^{\text{op}}.$$

Aquesta forma de comparar categories és clarament molt restrictiva, anem a relaxar-la una mica amb la noció d'isomorfisme entre categories.

Definició 3.2 (Isomorfes). Direm que una categoria C és *isomorfa* a una altra D , i escriurem $C \cong D$, si existeixen functors $F : C \longrightarrow D$ i $G : D \longrightarrow C$ tals que

$$F \circ G = \text{Id}_D \quad \text{i} \quad G \circ F = \text{Id}_C.$$

Primer, remarcuem que si dues categories són iguals, llavors són isomorfes prenent els functors identitats. Ara tornem a relaxar aquesta definició amb la noció de categories equivalents.

Definició 3.3 (Equivalents). Direm que una categoria C és *equivalent* a una altra D , i escriurem $C \simeq D$, si existeixen functors $F : C \longrightarrow D$ i $G : D \longrightarrow C$ tals que

$$F \circ G \cong \text{Id}_D \quad \text{i} \quad G \circ F \cong \text{Id}_C.$$

De nou, tornem a remarcar la implicació clara; si dues categories són isomorfes, llavors són equivalents. En aquest cas, sols hem de prendre la transformació natural identitat. Finalment, tornem a relaxar aquesta definició amb la noció d'adjunció.

Definició 3.4 (Adjunció). Una *adjunció* és una 6-tupla $(C, D, F, G, \eta, \varepsilon)$ on C i D són categories, $F : C \rightarrow D$ i $G : D \rightarrow C$ functors i $\eta : \text{Id}_C \Rightarrow G \circ F$ i $\varepsilon : F \circ G \Rightarrow \text{Id}_D$ transformacions naturals de tal forma que satisfan les següents relacions que anomenarem *identitats triangulars*,

$$(\varepsilon * \text{id}_F) \circ (\text{id}_F * \eta) = \text{id}_F \quad \text{i} \quad (\text{id}_G * \varepsilon) \circ (\eta * \text{id}_G) = \text{id}_G.$$

En aquesta situació direm tenim una *adjunció de C en D* , que G és *adjunt per la dreta* de F i que F és *adjunt per l'esquerra* de G . La transformació natural η s'anomena la *unitat* de l'adjunció i ε s'anomena la *counitat* de l'adjunció. Quan no hi haja possibilitat a confusió, escriurem $F \dashv G$ per a denotar la situació d'adjunció.

Vejam en detall les conseqüències de les identitats triangulars.

Interpretació 3.1. Suposant que tenim una situació d'adjunció com la de la Definició 3.4, el primer que farem és explicitar les transformacions naturals que ens apareixen enmig de les identitats triangulars per notar que efectivament es poden compondre així.

$$\begin{aligned} \varepsilon * \text{id}_F : F \circ G \circ F &\Rightarrow F & \text{id}_F * \eta : F &\Rightarrow F \circ G \circ F \\ \text{id}_G * \varepsilon : G \circ F \circ G &\Rightarrow G & \eta * \text{id}_G : G &\Rightarrow G \circ F \circ G \end{aligned}$$

Ara prenim un objecte $x \in \text{Ob}(C)$ i vejam amb detall la primera identitat triangular. Per la proposició que ens diu com es componen les identitats horitzontalment tenim que

$$\boxed{\text{id}_{F(x)} = \varepsilon_{F(x)} \circ F(\eta_x)}$$

Vejam la segona, siga $y \in \text{Ob}(D)$, per la mateixa proposició que abans tenim que

$$\boxed{\text{id}_{G(y)} = G(\varepsilon_y) \circ \eta_{G(y)}}$$

Per tal d'afirmar que la situació d'adjunció és realment una generalització de la d'equivalència, a continuació mostrarem que es compleix la implicació corresponent. Cal destacar que aquesta implicació no és tan trivial com les altres que hem vist fins ara, ja que, per demostrar-la, hem de verificar les identitats triangulars.

Proposició 3.1. *Siuen $C \simeq D$ categories equivalents, llavors existeix una adjunció de C en D i altra adjunció de D en C .*

Demostració. En primer lloc, com que $C \simeq D$ és equivalent a què $D \simeq C$, serà prou en vore que existeix sols una d'aquestes adjuncions.

Com $C \simeq D$, sabem que existeixen $F : C \longrightarrow D$ i $G : D \longrightarrow C$ functors tals que

$$G \circ F \cong \text{Id}_C \quad \text{i} \quad F \circ G \cong \text{Id}_D.$$

Per tant, podem trobar $\eta : \text{Id}_C \Longrightarrow G \circ F$ i $\alpha : F \circ G \Longrightarrow \text{Id}_D$ isomorfismes naturals.

Ara hem d'anar amb compte, ja que $(C, D, G, F, \eta, \alpha)$ **no** té per què satisfer les identitats triangulars. És per això que definirem ε a partir d'aquesta α i d' η . Per a tot $y \in \text{Ob}(D)$, definim,

$$\varepsilon_y = \alpha_y \circ F(G(\alpha_y) \circ \eta_{G(y)})^{-1}.$$

Ara anem a comprovar que $\varepsilon : F \circ G \Longrightarrow \text{Id}_D$ és transformació natural. Simplement cal adonar-se que ε_y és isomorfisme, en ser composicions i actuacions per functors d'isomorfismes. Siguen doncs $y, z \in \text{Ob}(D)$ i $g \in \text{Hom}_D(y, z)$. Volem vore que

$$g \circ \varepsilon_y = \varepsilon_z \circ F(G(g)).$$

Substituint les ε , això és equivalent a què

$$g \circ \alpha_y \circ F(G(\alpha_y) \circ \eta_{G(y)})^{-1} = \alpha_z \circ F(G(\alpha_z) \circ \eta_{G(z)})^{-1} \circ F(G(g)).$$

Per vore aquesta igualtat farem servir tot el temps les proposicions que ens diuen qui és la inversa de la composició de dos isomorfismes i la proposició que ens diu qui és la inversa de l'actuació per un functor d'un isomorfisme. Ens detindrem amb més detall en les igualtats degudes a les transformacions naturals.

Com $\alpha : F \circ G \Longrightarrow \text{Id}_D$ és una transformació natural, tenim que

$$g \circ \alpha_y = \alpha_z \circ F(G(g)).$$

Així, composant amb $F(G(\alpha_y) \circ \eta_{G(y)})^{-1}$ tenim que,

$$\begin{aligned} g \circ \alpha_y \circ F(G(\alpha_y) \circ \eta_{G(y)})^{-1} &= \alpha_z \circ F(G(g)) \circ F((G(\alpha_y) \circ \eta_{G(y)})^{-1}) \\ &= \alpha_z \circ F(G(g)) \circ F(\eta_{G(y)}^{-1} \circ G(\alpha_y)^{-1}) \\ &= \alpha_z \circ F(G(g) \circ \eta_{G(y)}^{-1} \circ G(\alpha_y)^{-1}). \end{aligned}$$

Ara, $\eta^{-1} : G \circ F \Longrightarrow \text{Id}_C$ és una transformació natural i $G(g) \in \text{Hom}_C(G(y), G(z))$. Així,

$$G(g) \circ \eta_{G(y)}^{-1} = \eta_{G(z)}^{-1} \circ G(F(G(g))).$$

Tornant on estàvem tenim que

$$\begin{aligned} g \circ \alpha_y \circ F(G(\alpha_y) \circ \eta_{G(y)})^{-1} &= \alpha_z \circ F(G(g) \circ \eta_{G(y)}^{-1} \circ G(\alpha_y)^{-1}) \\ &= \alpha_z \circ F(\eta_{G(z)}^{-1} \circ G(F(G(g))) \circ G(\alpha_y)^{-1}) \\ &= \alpha_z \circ F(\eta_{G(z)}^{-1} \circ G(F(G(g))) \circ G(\alpha_y^{-1})) \\ &= \alpha_z \circ F(\eta_{G(z)}^{-1} \circ G(F(G(g)) \circ \alpha_y^{-1})). \end{aligned}$$

Ara, fent servir que $\alpha^{-1} : \text{Id}_{\mathcal{D}} \Rightarrow F \circ G$ és una transformació natural, tenim que

$$F(G(g)) \circ \alpha_y^{-1} = \alpha_z^{-1} \circ g.$$

Així, tornant on estàvem tenim que

$$\begin{aligned} g \circ \alpha_y \circ F(G(\alpha_y) \circ \eta_{G(y)})^{-1} &= \alpha_z \circ F(\eta_{G(z)}^{-1} \circ G(F(G(g)) \circ \alpha_y^{-1})) \\ &= \alpha_z \circ F(\eta_{G(z)}^{-1} \circ G(\alpha_z^{-1} \circ g)) \\ &= \alpha_z \circ F(\eta_{G(z)}^{-1} \circ G(\alpha_z^{-1}) \circ G(g)) \\ &= \alpha_z \circ F(\eta_{G(z)}^{-1} \circ G(\alpha_z)^{-1}) \circ F(G(g)) \\ &= \alpha_z \circ F((G(\alpha_z) \circ \eta_{G(z)})^{-1}) \circ F(G(g)) \\ &= \alpha_z \circ F(G(\alpha_z) \circ \eta_{G(z)})^{-1} \circ F(G(g)). \end{aligned}$$

Així, ε és transformació natural i, per tant, isomorfisme natural.

Vejam ara que se satisfan les identitats triangulars. Concretament, gràcies a la Interpretació 3.1, volem vore que per a tots $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ i $y \in \text{Ob}(\mathcal{D})$,

$$\text{id}_{F(x)} = \varepsilon_{F(x)} \circ F(\eta_x) \quad \text{i} \quad \text{id}_{G(y)} = G(\varepsilon_y) \circ \eta_{G(y)}.$$

Vejam primer la segona equació,

$$\begin{aligned} G(\varepsilon_y) \circ \eta_{G(y)} &= G(\alpha_y \circ F(G(\alpha_y) \circ \eta_{G(y)})^{-1}) \circ \eta_{G(y)} \\ &= G(\alpha_y) \circ G(F(\eta_{G(y)}^{-1})) \circ G(F(G(\alpha_y^{-1}))) \circ \eta_{G(y)}. \end{aligned}$$

Ara com $\eta : \text{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow G \circ F$ és una transformació natural i $G(\alpha_y^{-1}) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(G(y), G(F(G(y))))$, tenim que

$$G(F(G(\alpha_y^{-1}))) \circ \eta_{G(y)} = \eta_{G(F(G(y)))} \circ G(\alpha_y^{-1}).$$

Tornant on estàvem,

$$\begin{aligned} G(\varepsilon_y) \circ \eta_{G(y)} &= G(\alpha_y) \circ G(F(\eta_{G(y)}^{-1})) \circ G(F(G(\alpha_y^{-1}))) \circ \eta_{G(y)} \\ &= G(\alpha_y) \circ G(F(\eta_{G(y)}^{-1})) \circ \eta_{G(F(G(y)))} \circ G(\alpha_y^{-1}). \end{aligned}$$

Ara, fent servir que η és una transformació natural i com $\eta_{G(y)}^{-1} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(G(F(G(y))), G(y))$, tenim que,

$$G(F(\eta_{G(y)}^{-1})) \circ \eta_{G(F(G(y)))} = \eta_{G(y)} \circ \eta_{G(y)}^{-1}.$$

Aplicant això a on estàvem tenim que

$$\begin{aligned} G(\varepsilon_y) \circ \eta_{G(y)} &= G(\alpha_y) \circ G(F(\eta_{G(y)}^{-1})) \circ \eta_{G(F(G(y)))} \circ G(\alpha_y^{-1}) \\ &= G(\alpha_y) \circ \eta_{G(y)} \circ \eta_{G(y)}^{-1} \circ G(\alpha_y^{-1}) \\ &= G(\alpha_y) \circ \text{id}_{G(F(G(y)))} \circ G(\alpha_y^{-1}) \\ &= G(\alpha_y) \circ G(\alpha_y^{-1}) \\ &= \text{id}_{G(y)}. \end{aligned}$$

Com volíem vore.

Ara per a la primera equació, hem de fer abans una observació que ens servirà més endavant. Vorem que

$$F(\eta_{G(F(x))}^{-1}) = F(G(F(\eta_x^{-1}))).$$

Per vore això, començarem per la igualtat coneguda

$$\eta_x \circ \eta_x^{-1} = \text{id}_{G(F(x))},$$

i aplicarem que $\eta^{-1} : G \circ F \implies \text{Id}_{\mathcal{C}}$ és una transformació natural i $\eta_x \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, G(F(x)))$. Així,

$$\eta_x \circ \eta_x^{-1} = \eta_{G(F(x))}^{-1} \circ G(F(\eta_x)) = \text{id}_{G(F(x))}.$$

Composant ara amb $G(F(\eta_x))^{-1}$ per la dreta, obtenim que

$$\eta_{G(F(x))}^{-1} = G(F(\eta_x))^{-1}.$$

Finalment, deixant actuar F a banda i banda arribem al resultat desitjat.

Amb aquesta igualtat vista, podem vore més fàcilment la primera identitat triangular. Fent servir aquesta observació en aquesta última igualtat tenim que

$$\begin{aligned} \varepsilon_{F(x)} \circ F(\eta_x) &= \alpha_{F(x)} \circ F(G(\alpha_{F(x)}) \circ \eta_{G(F(x))})^{-1} \circ F(\eta_x) \\ &= \alpha_{F(x)} \circ F(\eta_{G(F(x))}^{-1}) \circ F(G(\alpha_{F(x)}^{-1})) \circ F(\eta_x) \\ &= \alpha_{F(x)} \circ F(G(F(\eta_x^{-1}))) \circ F(G(\alpha_{F(x)}^{-1})) \circ F(\eta_x). \end{aligned}$$

Ara farem servir que $\alpha : F \circ G \implies \text{Id}_{\mathcal{D}}$ és una transformació natural i que $F(\eta_x^{-1}) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(G(F(x))), F(x))$. Aleshores tenim que

$$F(\eta_x^{-1}) \circ \alpha_{F(G(F(x)))} = \alpha_{F(x)} \circ F(G(F(\eta_x^{-1}))).$$

Ara, tornant per on anàvem,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{F(x)} \circ F(\eta_x) &= \alpha_{F(x)} \circ F(G(F(\eta_x^{-1}))) \circ F(G(\alpha_{F(x)}^{-1})) \circ F(\eta_x) \\ &= F(\eta_x^{-1}) \circ \alpha_{F(G(F(x)))} \circ F(G(\alpha_{F(x)}^{-1})) \circ F(\eta_x). \end{aligned}$$

Finalment, fent servir de nou que α és una transformació natural i que $\alpha_{F(x)}^{-1} \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(x), F(G(F(x))))$, tenim que

$$\alpha_{F(x)}^{-1} \circ \alpha_{F(x)} = \alpha_{F(G(F(x)))} \circ F(G(\alpha_{F(x)}^{-1})).$$

Aplicant això a on estàvem tenim que

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{F(x)} \circ F(\eta_x) &= F(\eta_x^{-1}) \circ \alpha_{F(G(F(x)))} \circ F(G(\alpha_{F(x)}^{-1})) \circ F(\eta_x) \\
&= F(\eta_x^{-1}) \circ \alpha_{F(x)}^{-1} \circ \alpha_{F(x)} \circ F(\eta_x) \\
&= F(\eta_x^{-1}) \circ \text{id}_{F(G(F(x)))} \circ F(\eta_x) \\
&= F(\eta_x^{-1}) \circ F(\eta_x) \\
&= \text{id}_{F(x)}.
\end{aligned}$$

Amb això queden provades les dues identitats triangulars, i per tant hem vist que $(\mathbf{C}, \mathbf{D}, G, F, \eta, \varepsilon)$ és una adjunció. $\square$

3.1 Propietat universal

En aquesta secció vorem la propietat principal que tenen les adjuncions i algunes de les seues conseqüències. A aquesta propietat l'anomenarem propietat universal. Aquesta és una forma alternativa de caracteritzar una situació d'adjunció.

Proposició 3.2 (Propietat Universal). *Siguen $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ categories. Són equivalents:*

1. *Existeix una adjunció $(\mathbf{C}, \mathbf{D}, F, G, \eta, \varepsilon)$.*
2. *Existeixen $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ i $G : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{C}$ functors, i una transformació natural $\eta : \text{id}_{\mathbf{C}} \Longrightarrow G \circ F$ tal que, per a cada $x \in \text{Ob}(\mathbf{C})$, $y \in \text{Ob}(\mathbf{D})$ i $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(x, G(y))$, existeix un únic morfisme $f^\# \in \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(x), y)$ de forma que*

$$f = G(f^\#) \circ \eta_x.$$

Demostració. $[1) \implies 2)]$ Vejam primer l'existència.

Siguen $x \in \text{Ob}(\mathbf{C})$, $y \in \text{Ob}(\mathbf{D})$ i $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(x, G(y))$. Definim

$$f^\# = \varepsilon_y \circ F(f).$$

Anem a vore que aquesta $f^\#$ satisfà la igualtat de 2)

$$G(f^\#) \circ \eta_x = G(\varepsilon_y \circ F(f)) \circ \eta_x = G(\varepsilon_y) \circ G(F(f)) \circ \eta_x = G(\varepsilon_y) \circ \eta_{G(y)} \circ f = f.$$

On la igualtat $G(F(f)) \circ \eta_x = \eta_{G(y)} \circ f$ ve del fet que η és transformació natural i $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(x, G(y))$. I la igualtat $G(\varepsilon_y) \circ \eta_{G(y)} = \text{id}_{G(y)}$ ve de la Interpretació 3.1 de les identitats triangulars.

Vejam ara la unicitat.

Siga $f' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(F(x), y)$ tal que $f = G(f') \circ \eta_x$, hem de vore que $f' = f^\sharp$. Per la identitat triangular tenim que,

$$f' = f' \circ \text{id}_{F(x)} \quad (1)$$

$$= f' \circ \varepsilon_{F(x)} \circ F(\eta_x) \quad (2)$$

$$= \varepsilon_y \circ F(G(f')) \circ F(\eta_x) \quad (3)$$

$$= \varepsilon_y \circ F(G(f') \circ \eta_x) \quad (4)$$

$$= \varepsilon_y \circ F(f) \quad (5)$$

$$= f^\sharp. \quad (6)$$

On la tercera igualtat es té perquè ε és una transformació natural i $f' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(F(x), y)$, mentre que la penúltima igualtat ve d'aplicar la hipòtesi sobre f' . L'última igualtat és la definició de $f^\sharp$.

Així, ja hem demostrat 2).

[2) $\implies$ 1)] El primer que farem serà definir $\varepsilon = (\varepsilon_y)_{y \in \text{Ob}(\mathcal{D})}$. Siga $y \in \text{Ob}(\mathcal{D})$, considerem $G(y) \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ i la identitat $\text{id}_{G(y)} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(G(y), G(y))$. Per 2) sabem que existeix un únic $\text{id}_{G(y)}^\sharp \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(G(y)), y)$. Definim $\varepsilon_y = \text{id}_{G(y)}^\sharp$. Ara hem de vore que ε és transformació natural i que se satisfan les identitats triangulars.

Vejam primer una de les identitats triangulars.

La primera és directa, ja que per 2) tenim que

$$\text{id}_{G(y)} = G(\text{id}_{G(y)}^\sharp) \circ \eta_{G(y)} = G(\varepsilon_y) \circ \eta_{G(y)}.$$

Vejam ara que $\varepsilon : F \circ G \implies \text{Id}_{\mathcal{D}}$ és transformació natural. Siguen $y, y' \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ i $f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(y, y')$. Volem vore que

$$f \circ \varepsilon_y = \varepsilon_{y'} \circ F(G(f)).$$

Ara, $G(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(G(y), G(y'))$. Per 2) tenim que existeix un únic $G(f)^\sharp \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(G(y)), y')$ tal que

$$G(G(f)^\sharp) \circ \eta_{G(y)} = G(f).$$

Però ara notem que

$$G(f \circ \varepsilon_y) \circ \eta_{G(y)} = G(f) \circ G(\varepsilon_y) \circ \eta_{G(y)} = G(f),$$

on hem fet servir la identitat triangular que ja hem demostrat. Per tant, per unicitat tenim que $G(f)^\sharp = f \circ \varepsilon_y$

Però també tenim que

$$G(\varepsilon_{y'} \circ F(G(f))) \circ \eta_{G(y)} = G(\varepsilon_{y'}) \circ G(F(G(f))) \circ \eta_{G(y)} \quad (1)$$

$$= G(\varepsilon_{y'}) \circ \eta_{G(y')} \circ G(f) \quad (2)$$

$$= G(f). \quad (3)$$

On la segona igualtat es té pel fet que η és una transformació natural i $G(f) \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(G(y), G(y'))$. L'última igualtat ve de nou de la identitat triangular que hem demostrat.

Concloem que $G(f)^{\sharp} = \varepsilon_{y'} \circ F(G(f))$, per tant

$$f \circ \varepsilon_y = G(f)^{\sharp} = \varepsilon_{y'} \circ F(G(f)).$$

Per tant, ε és una transformació natural.

Vejam ara la segona identitat triangular.

Abans, vorem que en general, si $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(x, G(y))$, llavors $f^{\sharp} = \varepsilon_y \circ F(f)$. Açò es té pel fet que

$$G(\varepsilon_y \circ F(f)) \circ \eta_x = G(\varepsilon_y) \circ G(F(f)) \circ \eta_x = G(\varepsilon_y) \circ \eta_{G(y)} \circ f = f.$$

Perquè η és transformació natural i ja hem demostrat la primera identitat triangular.

Prenem ara $f = \eta_x \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(x, G(F(x)))$, llavors tenim que

$$\eta_x^{\sharp} = \varepsilon_{F(x)} \circ F(f).$$

Però ara notem que

$$\eta_x = G(\eta_x^{\sharp}) \circ \eta_x \quad \text{i} \quad \eta_x = G(\text{id}_{F(x)}) \circ \eta_x.$$

Així, per unicitat de les $f^{\sharp}$ tenim que

$$\text{id}_{F(x)} = \eta_x^{\sharp} = \varepsilon_{F(x)} \circ F(f).$$

I, per tant, tenim la segona identitat triangular.

Així, ja hem vist totes les propietats i podem afirmar que $(\mathbf{C}, \mathbf{D}, G, F, \eta, \varepsilon)$ és una adjunció, el que prova 1). $\square$

Ara vorem una conseqüència de la propietat univeral. Si $F \dashv G$, llavors F està determinada per G tret d'isomorfismes natural. D'igual forma G està determinada per F tret d'isomorfisme natural.

Corol·lari 3.1. *Si $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ categories i si $(\mathbf{C}, \mathbf{D}, F, G, \eta, \varepsilon)$ i $(\mathbf{C}, \mathbf{D}, F', G, \eta', \varepsilon')$ dues adjuncions, és a dir, G és adjunta per la dreta de F i de F' . Llavors, existeix un isomorfisme natural $\alpha : F \Rightarrow F'$.*

Demostració. Anem a definir α . Sabem que ha de satisfer que, per a tot $x \in \text{Ob}(\mathbf{C})$, $\alpha_x \in \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(x), F'(x))$. Ara, com $\eta'_x \in \text{Hom}_{\mathbf{D}}(x, G(F'(x)))$ farem servir la propietat univeral en l'adjunció $F \dashv G$ per definir per a tot $x \in \text{Ob}(\mathbf{C})$,

$$\alpha_x = (\eta'_x)^{\sharp} \in \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(x), F'(x)).$$

A més, sabem que α_x és l'únic morfisme que satisfà l'equació $G(\alpha_x) \circ \eta_x = \eta'_x$.

Ara comprovarem que α és transformació natural de F a F' . Siguen $x, y \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ i $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(x, y)$. Volem vore que

$$F'(f) \circ \alpha_x = \alpha_y \circ F(f).$$

Però, com que $F'(f) \circ \alpha_x, \alpha_y \circ F(f) \in \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(x), F'(y))$, podem aplicar de nou la propietat universal en l'adjunció $F \dashv G$ i, per unicitat, tenim que és prou en vore que

$$G(F'(f) \circ \alpha_x) \circ \eta_x = G(\alpha_y \circ F(f)) \circ \eta_x.$$

Desenvolupant la banda de l'esquerra i fent servir l'equació $G(\alpha_x) \circ \eta_x = \eta'_x$, arribem a que

$$G(F'(f) \circ \alpha_x) \circ \eta_x = G(F'(f)) \circ G(\alpha_x) \circ \eta_x = G(F'(f)) \circ \eta'_x.$$

Amb un poc més de feina, vorem el mateix per a la banda de la dreta. Però abans, anem a recordar que com η i η' són transformacions naturals satisfan que per a tot $h \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(x, y)$,

$$G(F(h)) \circ \eta_x = \eta_y \circ h, \quad G(F'(h)) \circ \eta'_x = \eta'_y \circ h.$$

Aquestes dues igualtats les aplicarem a la nostra f a continuació.

$$\begin{aligned} G(\alpha_y \circ F(f)) \circ \eta_x &= G(\alpha_y) \circ G(F(f)) \circ \eta_x = G(\alpha_y) \circ \eta_y \circ f \\ &= \eta'_y \circ f \\ &= G(F'(f)) \circ \eta'_x. \end{aligned}$$

Així, hem demostrat que $G(F'(f) \circ \alpha_x) \circ \eta_x = G(\alpha_y \circ F(f)) \circ \eta_x$ i, per tant, per l'unicitat que ens dona la propietat universal, tenim que

$$F'(f) \circ \alpha_x = \alpha_y \circ F(f).$$

Per tant, hem vist que α és una transformació natural.

Per vore que és un isomorfisme, definirem la inversa de α_x com segueix. Per a tot $x \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ definim,

$$\beta_x = (\eta_x)^{\sharp'} \in \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F'(x), F(x)),$$

on la notació $\sharp'$ ve de la propietat universal per a l'adjunció $F' \dashv G$. Així, sabem que β_x és l'únic morfisme que satisfà l'equació $G(\beta_x) \circ \eta'_x = \eta_x$.

I per vore que $\beta_x = \alpha_x^{-1}$ sols hem de comprovar que

$$\alpha_x \circ \beta_x = \text{id}_{F'(x)} \quad \text{i} \quad \beta_x \circ \alpha_x = \text{id}_{F(x)}$$

Fem primer l'equació de l'esquerra. Podem aplicar la propietat universal en l'adjunció $F' \dashv G$ i, per unicitat, tenim que és prou vore que

$$G(\alpha_x \circ \beta_x) \circ \eta'_x = \eta'_x.$$

Desenvolupant la part de l'esquerra ens ix fàcilment que

$$G(\alpha_x \circ \beta_x) \circ \eta'_x = G(\alpha_x) \circ G(\beta_x) \circ \eta'_x = G(\alpha_x) \circ \eta_x = \eta'_x.$$

Per tant, hem vist la primera igualtat que volíem vore, vejam la segona. Anàlogament, podem aplicar propietat universal en l'adjunció $F \dashv G$ i, per unicitat, és prou vore que

$$G(\beta_x \circ \alpha_x) \circ \eta_x = \eta_x.$$

Desenvolupant de nou la part de l'esquerra ens ix fàcilment que,

$$G(\beta_x \circ \alpha_x) \circ \eta_x = G(\beta_x) \circ G(\alpha_x) \circ \eta_x = G(\beta_x) \circ \eta'_x = \eta_x.$$

Comprovades ambdues igualtats, podem concloure que per a tot $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $\beta_x = \alpha_x^{-1}$ i en particular, α_x és un isomorfisme i, per tant, α és un isomorfisme natural. $\square$

El següent corol·lari i la seua demostració són anàlegs a l'anterior.

Corol·lari 3.2. *Siuen $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ categories i siuen $(\mathcal{C}, \mathcal{D}, F, G, \eta, \varepsilon)$ i $(\mathcal{C}, \mathcal{D}, F, G', \eta', \varepsilon')$ dues adjuncions, és a dir, F és adjunta per l'esquerra de G i de G' . Llavors, existeix un isomorfisme natural $\alpha : G \Longrightarrow G'$.*

A continuació vorem que, donada una adjunció de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$, podem definir unes subcategories concretes de $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ que siuen equivalents.

Proposició 3.3. *Siuen $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ categories i siga $(\mathcal{C}, \mathcal{D}, F, G, \eta, \varepsilon)$ una adjunció, llavors, podem definir unes subcategories, $\mathcal{C}^0$ i $\mathcal{D}^0$ on,*

$$\text{Ob}(\mathcal{C}^0) = \{x \in \text{Ob}(\mathcal{C}) : \eta_x \text{ és un isomorfisme}\}$$

$$\text{Ob}(\mathcal{D}^0) = \{y \in \text{Ob}(\mathcal{D}) : \varepsilon_y \text{ és un isomorfisme}\}$$

I els morfismes entre objectes i les composicions entre morfismes són els mateixos que en $\mathcal{C}$ i en $\mathcal{D}$ respectivament. A més, $\mathcal{C}^0 \simeq \mathcal{D}^0$, és a dir, són categories equivalents.

Demostració. Primer, $\mathcal{C}^0$ i $\mathcal{D}^0$ són categories, ja que estan formats per una col·lecció d'objectes i de morfismes i els morfismes satisfan les quatre propietats que han de satisfer en ser els morfismes d'altra categoria.

Ara, definim $\eta^0 = (\eta_x^0)_{x \in \text{Ob}(\mathcal{C}^0)}$ on $\eta_x^0 = \eta_x$ i també $\varepsilon^0 = (\varepsilon_y^0)_{y \in \text{Ob}(\mathcal{D}^0)}$ on $\varepsilon_y^0 = \varepsilon_y$.

Per la definició de $\mathcal{C}^0$ i de $\mathcal{D}^0$ tenim que cada η_x^0 i cada ε_y^0 són isomorfismes.

Ara considerem F^0 la restricció d' F a $\mathcal{C}^0$, així com G^0 la restricció de G a $\mathcal{D}^0$. Clarament, aquestes assignacions són functors, ja que continuen respectant dominis i codominis, identitats i composicions.

A més, com $(\mathcal{C}, \mathcal{D}, F, G, \eta, \varepsilon)$ és una adjunció, tenim que $\eta : \text{Id}_{\mathcal{C}} \Longrightarrow G \circ F$ i $\varepsilon : F \circ G \Longrightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$ són transformacions naturals i això ens ajudarà a vore que $\eta^0 : \text{id}_{\mathcal{C}^0} \Longrightarrow G^0 \circ F^0$ i $\varepsilon^0 : F^0 \circ G^0 \Longrightarrow \text{id}_{\mathcal{D}^0}$ són transformacions naturals.

Comencem per η^0 . Siguen $x, y \in \text{Ob}(\mathbf{C}^0)$ i $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}^0}(x, y)$. Volem vore que

$$G^0(F^0(f)) \circ \eta_x^0 = \eta_y^0 \circ f.$$

Això és equivalent a que

$$G(F(f)) \circ \eta_x = \eta_y \circ f.$$

Que ja sabem que és cert, ja que η és transformació natural. El cas de ε^0 és completament anàleg. Així, ja tenim que η^0 i ε^0 són transformacions naturals, però també tenim que cada η_x^0 i cada ε_y^0 són isomorfismes. Per tant, de fet η^0 i ε^0 són isomorfismes naturals i per tant,

$$\text{id}_{\mathbf{C}^0} \cong G^0 \circ F^0 \quad \text{i} \quad \text{id}_{\mathbf{D}^0} \cong F^0 \circ G^0.$$

Així, hem vist que $\mathbf{C}^0 \simeq \mathbf{D}^0$ són equivalents. □

3.2 Composició d'adjuncions

En aquesta secció vorem com podem composar dues adjuncions.

Definició 3.5 (Composició d'adjuncions). Siguen $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ i $\mathbf{E}$ categories i $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$, $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$, $H : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{E}$ i $J : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{D}$ functors, $\eta : \text{Id}_{\mathbf{C}} \Rightarrow G \circ F$, $\varepsilon : F \circ G \Rightarrow \text{Id}_{\mathbf{D}}$, $\delta : \text{Id}_{\mathbf{D}} \Rightarrow J \circ H$, $\lambda : H \circ J \Rightarrow \text{id}_{\mathbf{E}}$ transformacions naturals tals que $(\mathbf{C}, \mathbf{D}, F, G, \eta, \varepsilon)$ i $(\mathbf{D}, \mathbf{E}, H, J, \delta, \lambda)$ són adjuncions. Definim la composició d'aquestes dues adjuncions com la tupla

$$(\mathbf{C}, \mathbf{E}, H \circ F, G \circ J, \alpha, \beta)$$

On $\alpha = (\text{id}_G * \delta * \text{id}_F) \circ \eta$ i $\beta = \lambda \circ (\text{id}_H * \varepsilon * \text{id}_J)$.

Vejam que efectivament, en aquestes condicions, aquesta tupla és una adjunció.

Proposició 3.4. *La composició d'adjuncions està ben definida, és a dir, en una situació com la de la definició, $(\mathbf{C}, \mathbf{E}, H \circ F, G \circ J, \alpha, \beta)$ és una adjunció.*

Demostració. Ja sabem que $H \circ F$ és un functor de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{E}$ en ser composició de functors. Anàlogament, $G \circ J$ és un functor de $\mathbf{E}$ en $\mathbf{C}$ en ser composició de functors.

Vejam ara que α i β són transformacions naturals. Comencem amb α . Sabem que $\delta : \text{Id}_{\mathbf{D}} \Rightarrow J \circ H$, per tant,

$$\text{id}_G * \delta * \text{id}_F : G \circ F \Rightarrow G \circ J \circ H \circ F.$$

I com també tenim que $\eta : \text{Id}_{\mathbf{C}} \Rightarrow G \circ F$, llavors,

$$\alpha = (\text{id}_G * \delta * \text{id}_F) \circ \eta : \text{Id}_{\mathbf{C}} \Rightarrow G \circ J \circ H \circ F = (G \circ J) \circ (H \circ F).$$

Com volíem vore.

Fem ara β . Sabem que $\varepsilon : F \circ G \implies \text{Id}_{\mathcal{D}}$, per tant,

$$\text{id}_H * \varepsilon * \text{id}_J : H \circ F \circ G \circ J \implies H \circ J.$$

I com també tenim que $\lambda : H \circ J \implies \text{id}_{\mathcal{E}}$, llavors,

$$\beta = \lambda \circ (\text{id}_H * \varepsilon * \text{id}_J) : H \circ F \circ G \circ J = (H \circ F) \circ (G \circ J) \implies \text{id}_{\mathcal{E}}.$$

Com volíem vore.

Ara sols ens falta per vore que se satisfan les identitats triangulars. Abans de comprovar-les, vorem l'expressió de α_x i β_y per a $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ i $y \in \text{Ob}(\mathcal{E})$.

$$\alpha_x = ((\text{id}_G * \delta * \text{id}_F) \circ \eta)_x = G(\delta_{F(x)}) \circ \eta_x.$$

$$\beta_y = (\lambda \circ (\text{id}_H * \varepsilon * \text{id}_J))_y = \lambda_y \circ H(\varepsilon_{J(y)}).$$

Vejam primer la primera igualtat. Gràcies a la Interpretació 3.1, sols hem de vore que, donat $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$,

$$\text{id}_{H(F(x))} = \beta_{H(F(x))} \circ H(F(\alpha_x)).$$

Desenvolupant α i β en el costat de la dreta, tenim que,

$$\begin{aligned} \beta_{H(F(x))} \circ H(F(\alpha_x)) &= \lambda_{H(F(x))} \circ H(\varepsilon_{J(H(F(x)))}) \circ H(F(G(\delta_{F(x)}) \circ \eta_x)) \\ &= \lambda_{H(F(x))} \circ H(\varepsilon_{J(H(F(x)))}) \circ F(G(\delta_{F(x)})) \circ H(F(\eta_x)). \end{aligned}$$

Ara, com que $\varepsilon : F \circ G \implies \text{Id}_{\mathcal{D}}$ és una transformació natural i $\delta_{F(x)} \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(x), J(H(F(x))))$, llavors

$$\varepsilon_{J(H(F(x)))} \circ F(G(\delta_{F(x)})) = \delta_{F(x)} \circ \varepsilon_{F(x)}.$$

Substituint això en l'expressió de dalt, tenim que

$$\begin{aligned} \beta_{H(F(x))} \circ H(F(\alpha_x)) &= \lambda_{H(F(x))} \circ H(\varepsilon_{J(H(F(x)))}) \circ F(G(\delta_{F(x)})) \circ H(F(\eta_x)) \\ &= \lambda_{H(F(x))} \circ H(\delta_{F(x)} \circ \varepsilon_{F(x)}) \circ H(F(\eta_x)) \\ &= \lambda_{H(F(x))} \circ H(\delta_{F(x)}) \circ H(\varepsilon_{F(x)} \circ F(\eta_x)) \\ &= \text{id}_{H(F(x))} \circ H(\text{id}_{F(x)}) = \text{id}_{H(F(x))}. \end{aligned}$$

On en la penúltima igualtat hem fet servir la primera identitat triangular de les adjuncions $H \dashv J$ i $F \dashv G$, la primera en l'objecte $F(x)$ i la segona en x .

Vejam ara la segona igualtat. De nou, per la Interpretació 3.1 sols hem de vore que, donat $y \in \text{Ob}(\mathcal{E})$,

$$\text{id}_{G(J(y))} = G(J(\beta_y)) \circ \alpha_{G(J(y))}.$$

Desenvolupant α i β en la dreta, tenim que,

$$\begin{aligned} G(J(\beta_y)) \circ \alpha_{G(J(y))} &= G(J(\lambda_y \circ H(\varepsilon_{J(y)}))) \circ G(\delta_{F(G(J(y)))}) \circ \eta_{G(J(y))} \\ &= G(J(\lambda_y)) \circ G(J(H(\varepsilon_{J(y)}))) \circ \delta_{F(G(J(y)))}) \circ \eta_{G(J(y))}. \end{aligned}$$

Ara, com que $\delta : \text{Id}_D \implies J \circ H$ és una transformació natural i $\varepsilon_{J(y)} \in \text{Hom}_D(F(G(J(y))), J(y))$, llavors,

$$J(H(\varepsilon_{J(y)})) \circ \delta_{F(G(J(y)))} = \delta_{J(y)} \circ \varepsilon_{J(y)}.$$

Substituint això en l'expressió de dalt, tenim que

$$\begin{aligned} G(J(\beta_y)) \circ \alpha_{G(J(y))} &= G(J(\lambda_y)) \circ G(J(H(\varepsilon_{J(y)})) \circ \delta_{F(G(J(y)))}) \circ \eta_{G(J(y))} \\ &= G(J(\lambda_y)) \circ G(\delta_{J(y)} \circ \varepsilon_{J(y)}) \circ \eta_{G(J(y))} \\ &= G(J(\lambda_y) \circ \delta_{J(y)}) \circ G(\varepsilon_{J(y)}) \circ \eta_{G(J(y))} \\ &= G(\text{id}_{J(y)}) \circ \text{id}_{G(J(y))} = \text{id}_{G(J(y))}. \end{aligned}$$

On en la penúltima igualtat hem fet servir la segona identitat triangular de les adjuncions $H \dashv J$ i $F \dashv G$, la primera en l'objecte y i la segona en $J(x)$.

Ara, ja hem vist totes les propietats, i podem afirmar que $(C, E, H \circ F, G \circ J, \alpha, \beta)$ és una adjunció. $\square$

3.3 Morfisme d'adjuncions

En aquesta secció vorem que podem definir una noció de morfisme entre adjuncions. També vorem que les adjuncions amb aquesta definició de morfisme d'adjuncions, formen una categoria.

Definició 3.6 (Morfisme d'adjuncions). Siguen $(C, D, F, G, \eta, \varepsilon)$ i $(C', D', F', G', \eta', \varepsilon')$ dues adjuncions. Un morfisme de l'adjunció $F \dashv G$ en l'adjunció $F' \dashv G'$ és un parell (L, K) on $L : C \longrightarrow C'$ i $K : D \longrightarrow D'$ són functors tals que,

- $L \circ G = G' \circ K$, $K \circ F = F' \circ L$.
- $\text{id}_L * \eta = \eta' * \text{id}_L$.
- $\varepsilon' * \text{id}_K = \text{id}_K * \varepsilon$.

Proposició 3.5. *les adjuncions amb els morfismes d'adjuncions, formen una categoria que denotem per Adj .*

Demostració. El primer que hem de comprovar és que els morfismes es poden compondre, és a dir, siguen $(C, D, F, G, \eta, \varepsilon)$, $(C', D', F', G', \eta', \varepsilon')$ i $(C'', D'', F'', G'', \eta'', \varepsilon'')$ tres adjuncions, (L, K) un morfisme de $F \dashv G$ en $F' \dashv G'$ i (L', K') un morfisme de $F' \dashv G'$ en $F'' \dashv G''$. Volem veure que podem definir $(L' \circ L, K' \circ K)$ com a la composició $(L, K) \circ (L', K')$ en la categoria Adj .

Notem que $L' \circ L : C \longrightarrow C''$ i $K' \circ K : D \longrightarrow D''$ són functors, en ser composició de functors. Vejam que satisfan les propietats per a ser morfisme d'adjuncions.

La primera és fàcil, el que volem vore és que

$$(L' \circ L) \circ G = G'' \circ (K' \circ K) \quad \text{i} \quad (K' \circ K) \circ F = F'' \circ (L' \circ L).$$

Desenvolupant-les i fent servir que (L, K) i (L', K') són morfismes d'adjuncions arribem ràpidament a què

$$\begin{aligned} L' \circ L \circ G &= L' \circ G' \circ K = G'' \circ K' \circ K. \\ K' \circ K \circ F &= K' \circ F' \circ L = F'' \circ L' \circ L. \end{aligned}$$

Per a la segona hem de vore que,

$$\text{id}_{L' \circ L} * \eta = \eta'' * \text{id}_{L' \circ L}.$$

Avaluant en els objectes $x \in \text{Ob}(\mathbf{C})$, això és equivalent a què,

$$L'(L(\eta_x)) = \eta''_{L'(L(x))}.$$

Però ara, com (L, K) i (L', K') són morfismes d'adjuncions, avaluant la segona condició en x i en $L(x)$ respectivament tenim que,

$$L(\eta_x) = \eta'_{L(x)} \quad \text{i} \quad L'(\eta'_{L(x)}) = \eta''_{L'(L(x))}.$$

Tot junt, arribem a que

$$L'(L(\eta_x)) = L'(\eta'_{L(x)}) = \eta''_{L'(L(x))}.$$

La tercera serà molt pareguda a la segona, hem de vore que,

$$\varepsilon'' * \text{id}_{K' \circ K} = \text{id}_{K' \circ K} * \varepsilon.$$

Avaluant en els objectes $y \in \text{Ob}(\mathbf{D})$, això és equivalent a què,

$$\varepsilon''_{K'(K(y))} = K'(K(\varepsilon_y)).$$

Però ara, com (L, K) i (L', K') són morfismes d'adjuncions, avaluant la tercera condició en y i en $K(y)$ respectivament tenim que,

$$\varepsilon'_{K(y)} = K(\varepsilon_y) \quad \text{i} \quad \varepsilon''_{K'(K(y))} = K'(\varepsilon'_{K(y)}).$$

Tot junt, arribem a que

$$\varepsilon''_{K'(K(y))} = K'(\varepsilon'_{K(y)}) = K'(K(\varepsilon_y)).$$

Per tant, els morfismes d'adjuncions es poden compondre.

Ara, que la composició és associativa la tenim gràcies al fet que la composició de functors ho és. Per a vore que la identitat és morfisme d'adjuncions hem de vore que satisfà les propietats, és a dir, siga $(\mathbf{C}, \mathbf{D}, F, G, \eta, \varepsilon)$ una adjunció, considerem $(\text{Id}_{\mathbf{C}}, \text{Id}_{\mathbf{D}})$, hem de vore que és morfisme d'adjuncions de $F \dashv G$ en $F \dashv G$. Les propietats es reduïxen a què

- $\text{Id}_C \circ G = G \circ \text{Id}_D, \text{Id}_D \circ F = F \circ \text{Id}_C.$
- $\text{id}_{\text{Id}_C} * \eta = \eta * \text{id}_{\text{Id}_C}.$
- $\varepsilon * \text{id}_{\text{Id}_D} = \text{id}_{\text{Id}_D} * \varepsilon.$

La primera és evident, ja que les identitats funtorials són neutres per a la composició. Les altres dues les tenim del corol·lari 2.1, que ens diu que id_{Id_C} és neutre per a les dues composicions de transformacions naturals.

Sols ens faltaria veure que la identitat en $\mathbf{Adj}$ és neutre per a la composició en $\mathbf{Adj}$, però és directe gràcies al fet que els functors identitats són neutres per a la composició de functors. Vistes totes les propietats, hem demostrat que $\mathbf{Adj}$ és una categoria. $\square$

Capítol 4

Exemples d'adjuncions

En aquest capítol veurem un parell d'exemples rellevants on apareix una situació d'adjunció. En la primera part estudiem la situació d'adjunció en conjunts preordenats i en la segona part estudiem una situació d'adjunció entre la categoria de conjunts i la de monoides, amb la construcció del monoide lliure.

4.1 Adjuncions en conjunts preordenats

En aquesta secció estudiarem el concepte d'adjunció en el context específic dels conjunts preordenats, una estructura fonamental en teoria de l'ordre. Els conjunts preordenats són conjunts dotats d'una relació binària reflexiva i transitiva que permet comparar elements, encara que sense garantir l'antisimetria pròpia dels ordres parcials.

A continuació vorem definicions, propietats i exemples que il·lustren com funciona una adjunció entre conjunts preordenats vistos com a categories.

Definició 4.1. Recordem que un conjunt preordenat és un parell $(P, \leq)$ on P és un conjunt i $\leq$ és una relació binària en P satisfent les següent propietats

1. Per a tot $a \in P$, $a \leq a$ (Reflexiva).
2. Per a tot $a, b, c \in P$, si $a \leq b$ i $b \leq c$, llavors $a \leq c$. (Transitiva).

Donat un conjunt preordenat $(P, \leq)$ definim la categoria $\mathbf{P}$, que tindrà com a objectes els elements de P i sols tindrà un únic morfisme d'un objecte a un altre si el primer és menor que el segon en relació a $\leq$, és a dir,

$$\text{Ob}(\mathbf{P}) = P$$

I, si $a, b \in \text{Ob}(\mathbf{P}) = P$, llavors,

$$\text{Hom}_{\mathbf{P}}(a, b) = \begin{cases} \{(a, b)\} & \text{si } a \leq b \\ \emptyset & \text{en altre cas} \end{cases}$$

Definim la composició dels morfismes de la següent manera. Siguen $a, b, c \in P$, $f \in \text{Hom}_P(a, b)$ i $g \in \text{Hom}_P(b, c)$, sabem que com a molt hi ha 1 morfisme d'un element a altre, necessàriament

$$f = (a, b) \quad \text{i} \quad g = (b, c).$$

Definirem $(b, c) \circ (a, b) = (a, c)$. La composició està ben definida per la transitivitat de la relació.

Demostrem rapidament que efectivament P és una categoria.

Que la composició és associativa és evident, ja que si $a, b, c, d \in P$ són tals que

$$a \leq b \leq c \leq d,$$

aleshores

$$((c, d) \circ (b, c)) \circ (a, b) = (b, d) \circ (a, b) = (a, d) = (c, d) \circ (c, a) = (c, d) \circ ((b, c) \circ (a, b)).$$

Així tenim l'associativitat de la composició.

Per a l'existència d'identitat és prou en notar que, com $a \leq a$ per a tot $a \in P$, sols tenim una opció, definir

$$\text{id}_a = (a, a).$$

Que la identitat és neutre per a la composició també és evident. Siguen $a, b, c \in P$ tals que $a \leq b \leq c$, llavors

$$\text{id}_b \circ (a, b) = (b, b) \circ (a, b) = (a, b) \quad \text{i} \quad (b, c) \circ \text{id}_b = (b, c) \circ (b, b) = (b, c).$$

Així ja hem vist que P és una categoria.

Notem també que la condició que P siga un conjunt preordenat no era arbitrària, ens ix de manera natural si volem una categoria on com a molt hi haja un morfisme de qualsevol objecte a qualsevol altre.

Ara vorem una caracterització que ens ajudarà a comprendre com són els functors entre dues categories associades a conjunts preordenats.

Proposició 4.1. *Siguen $(P, \leq_P)$ i $(Q, \leq_Q)$ dos conjunts preordenats. Els functors $F : P \longrightarrow Q$ són, precisament, les aplicacions monòtones de P a Q , és a dir, les aplicacions $F : P \longrightarrow Q$ tals que, per a tot $p_1, p_2 \in P$,*

$$\text{si } p_1 \leq_P p_2, \text{ llavors } F(p_1) \leq_Q F(p_2).$$

Demostració. Primer, recordem que si $F : P \longrightarrow Q$ és un functor, llavors és una assignació que envia objectes de P en objectes de Q i també morfismes de P en morfismes de Q respectant dominis i codominis. Així, si (p_1, p_2) és un morfisme de P , llavors $F((p_1, p_2))$ és un morfisme de Q de $F(p_1)$ en $F(p_2)$ i, per tant, $F((p_1, p_2)) = (F(p_1), F(p_2))$, és a dir, $F(p_1) \leq_Q F(p_2)$. Així, F és una aplicació monòtona. $\square$

Vejam ara que hauria de passar i les conseqüències que tindria l'existència d'una adjunció entre dues categories d'aquest tipus.

Proposició 4.2. *Siguen $(P, \leq_P)$ i $(Q, \leq_Q)$ dos conjunts preordenats. Siguen $F : P \longrightarrow Q$ i $G : Q \longrightarrow P$ functors, és a dir, aplicacions monòtones. Siguen $\eta : \text{id}_P \Longrightarrow G \circ F$ i $\varepsilon : F \circ G \Longrightarrow \text{id}_Q$ transformacions naturals. Llavors, per a tot $p \in P$ i per a tot $q \in Q$*

$$p \leq_P G(F(p)) \quad \text{i} \quad F(G(q)) \leq_Q q.$$

I es compleixen les identitats triangulars.

Demostració. Primer vejam la primera desigualtat. Com η és una transformació natural, tenim que $\eta = (\eta_p)_{p \in P}$ on per a cada $p \in P$, $\eta_p \in \text{Hom}_P(p, G(F(p)))$. Així, en particular, $\text{Hom}_P(p, G(F(p))) \neq \emptyset$ i, per tant, $p \leq_P G(F(p))$.

La segona desigualtat és anàloga fent servir l'existència de ε . Com ε és una transformació natural, tenim que $\varepsilon = (\varepsilon_q)_{q \in Q}$ on, per a cada $q \in Q$, $\varepsilon_q \in \text{Hom}_Q(F(G(q)), q)$. Així, en particular, $\text{Hom}_Q(F(G(q)), q) \neq \emptyset$ i, per tant, $F(G(q)) \leq_Q q$.

Així, ja hem vist les dues desigualtats que volíem.

A més, per la unicitat dels morfismes d'un objecte a altre en estes categories tenim que per a tots $p \in P$ i $q \in Q$,

$$\eta_p = (p, G(F(p))) \quad \text{i} \quad \varepsilon_q = (F(G(q)), q).$$

Vejam ara les identitats triangulars i comencem per la primera. Volem vore que per a tot $p \in P$

$$\text{id}_{F(p)} = \varepsilon_{F(p)} \circ F(\eta_p).$$

Pel que hem vist abans, això és equivalent a què

$$(F(p), F(p)) = (F(G(F(p))), F(p)) \circ (F(p), F(G(F(p)))).$$

Que sabem que és cert. La segona igualtat també serà semblant. Volem vore que per a tot $q \in Q$

$$\text{id}_{G(q)} = G(\varepsilon_q) \circ \eta_{G(q)}.$$

De nou, pel que hem vist abans, això és equivalent a què

$$(G(q), G(q)) = (G(F(G(q))), G(q)) \circ (G(q), G(F(G(q)))).$$

Que també sabem que és cert. Així, hem demostrat les identitats triangulars. $\square$

La conclusió d'aquesta proposició és que si tenim $(P, \leq_P)$ i $(Q, \leq_Q)$ dos conjunts preordenats, existirà una adjunció entre les categories P i Q si, i sols si, existeixen aplicacions monòtones $F : P \longrightarrow Q$ i $G : Q \longrightarrow P$ tals que,

$$p \leq_P G(F(p)) \quad \text{i} \quad F(G(q)) \leq_Q q.$$

Esta és, precisament, la definició d'una connexió de Galois entre els dos conjunts preordenats. És a dir, donar una adjunció entre les categories associades a conjunts preordenats és equivalent a establir una connexió de Galois entre els conjunts preordenats. De fet, a conitnuació vorem l'equivalència d'aquesta última condició amb la definició de la connexió de Galois (punt 2 de la Proposició 4.3).

Proposició 4.3. *Siguen $(P, \leq_P)$ i $(Q, \leq_Q)$ dos conjunts preordenats. Siguen $F : P \longrightarrow Q$ i $G : Q \longrightarrow P$ functors, és a dir, aplicacions monòtones. Llavors, són equivalents*

1. *Per a tot $p \in P$, $p \leq_P G(F(p))$ i per a tot $q \in Q$, $F(G(q)) \leq_Q q$.*
2. *Per a tots $p \in P$ i $q \in Q$ tenim que $F(p) \leq_Q q \iff p \leq_P G(q)$.*

Demostració. [1. $\implies$ 2.]. Siguen $p \in P$ i $q \in Q$. Suposem que $F(p) \leq_Q q$. Com G és monòtona tenim que $G(F(p)) \leq_P G(q)$. A més, per 1, també tenim que $p \leq_P G(F(p))$. Per transitivitat de $\leq_P$ tenim que,

$$p \leq_P G(F(p)) \leq_P G(q) \text{ i, per tant, } p \leq_P G(q).$$

Ara suposarem que $p \leq_P G(q)$. Com F és monòtona tenim que $F(p) \leq_Q F(G(q))$. A més, per 1, també sabem que $F(G(q)) \leq_Q q$. Per transitivitat de $\leq_Q$ tenim que,

$$F(p) \leq_Q (F(G(q))) \leq_Q q \text{ i, per tant, } F(p) \leq_Q q.$$

Així, ja hem vist 2.

[2. $\implies$ 1.]. Siga $p \in P$. Prenim $q = F(p)$. Aleshores, per la reflexivitat de $\leq_Q$, tenim que $F(p) \leq_Q q$ i per 2 tenim que

$$p \leq_P G(q) = G(F(p)).$$

Per a l'altra desigualtat procedim igual. Siga $q \in Q$, prenim $p = G(q)$. Aleshores, per la reflexivitat de $\leq_P$ tenim que $p \leq_P G(q)$ i per 2 tenim que

$$F(G(q)) = F(p) \leq_Q q.$$

Així, ja hem vist 1. □

4.1.1 Un exemple concret

Vejam ara un cas particular d'aquest exemple. Aquest és el cas en el que considerem les parts d'un conjunt A amb la inclusió de conjunts, és a dir, $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$. Construïm ara una F i una G de tal forma que formen una adjunció.

Proposició 4.4. *Siga A un conjunt. Considerem el conjunt preordenat $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$. Siga també $X \subseteq A$ un subconjunt fixat. Podem considerar les següents aplicacions,*

$$\begin{aligned} F_X : (\mathcal{P}(A), \subseteq) &\longrightarrow (\mathcal{P}(A), \subseteq) \\ B &\longrightarrow B \cap X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_X : (\mathcal{P}(A), \subseteq) &\longrightarrow (\mathcal{P}(A), \subseteq) \\ B &\longrightarrow B \cup (A \setminus X) \end{aligned}$$

Estes dues aplicacions donen una connexió de Galois en $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$.

Demostració. Per vore que F_X és monòtona sols hem de recordar que si $B, C \subseteq A$ són tals que $B \subseteq C$, llavors $B \cap X \subseteq C \cap X$, ja que, d'una banda, $B \cap X \subseteq B \subseteq C$ i, d'altra banda, $B \cap X \subseteq X$. Així, F_X és monòtona.

Per vore que G_X és monòtona sols hem de recordar que si $B, C \subseteq A$ són tals que $B \subseteq C$, llavors $B \cup (A \setminus X) \subseteq C \cup (A \setminus X)$, ja que, d'una banda, $B \subseteq C \subseteq C \cup (A \setminus X)$ i, d'altra banda, $(A \setminus X) \subseteq C \cup (A \setminus X)$. Així, G_X és monòtona.

Vejam ara la condició 1 de la Proposició 4.3. Siga $B \subseteq A$, hem de vore que

$$B \subseteq G_X(F_X(B)) \quad \text{i} \quad F_X(G_X(B)) \subseteq B.$$

Calculem qui són aquests conjunts,

$$G_X(F_X(B)) = G_X(B \cap X) = (B \cap X) \cup (A \setminus X) = B \cup (A \setminus X).$$

Així, clarament tenim la primera desigualtat. Per altra banda,

$$F_X(G_X(B)) = F_X(B \cup (A \setminus X)) = (B \cup (A \setminus X)) \cap X = B \cap X.$$

I, per tant, també tenim la segona desigualtat. □

4.2 Monoides lliures

En aquesta subsecció estudiarem el concepte de monoide lliure, una construcció fonamental en àlgebra i teoria de categories que ens permet generar monoides a partir d'un conjunt donat sense imposar més relacions que les estrictament necessàries per a satisfer les propietats d'un monoide. El monoide lliure sobre un conjunt A és, essencialment, el conjunt de totes les cadenes finites (o paraules) formades pels elements d' A , equipat amb l'operació de concatenació i la paraula buida com a element neutre. Aquesta construcció és un exemple clàssic d'objecte lliure en teoria de categories, i la seua propietat universal ens permet entendre i treballar un exemple concret d'adjuncions en un context algebraic.

Definició 4.2. Siga A un conjunt. Una paraula de longitud $n \in \mathbb{N}$ sobre A és una aplicació $v : n \longrightarrow A$, on entenem n com el conjunt $n = \{0, \dots, n-1\}$, i en particular, $0 = \emptyset$. Denotem per $\text{Hom}(n, A)$ com el conjunt de totes les paraules de longitud n sobre A . Finalment, definim

$$A^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Hom}(n, A).$$

Aquest és el conjunt de totes les paraules sobre A .

El conjunt A^* té una estructura interessant. Primer, cal mencionar que $\text{Hom}(0, A)$ sols té un element que anomenarem la *paraula buida* i la denotarem per λ . També podem definir la *concatenació* de paraules. Aquesta serà una operació binària interna que denotarem per $\wedge$ i que la definirem formalment a continuació. Siguen $n, m \in \mathbb{N}$ i $v : n \longrightarrow A$ i $w : m \longrightarrow A$ dues paraules sobre A , definim la seua *concatenació*, denotada per $v \wedge w$, com la paraula

$$v \wedge w : (n + m) \longrightarrow A$$

$$k \longrightarrow \begin{cases} v(k) & \text{si } k < n \\ w(k - n) & \text{si } k \geq n \end{cases}$$

Abans que res, notem que λ és neutre per a $\wedge$, o en altres paraules, la paraula buida és neutre per a la composició de paraules. Notem també que $\wedge$ no és commutativa, és a dir, en general no es té perquè satisfer la igualtat $v \wedge w = w \wedge v$. Tot i això, també hem d'observar que $\wedge$ sí que és associativa, més concretament, si $n, m, h \in \mathbb{N}$, $v : n \longrightarrow A$, $w : m \longrightarrow A$ i $u : h \longrightarrow A$ són tres paraules sobre A , llavors

$$v \wedge (w \wedge u)(k) = (v \wedge w) \wedge u(k) = \begin{cases} v(k) & \text{si } k < n \\ w(k - n) & \text{si } n + m > k \geq n \\ u(k - n - m) & \text{si } k \geq n + m \end{cases}$$

Així, en particular, $\mathbf{A}^* = (A^*, \wedge, \lambda)$ té estructura de monoide, que anomenarem *monoide lliure sobre A* .

Notació 4.1. Siga A un conjunt, $0 \neq n \in \mathbb{N}$ i $v : n \longrightarrow A$ una paraula no buida sobre A , també la podem escriure com a concatenació de lletres on cada lletra és l'avaluació de v en algun natural on estiga definit. Concretament escriurem,

$$v = v_0 v_1 \dots v_{n-1} \quad \text{on } v_i = v(i) \text{ són les lletres de } v.$$

A banda, a les paraules de longitud 1, per diferenciar-les dels elements d' A , els posarem entre parèntesi. És a dir, si $a \in A$, la paraula de longitud 1 que té com a única lletra a a la denotarem per (a) .

A continuació introduïm l'aplicació d'inserció de generadors.

Definició 4.3. Siga A un conjunt. Definim l'aplicació d'*inserció de generadors* com l'aplicació

$$\begin{aligned}\eta_A(a) : 1 &\longrightarrow A \\ 0 &\longrightarrow a\end{aligned}$$

És a dir, η_A pren elements d' A i els interpreta com la paraula (a) , de longitud 1, on l'única lletra que té és precisament a .

A continuació introduïm el resultat més important dels monoides lliures, la seua propietat universal.

Proposició 4.5 (Propietat universal dels monoides lliures). *Siga A un conjunt i $\mathbf{M} = (M, \cdot_M, 1_M)$ un monoide. Siga $f : A \longrightarrow M$ una aplicació. Llavors, existeix un únic homomorfisme de monoides $f^\# : \mathbf{A}^* \longrightarrow \mathbf{M}$ tal que,*

$$f^\# \circ \eta_A = f.$$

Demostració. Siga $v = v_0 v_1 \dots v_{n-1} \in A^*$, definim la imatge de $f^\#$ sobre v com,

$$f^\#(v) = \begin{cases} f(v_0) \cdot_M f(v_1) \cdot_M \dots \cdot_M f(v_{n-1}) & \text{si } v \neq \lambda \\ 1_M & \text{si } v = \lambda \end{cases}$$

Comprovem ara que aquesta definició satisfà tot el que volem.

Primer, $f^\#$ és un homomorfisme de monoides, ja que

$$f^\#(\lambda) = 1_M \quad \text{i} \quad f^\#(v \wedge w) = f^\#(v) \cdot_M f^\#(w).$$

Aquestes dues propietats ixen directament de la definició de $f^\#$.

Comprovem ara que $f^\# \circ \eta_A = f$. Siga $a \in A$, aleshores

$$f^\# \circ \eta_A(a) = f^\#((a)) = f(a).$$

També de la definició de $f^\#$.

Comprovem ara la unicitat, és a dir, suposem que $f' : \mathbf{A}^* \longrightarrow \mathbf{M}$ és un homomorfisme de monoides tal que $f' \circ \eta_A = f$. Llavors, en ser f' homomorfisme de monoides ha de satisfer que

$$f'(\lambda) = 1_M.$$

A més, com $f' \circ \eta_A = f$, sabem que f' sobre les paraules de longitud 1 s'ha de comportar com f . És a dir, si (a) és una paraula de longitud 1 sobre A que té com a única lletra $a \in A$ llavors,

$$f'((a)) = f' \circ \eta_A(a) = f(a).$$

Finalment, si v és una paraula sobre A de longitud 2 o més, escrivim $v = v_0 v_1 \dots v_{n-1}$, és a dir, $v = (v_0) \wedge (v_1) \wedge \dots \wedge (v_{n-1})$. Així, com f' és homomorfisme de monoides, ha de respectar l'operació interna dels monoides, i, per tant,

$$\begin{aligned} f'(v) &= f'((v_0) \wedge (v_1) \wedge \dots \wedge (v_{n-1})) \\ &= f'((v_0)) \cdot_M f'((v_1)) \cdot_M \dots \cdot_M f'((v_{n-1})) \\ &= f(v_0) \cdot_M f(v_1) \cdot_M \dots \cdot_M f(v_{n-1}) \\ &= f^\sharp(v). \end{aligned}$$

Així, necessàriament $f' = f^\sharp$, i tenim la unicitat. $\square$

Vista la propietat universal dels monoides lliures, ja podem afirmar que existeix una adjunció de **Set** a **Mon**. A continuació, vorem explícitament com és aquesta adjunció i demostrarem que ho és de forma explícita.

Corol·lari 4.1. *Siguen A, B conjunts i $f : A \longrightarrow B$ una aplicació. Llavors existeix un únic homomorfisme de monoides que denotarem per $f^\circledast : \mathbf{A}^* \longrightarrow \mathbf{B}^*$ tal que,*

$$f^\circledast = (\eta_B \circ f)^\sharp.$$

Intuïtivament, el que fa aquest homomorfisme de monoides, $f^\circledast$, és prendre una paraula en A , separar-la per lletres, aplicar f a cada lletra, i finalment ajuntar-ho tot per formar una paraula de la mateixa longitud sobre B .

Proposició 4.6. *Considerem ara les categories **Set**, que té per objectes els conjunts i per morfismes les aplicacions entre conjunts, i la categoria **Mon**, que té per objectes els monoides i per morfismes els homomorfismes de monoides. Tenim les següents propietats,*

1. *Existeix un funtor d'oblit, $U : \mathbf{Mon} \longrightarrow \mathbf{Set}$ tal que, si $\mathbf{M} = (M, \cdot_M, 1_M)$ i $\mathbf{N} = (N, \cdot_N, 1_N)$ dos monoides i f un homomorfisme de monoides entre ells,*

$$U(\mathbf{M}) = M \quad i \quad U(f) = f.$$

És a dir, U s'oblida de l'estructura que tenen els monoides i els veu com a conjunts.

2. *Existeix un funtor $F : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Mon}$ tal que, si A, B conjunts i $f : A \longrightarrow B$ una aplicació de A fins a B , llavors,*

$$F(A) = (A^*, \wedge, \lambda) = \mathbf{A}^* \quad i \quad F(f) = f^\circledast.$$

3. *Existeix una adjunció del tipus $F \dashv U$.*

Demostració. 1. Que U assigna objectes i morfismes de **Mon** en objectes i morfismes de **Set** és evident. Vejam ara que satisfà les propietats per a ser funtor. Siguen $\mathbf{M} = (M, \cdot_M, 1_M)$ i $\mathbf{N} = (N, \cdot_N, 1_N)$ dos monoides i f un homomorfisme de monoides entre ells. En particular, f és una aplicació de M en N i, per tant,

$$U(f) = f \in \text{Hom}_{\text{Set}}(M, N) = \text{Hom}_{\text{Set}}(U(\mathbf{M}), U(\mathbf{N})).$$

A continuació, siga $\mathbf{M} = (M, \cdot_M, 1_M)$ un monoide i $\text{id}_{\mathbf{M}}$ l'homomorfisme identitat de monoides. Notem que, per a cada $x \in M$, $\text{id}_{\mathbf{M}}(x) = x$. Així,

$$U(\text{id}_{\mathbf{M}}) = \text{id}_{\mathbf{M}} = \text{id}_M.$$

Ja que també porta a tot $x \in M$ en si mateixa. Així, U preserva identitats.

Finalment, siguen $\mathbf{M} = (M, \cdot_M, 1_M)$, $\mathbf{N} = (N, \cdot_N, 1_N)$ i $\mathbf{H} = (H, \cdot_H, 1_H)$ monoides i $f : M \rightarrow N$ i $g : N \rightarrow H$ dos homomorfismes de monoides, llavors

$$U(f \circ g) = f \circ g.$$

Per definició de U , però això és exactament el que volíem vore. Així, U preserva composicions.

Vistes totes les propietats, hem demostrat que U és un funtor.

2. Que F assigna objectes i morfismes de **Set** en objectes i morfismes de **Mon** és evident. Vejam ara que satisfà les propietats per a ser funtor. Siguen A, B conjunts i $f : A \rightarrow B$ una aplicació d' A en B . Pel Corol·lari 4.1 sabem que,

$$F(f) = f^{\textcircled{A}} \in \text{Hom}_{\text{Mon}}(\mathbf{A}^*, \mathbf{B}^*) = \text{Hom}_{\text{Mon}}(F(A), F(B)).$$

A continuació, siga A un conjunt i id_A l'aplicació identitat en A en **Set**. És a dir, l'aplicació d' A en A que envia cada $a \in A$ en si mateixa. Tenim les següents igualtats

$$F(\text{id}_A) = \text{id}_A^{\textcircled{A}} = \text{id}_{\mathbf{A}^*} = \text{id}_{F(A)}.$$

On la segona igualtat la tenim d'observar que ambdues aplicacions envien cada paraula sobre A en si mateixa, $\text{id}_{\mathbf{A}^*}$ en ser la identitat en $\mathbf{A}^*$, i $\text{id}_A^{\textcircled{A}}$ en enviar cada lletra a si mateixa. Així, F preserva identitats.

Finalment, siguen A, B, C conjunts i $f : A \rightarrow B$ i $g : B \rightarrow C$ dues aplicacions.

Volem comprovar que,

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

O equivalentment, que,

$$(g \circ f)^{\textcircled{A}} = g^{\textcircled{A}} \circ f^{\textcircled{A}}.$$

Vejam que actuen igual en les paraules. Ambdues porten la paraula buida d' A^* en la paraula buida de C^* en ser homomorfismes de monoides. Siga $v = v_0 v_1 \dots v_{n-1} \in A^*$ una paraula no buida llavors,

$$(g \circ f)^{\textcircled{A}}(v) = g(f(v_0))g(f(v_1))\dots g(f(v_{n-1})).$$

$$g^{\textcircled{A}} \circ f^{\textcircled{A}}(v) = g^{\textcircled{A}}(f(v_0)f(v_1)\dots f(v_{n-1})) = g(f(v_0))g(f(v_1))\dots g(f(v_{n-1})).$$

Com que $(g \circ f)^{\textcircled{A}}$ i $g^{\textcircled{A}} \circ f^{\textcircled{A}}$ fan les mateixes assignacions, deduïm que són el mateix homomorfisme, i per tant hem vist que F preserva composicions.

Vistes totes les propietats, deduïm que F és un funtor.

3. Per definir l'adjunció hem de definir la unitat i la counitat. La unitat serà $\eta = (\eta_A)_{A \in \text{Ob}(\text{Set})}$ les insercions de generadors introduïdes a la Definició 4.3. La counitat serà $\varepsilon = (\varepsilon_{\mathbf{M}})_{\mathbf{M} \in \text{Ob}(\text{Mon})}$, on

$$\varepsilon_{\mathbf{M}} = \text{id}_{\mathbf{M}}^{\sharp}.$$

Vejam ara que efectivament, són transformacions naturals. Comencem per η . Volem que $\eta : \text{id}_{\text{Set}} \Rightarrow U \circ F$. Per tant, ha de satisfer que $\eta_A \in \text{Hom}_{\text{Set}}(A, U(F(A)))$. Però $U(F(A)) = A^*$ i $\eta_A \in \text{Hom}_{\text{Set}}(A, A^*)$. Així, hem vist la primera condició. Vejam ara que satisfà la condició de naturalitat. Siguen A, B conjunts i $f : A \rightarrow B$ una aplicació, volem vore que

$$U(F(f)) \circ \eta_A = \eta_B \circ f.$$

Desenvolupant la banda de l'esquerra obtenim que,

$$U(F(f)) \circ \eta_A = f^{\textcircled{A}} \circ \eta_A = (\eta_B \circ f)^{\sharp} \circ \eta_A = \eta_B \circ f.$$

On l'última igualtat la tenim gràcies al fet que ja hem demostrat propietat universal per a monoides. Així, η és transformació natural d' id_{Set} en $U \circ F$.

Considerem ara el cas d' ε . Volem que $\varepsilon : F \circ U \Rightarrow \text{id}_{\text{Mon}}$. Per tant, ha de satisfer que $\varepsilon_{\mathbf{M}} \in \text{Hom}_{\text{Mon}}(F(U(\mathbf{M})), \mathbf{M})$. Però recordem que,

$$\varepsilon_{\mathbf{M}} = \text{id}_{\mathbf{M}}^{\sharp} \in \text{Hom}_{\text{Mon}}(\mathbf{M}^*, \mathbf{M}) = \text{Hom}_{\text{Mon}}(F(M), \mathbf{M}) = \text{Hom}_{\text{Mon}}(F(U(\mathbf{M})), \mathbf{M}).$$

Així, hem vist la primera condició. Vejam ara la condició de naturalitat. Siguen $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ monoides i $f : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{N}$ un homomorfisme de monoides. Volem vore que

$$f \circ \varepsilon_{\mathbf{M}} = \varepsilon_{\mathbf{N}} \circ F(U(f)).$$

Vejam que se satisfà la igualtat mirant que fan les mateixes assignacions. Siga λ_M la paraula buida en M^* , aleshores

$$f \circ \varepsilon_{\mathbf{M}}(\lambda_M) = f(1_M) = 1_N.$$

$$\varepsilon_{\mathbf{N}} \circ F(U(f))(\lambda_M) = \varepsilon_{\mathbf{N}}(\lambda_N) = 1_N.$$

Siga ara $v = v_0 v_1 \dots v_{n-1} \in M^*$ una paraula no buida, llavors

$$f \circ \varepsilon_{\mathbf{M}}(v) = f(v_0 \cdot_M v_1 \cdot_M \dots \cdot_M v_{n-1}) = f(v_0) \cdot_N f(v_1) \cdot_N \dots \cdot_N f(v_{n-1}).$$

$$\varepsilon_{\mathbf{N}} \circ F(U(f))(v) = \varepsilon_{\mathbf{N}}(f(v_0)f(v_1)\dots f(v_{n-1})) = f(v_0) \cdot_N f(v_1) \cdot_N \dots \cdot_N f(v_{n-1}).$$

On hem fet servir que f és homomorfisme de monoides per afirmar que porta 1_M en 1_N i per dir que respecta els productes dels monoides.

Vist això, ja tenim que ε és transformació natural de $F \circ U$ en id_{Mon} .

Vejam ara que se satisfan les igualtats triangulars.

Per a la primera, siga A un conjunt, volem vore que,

$$\text{id}_{F(A)} = \varepsilon_{F(A)} \circ F(\eta_A).$$

Vejam que actuen igual sobre les paraules en A . Siga $v = v_0 v_1 \dots v_{n-1} \in A^*$ una paraula no buida sobre A . Parlarem un poc abans de notació, ja que $\eta_A : A \rightarrow A^*$ i, per tant, $F(\eta_A) : A^* \rightarrow (\mathbf{A}^*)^*$. El conjunt $(A^*)^*$ són les paraules sobre A^* , és a dir, són paraules que tenen com a lletres paraules en A . Ara no podem fer servir la juxtaposició com a $\wedge$ per concatenar lletres, ja que podria donar lloc a ambigüitats, farem servir claudàtors per a denotar la separació de les lletres en $(A^*)^*$ mentre que en A^* farem servir juxtaposició. Amb això aclarit, vejам la igualtat.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{F(A)} \circ F(\eta_A)(v) &= \varepsilon_{\mathbf{A}^*}([\eta_A(v_0)][\eta_A(v_1)] \dots [\eta_A(v_{n-1})]) \\ &= \varepsilon_{\mathbf{A}^*}([(v_0)][(v_1)] \dots [(v_{n-1})]) \\ &= (v_0) \cdot_{\mathbf{A}^*} (v_1) \cdot_{\mathbf{A}^*} \dots \cdot_{\mathbf{A}^*} (v_{n-1}) \\ &= (v_0) \wedge (v_1) \wedge \dots \wedge (v_{n-1}) \\ &= v. \end{aligned}$$

On hem fet servir que $\cdot_{\mathbf{A}^*} = \wedge$ per la definició d' $\mathbf{A}^* = (A^*, \wedge, \lambda)$. Si denotem també λ_{A^*} com la paraula buida en $(A^*)^*$, llavors,

$$\varepsilon_{F(A)} \circ F(\eta_A)(\lambda) = \varepsilon_{\mathbf{A}^*}(\lambda_{A^*}) = \lambda.$$

Així, ja tenim la primera igualtat.

Vejam ara la segona. Siga $\mathbf{M} = (M, \cdot_M, 1_M)$ un monoide, volem vore que,

$$\text{id}_{U(\mathbf{M})} = U(\varepsilon_{\mathbf{M}}) \circ \eta_{U(\mathbf{M})}.$$

O equivalentment, simplificant les U , volem vore que,

$$\text{id}_M = \varepsilon_{\mathbf{M}} \circ \eta_M.$$

I substituint $\varepsilon_{\mathbf{M}} = \text{id}_M^\#$ obtenim,

$$\text{id}_M = \text{id}_M^\# \circ \eta_M.$$

Que és precisament l'equació que ens dona la propietat universal per a monoides lliures. Per tant, ja hem vist les dues identitats triangulars i podem afirmar que $(\text{Set}, \text{Mon}, F, U, \eta, \varepsilon)$ és una adjunció. $\square$

Nota 4.1. Tot i que el monoide lliure és el concepte d'objecte lliure més senzill, amb les mateixes tècniques que les d'aquest exemple, es pot estendre fàcilment la construcció d'una àlgebra lliure per a qualsevol signatura (conjunt d'operacions) i comprovar que aquest objecte té la propietat universal. És a dir, seguint la construcció de l'exemple vist en aquesta secció, es pot aconseguir una adjunció entre **Set** i una categoria d'àlgebres $\mathbf{Alg}(\Sigma)$, per a una signatura Σ donada.

Capítol 5

Mònades

En teoria de categories, les mònades apareixen sovint com una estructura algebraica que encapsula una noció de computació amb context o efectes, des de punts de vista tan diversos com la programació funcional, la lògica i la geometria algebraica. Però més enllà de la seua definició formal com un endofunctor amb dues transformacions naturals, anàlegs a la noció de composició i unitat en un monoide, que satisfan certes lleis, les mònades tenen una arrel estructural profunda: tota mònada pot veure's com el fruit d'una adjunció. Aquest capítol explora aquesta connexió fonamental entre adjuncions i mònades.

Definició 5.1 (Mònada). Siga $\mathbf{C}$ una categoria. Una mònada sobre $\mathbf{C}$ és una 3-tupla $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$, on T és un endofunctor en $\mathbf{C}$, és a dir, $T : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$, i $\eta : \text{Id}_{\mathbf{C}} \Longrightarrow T$ i $\mu : T \circ T \Longrightarrow T$ són transformacions naturals satisfent que

$$\mu \circ (\mu * \text{id}_T) = \mu \circ (\text{id}_T * \mu) \quad \text{i} \quad \text{id}_T = \mu \circ (\eta * \text{id}_T) = \mu \circ (\text{id}_T * \eta).$$

Vejam en detall les conseqüències de les identitats de les mònades.

Interpretació 5.1. Suposant que tenim una mònada com la de la Definició 5.1. Desenvoluparem primer la igualtat de l'esquerra,

$$\mu * \text{id}_T : T \circ T \circ T \Longrightarrow T \circ T.$$

$$\text{id}_T * \mu : T \circ T \circ T \Longrightarrow T \circ T.$$

Ara prenim un objecte $x \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ i considerem les següents igualtats,

$$(\mu * \text{id}_T)_x = (\text{id}_T)_{T(x)} \circ T(\mu_x) = T(\mu_x).$$

$$(\text{id}_T * \mu)_x = (T((\text{id}_T)_x) \circ (\mu_{T(x)})) = \mu_{T(x)}.$$

Per tant, la igualtat $\mu \circ (\mu * \text{id}_T) = \mu \circ (\text{id}_T * \mu)$ ens diu que, per a tot $x \in \text{Ob}(\mathbf{C})$, tenim que

$$\boxed{\mu_x \circ \mu_{T(x)} = \mu_x \circ T(\mu_x)}.$$

Fem ara l'altra igualtat.

$$\eta * \text{id}_T : T \Longrightarrow T \circ T.$$

$$\text{id}_T * \eta : T \Longrightarrow T \circ T.$$

De nou, prenim un objecte $x \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ i considerem la següent igualtat

$$(\eta * \text{id}_T)_x = T(\eta_x) \circ (\text{id}_T)_{\text{id}(x)} = T(\eta_x).$$

$$(\text{id}_T * \eta)_x = (T((\text{id}_T)_x) \circ (\eta_{T(x)})) = \eta_{T(x)}.$$

Per tant, la igualtat $\text{id}_T = \mu \circ (\eta * \text{id}_T) = \mu \circ (\text{id}_T * \eta)$ ens diu que, per a tot $x \in \text{Ob}(\mathbf{C})$, tenim que

$$\boxed{(\text{id}_T)_x = \text{id}_{T(x)} = \mu_x \circ T(\eta_x) = \mu_x \circ \eta_{T(x)}}.$$

Mònada associada a una adjunció

En aquest punt, podem vore que hi ha una forma natural de definir una mónada a partir d'una adjunció. Vejam com fer-ho i comprovem que efectivament, aquesta definició és una mónada.

Definició 5.2 (Mònada induïda per una adjunció). Siga $(\mathbf{C}, \mathbf{D}, F, G, \eta, \varepsilon)$ una adjunció. Podem definir una mónada sobre $\mathbf{C}$ induïda per l'adjunció com $\mathbb{T}_{F \dashv G} = (T, \eta, \mu)$ on,

$$T = G \circ F, \quad \mu = \text{id}_G * \varepsilon * \text{id}_F.$$

Comprovem que aquesta definició és, efectivament, una mónada.

Proposició 5.1. *La mónada induïda per una adjunció està ben definida, és a dir, en una situació com la de la Definició 5.2, $\mathbb{T}_{F \dashv G} = (T, \eta, \mu)$ és una mónada.*

Demostració. Primer, com $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ i $G : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{C}$ són functors, tenim que T és un endofunctor en $\mathbf{C}$. A més, $\eta : \text{Id}_{\mathbf{C}} \Longrightarrow G \circ F = T$ és una transformació natural del tipus que volem i $\mu : G \circ F \circ G \circ F = T \circ T \Longrightarrow G \circ F = T$ és una transformació natural també del tipus desitjat. Així sols ens cal comprovar les igualtats de les mónades.

Ara, posarem en detall les dues igualtats en funció dels elements de l'adjunció. Volem vore que, per a tot $x \in \text{Ob}(\mathbf{C})$

$$\mu_x \circ \mu_{T(x)} = \mu_x \circ T(\mu_x) \quad \text{i} \quad \text{id}_{T(x)} = \mu_x \circ T(\eta_x) = \mu_x \circ \eta_{T(x)}.$$

O equivalentment, substituint T i μ per la seua definició i tenint en compte que com $\mu = \text{id}_G * \varepsilon * \text{id}_F$, llavors $\mu_x = G(\varepsilon_{F(x)})$,

$$\begin{aligned} G(\varepsilon_{F(x)}) \circ G(\varepsilon_{F(G(F(x)))}) &= G(\varepsilon_{F(x)}) \circ G(F(G(\varepsilon_{F(x)}))) \quad \text{i} \\ \text{id}_{G(F((x)))} &= G(\varepsilon_{F(x)}) \circ G(F(\eta_x)) = G(\varepsilon_{F(x)}) \circ \eta_{G(F(x))}. \end{aligned}$$

Vejam primer la segona igualtat, que és més fàcil. Per les identitats triangulars tenim que, si $x \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ i $y \in \text{Ob}(\mathbf{D})$, llavors

$$\text{id}_{F(x)} = \varepsilon_{F(x)} \circ F(\eta_x) \quad \text{i} \quad \text{id}_{G(y)} = G(\varepsilon_y) \circ \eta_{G(y)}.$$

Composant amb G en la primera igualtat i considerant l'objecte $y = F(x)$ en la segona arribem a què

$$\begin{aligned} G(\text{id}_{F(x)}) &= \text{id}_{G(F(x))} = G(\varepsilon_{F(x)} \circ F(\eta_x)) = G(\varepsilon_{F(x)}) \circ G(F(\eta_x)) \quad \text{i} \\ \text{id}_{G(F(x))} &= G(\varepsilon_{F(x)}) \circ \eta_{G(F(x))}. \end{aligned}$$

Que són exactament les igualtats que volíem vore.

Fem ara la primera igualtat. Aquesta és conseqüència del fet que, per a tot $y \in \text{Ob}(\mathbf{D})$, tenim que

$$\varepsilon_y \circ \varepsilon_{F(G(y))} = \varepsilon_y \circ F(G(\varepsilon_y)).$$

Anem a demostrar aquesta igualtat, per fer això farem servir la llei d'intercanvi així que primer ens hem d'escriure el que volem com una igualtat entre transformacions naturals. Per a fer això notem que la igualtat que volem vore és l'avaluació en tot $y \in \text{Ob}(\mathbf{D})$ de la igualtat

$$\varepsilon \circ (\varepsilon * \text{id}_{F \circ G}) = \varepsilon \circ (\text{id}_{F \circ G} * \varepsilon).$$

Anem a vore una per una que aquestes dues transformacions naturals són iguals a $\varepsilon * \varepsilon$. Notem ara que,

$$\varepsilon \circ (\varepsilon * \text{id}_{F \circ G}) = (\text{id}_{\text{id}_D} * \varepsilon) \circ (\varepsilon * \text{id}_{F \circ G}).$$

I ací es pot aplicar la llei d'intercanvi, així,

$$\varepsilon \circ (\varepsilon * \text{id}_{F \circ G}) = (\text{id}_{\text{id}_D} * \varepsilon) \circ (\varepsilon * \text{id}_{F \circ G}) = (\text{id}_{\text{id}_D} \circ \varepsilon) * (\varepsilon \circ \text{id}_{F \circ G}) = \varepsilon * \varepsilon.$$

On l'última igualtat la tenim per la proposició que ens diu que les identitats són neutres per a la composició vertical de transformacions naturals.

Fem ara l'altra igualtat de manera anàloga,

$$\varepsilon \circ (\text{id}_{F \circ G} * \varepsilon) = (\varepsilon * \text{id}_{\text{id}_D}) \circ (\text{id}_{F \circ G} * \varepsilon).$$

On també podem aplicar la llei d'intercanvi i concloure que,

$$\varepsilon \circ (\text{id}_{F \circ G} * \varepsilon) = (\varepsilon * \text{id}_{\text{id}_D}) \circ (\text{id}_{F \circ G} * \varepsilon) = (\varepsilon \circ \text{id}_{F \circ G}) * (\text{id}_{\text{id}_D} \circ \varepsilon) = \varepsilon * \varepsilon.$$

Per tant, ja hem demostrat la igualtat que volíem.

Una vegada demostrada l'anterior igualtat, sols hem de composar amb G i considerar l'objecte $y = F(x)$ i arribem a què

$$G(\varepsilon_{F(x)}) \circ G(\varepsilon_{F(G(F(x)))}) = G(\varepsilon_{F(x)}) \circ G(F(G(\varepsilon_{F(x)}))).$$

Just com volíem vore. Concloem, doncs, que $\mathbb{T}_{F \dashv G}$ és una mònada sobre $\mathbf{C}$. □

5.1 Categoria de Kleisli d'una mònada

Hem vist que, a partir d'una adjunció, podem construir una mònada de manera natural. Ara volem recórrer el camí invers: donada una mònada, podem recuperar una adjunció que la genera? I no qualsevol adjunció, sinó una que reproduísca exactament la mònada original. Per a construir una adjunció necessitem dues categories. Com que la mònada està definida sobre una categoria donada, volem que la segona categoria estiga estretament relacionada amb aquesta. Una opció natural és la categoria de Kleisli: una construcció que conserva els mateixos objectes que la categoria original, però modifica els morfismes i la seua composició per reflectir l'estructura de la mònada.

A continuació definirem la categoria de Kleisli associada a una mònada.

Definició 5.3 (Categoria de Kleisli d'una mònada). Siguen $\mathbf{C}$ una categoria i $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ una mònada sobre $\mathbf{C}$. Anem a definir la categoria $\mathbf{Kl}(\mathbb{T})$. Els objectes seran els mateixos que els de $\mathbf{C}$, és a dir,

$$\text{Ob}(\mathbf{Kl}(\mathbb{T})) = \text{Ob}(\mathbf{C}).$$

Ara, donats $x, y \in \text{Ob}(\mathbf{C})$, un morfisme en la categoria $\mathbf{Kl}(\mathbb{T})$ és un morfisme de x en $T(y)$ en la categoria $\mathbf{C}$, és a dir, per a tots $x, y \in \text{Ob}(\mathbf{C})$

$$\text{Hom}_{\mathbf{Kl}(\mathbb{T})}(x, y) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(x, T(y)).$$

Definim per a cada $x \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ el morfisme identitat en $\mathbf{Kl}(\mathbb{T})$ com

$$\text{id}_x^{\mathbf{Kl}(\mathbb{T})} = \eta_x \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(x, T(x)).$$

També hem de definir la composició de morfismes. Siguen $x, y, z \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ i $f \in \text{Hom}_{\mathbf{Kl}(\mathbb{T})}(x, y)$, $g \in \text{Hom}_{\mathbf{Kl}(\mathbb{T})}(y, z)$, definim

$$g \circ^{\mathbf{Kl}(\mathbb{T})} f = \mu_z \circ T(g) \circ f.$$

Comprovem que aquesta definició és una categoria.

Proposició 5.2. Siguen $\mathbf{C}$ una categoria i $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ una mònada sobre $\mathbf{C}$. Llavors $\mathbf{Kl}(\mathbb{T})$ és una categoria.

Demostració. Primer, anem a comprovar que aquesta composició està ben definida. $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(x, T(y))$ i $g \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(y, T(z))$, així, $T(g) \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(T(y), T \circ T(z))$. Per tant, $T(g) \circ f$ té sentit i, a més, $T(g) \circ f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(x, T \circ T(z))$. Ara recordem que $\mu : T \circ T \Rightarrow T$ és una transformació natural, i per tant $\mu_z \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(T \circ T(z), T(z))$. Així, $\mu_z \circ T(g) \circ f$ té sentit i a més $\mu_z \circ T(g) \circ f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(x, T(z)) = \text{Hom}_{\mathbf{Kl}(\mathbb{T})}(x, z)$. Per tant, concloem que la composició té sentit.

Ara comprovarem que la composició en $\mathbf{Kl}(\mathbb{T})$ és associativa. Siguen $x, y, z, t \in \text{Ob}(\mathbf{C})$, $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(x, T(y))$, $g \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(y, T(z))$ i $h \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(z, T(t))$, volem vore que,

$$(h \circ^{\mathbf{Kl}(\mathbb{T})} g) \circ^{\mathbf{Kl}(\mathbb{T})} f = h \circ^{\mathbf{Kl}(\mathbb{T})} (g \circ^{\mathbf{Kl}(\mathbb{T})} f).$$

Desenvolupem a banda i banda,

$$\begin{aligned}(h \circ^{\text{Kl}(\mathbb{T})} g) \circ^{\text{Kl}(\mathbb{T})} f &= (\mu_t \circ T(h) \circ g) \circ^{\text{Kl}(\mathbb{T})} f \\ &= \mu_t \circ T(\mu_t \circ T(h) \circ g) \circ f \\ &= \mu_t \circ T(\mu_t) \circ T(T(h)) \circ T(g) \circ f.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h \circ^{\text{Kl}(\mathbb{T})} (g \circ^{\text{Kl}(\mathbb{T})} f) &= h \circ^{\text{Kl}(\mathbb{T})} (\mu_z \circ T(g) \circ f) \\ &= \mu_t \circ T(h) \circ \mu_z \circ T(g) \circ f.\end{aligned}$$

Notem que aquestes dues expressions són iguals si verifiquem la següent

$$\mu_t \circ T(\mu_t) \circ T(T(h)) = \mu_t \circ T(h) \circ \mu_z.$$

Però ara recordem que $\mu : T \circ T \Rightarrow T$ transformació natural i que $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(z, T(t))$. Així, per la condició de naturalitat,

$$T(h) \circ \mu_z = \mu_{T(t)} \circ T(T(h)).$$

Per tant, l'únic que queda per fer és vore que

$$\mu_t \circ T(\mu_t) = \mu_t \circ \mu_{T(t)}.$$

Però això és exactament el que ens diu la Interpretació 5.1. Açò demostra l'associativitat de la composició en $\text{Kl}(\mathbb{T})$.

Sols ens faltaria vore que la identitat és neutre per a la composició, és a dir, siguen $x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ i $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, T(y))$, hem de vore que,

$$f \circ^{\text{Kl}(\mathbb{T})} \text{id}_x^{\text{Kl}(\mathbb{T})} = f = \text{id}_y^{\text{Kl}(\mathbb{T})} \circ^{\text{Kl}(\mathbb{T})} f.$$

Desenvolupant aquestes expressions arribem a què

$$\mu_y \circ T(f) \circ \eta_x = f = \mu_y \circ T(\eta_y) \circ f.$$

Per la Interpretació 5.1, tenim la segona igualtat. Anem a treballar la primera. Recordem que $\eta : \text{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow T$ és una transformació natural i que $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, T(y))$. Així

$$T(f) \circ \eta_x = \eta_{T(y)} \circ f.$$

Substituint en la primera igualtat, el que volem vore és

$$\mu_y \circ \eta_{T(y)} \circ f = f.$$

Que és exactament el que ens diu la Interpretació 5.1. Vistes totes les propietats, hem demostrat que $\text{Kl}(\mathbb{T})$ és una categoria. $\square$

Ara que ja hem definit la categoria de Klesisli, definirem els functors que formaran part de l'adjunció i vorem que són adjunts.

Proposició 5.3. *Siguen $\mathcal{C}$ una categoria i $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ una mònada sobre $\mathcal{C}$, llavors, existeixen functors $F_{\mathbb{T}} : \mathcal{C} \longrightarrow \text{Kl}(\mathbb{T})$ i $G_{\mathbb{T}} : \text{Kl}(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathcal{C}$ tals que $F_{\mathbb{T}}$ és adjunt per l'esquerra de $G_{\mathbb{T}}$.*

Demostració. Primer, anem a definir qui seran $F_{\mathbb{T}}$ i $G_{\mathbb{T}}$, després comprovarem que són functors i que $F_{\mathbb{T}}$ és adjunt per l'esquerra de $G_{\mathbb{T}}$.

Siguen $x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$. Definim

$$F_{\mathbb{T}}(x) = x \quad \text{i} \quad F_{\mathbb{T}}(f) = \eta_y \circ f.$$

Siguen $x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $f \in \text{Hom}_{\text{Kl}(\mathbb{T})}(x, y)$. Definim

$$G_{\mathbb{T}}(x) = T(x) \quad \text{i} \quad G_{\mathbb{T}}(f) = \mu_y \circ T(f).$$

Ara vorem que són functors, vejам la primera propietat,

$$F_{\mathbb{T}}(f) = \eta_y \circ f.$$

Com que $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ i $\eta_y \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, T(y))$, tenim que $\eta_y \circ f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, T(y)) = \text{Hom}_{\text{Kl}(\mathbb{T})}(F_{\mathbb{T}}(x), F_{\mathbb{T}}(y))$. Ara amb la $G_{\mathbb{T}}$,

$$G_{\mathbb{T}}(f) = \mu_y \circ T(f).$$

Com que $T(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T(x), T(T(y)))$ i $\mu_y \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T(T(y)), T(y))$, llavors $\mu_y \circ T(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T(x), T(y)) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(G_{\mathbb{T}}(x), G_{\mathbb{T}}(y))$.

Vista la primera propietat, vejам la segona. Siga $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$

$$F_{\mathbb{T}}(\text{id}_x) = \eta_x \circ \text{id}_x = \eta_x = \text{id}_x^{\text{Kl}(\mathbb{T})} = \text{id}_{F_{\mathbb{T}}(x)}^{\text{Kl}(\mathbb{T})}.$$

$$G_{\mathbb{T}}(\text{id}_x^{\text{Kl}(\mathbb{T})}) = G_{\mathbb{T}}(\eta_x) = \mu_x \circ T(\eta_x) = \text{id}_{T(x)} = \text{id}_{G_{\mathbb{T}}(x)}.$$

On la penúltima igualtat la tenim gràcies a la Interpretació 5.1. Ara vejам la tercera propietat. Siguen $x, y, z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ i $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z)$, volem vore que

$$F_{\mathbb{T}}(g \circ f) = F_{\mathbb{T}}(g) \circ^{\text{Kl}(\mathbb{T})} F_{\mathbb{T}}(f).$$

Desenvolupem el costat de la dreta,

$$\begin{aligned} F_{\mathbb{T}}(g) \circ^{\text{Kl}(\mathbb{T})} F_{\mathbb{T}}(f) &= \mu_{F_{\mathbb{T}}(z)} \circ T(F_{\mathbb{T}}(g)) \circ F_{\mathbb{T}}(f) \\ &= \mu_z \circ T(\eta_z \circ g) \circ \eta_y \circ f \\ &= \mu_z \circ T(\eta_z) \circ T(g) \circ \eta_y \circ f \\ &= T(g) \circ \eta_y \circ f. \end{aligned}$$

On hem fet servir de nou la Interpretació 5.1 per fer fora $\mu_z \circ T(\eta_z) = \text{id}_{T(x)}$.

Ara, com η és transformació natural, tenim que $T(g) \circ \eta_y = \eta_z \circ g$, i per tant

$$F_{\mathbb{T}}(g) \circ^{\text{Kl}(\mathbb{T})} F_{\mathbb{T}}(f) = T(g) \circ \eta_y \circ f = \eta_z \circ g \circ f = F_{\mathbb{T}}(g \circ f).$$

Com volíem vore. Fem el mateix ara amb la $G_{\mathbb{T}}$. Siguen $x, y, z \in \text{Ob}(\mathbb{C})$, $f \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(x, T(y))$ i $g \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(y, T(z))$, volem vore que

$$G_{\mathbb{T}}(g \circ^{\text{Kl}(\mathbb{T})} f) = G_{\mathbb{T}}(g) \circ G_{\mathbb{T}}(f).$$

Desenvolupem ara el costat de l'esquerra,

$$\begin{aligned} G_{\mathbb{T}}(g \circ^{\text{Kl}(\mathbb{T})} f) &= G_{\mathbb{T}}(\mu_z \circ T(g) \circ f) \\ &= \mu_z \circ T(\mu_z \circ T(g) \circ f) \\ &= \mu_z \circ T(\mu_z) \circ T(T(g)) \circ T(f) \\ &= \mu_z \circ \mu_{T(z)} \circ T(T(g)) \circ T(f). \end{aligned}$$

On hem fet servir de nou la Interpretació 5.1 en l'última igualtat. Ara, com que μ és transformació natural, tenim que $T(g) \circ \mu_y = \mu_{T(z)} \circ T(T(g))$, i, per tant,

$$\begin{aligned} G_{\mathbb{T}}(g \circ^{\text{Kl}(\mathbb{T})} f) &= \mu_z \circ \mu_{T(z)} \circ T(T(g)) \circ T(f) \\ &= \mu_z \circ T(g) \circ \mu_y \circ T(f) \\ &= G_{\mathbb{T}}(g) \circ G_{\mathbb{T}}(f). \end{aligned}$$

D'on podem concloure que tant $F_{\mathbb{T}}$ com $G_{\mathbb{T}}$ són functors. Ara vorem que existeix la situació d'adjunció de l'enunciat.

Per definir l'adjunció, primer dir que prendrem η com a la unitat. Per altra banda, anem a definir les components de ε , la counitat de l'adjunció. Siga $x \in \text{Ob}(\mathbb{C})$, definim

$$\varepsilon_x = \text{id}_{T(x)}.$$

Anem a vore que la definició és consistent. Com volem que $(\mathbb{C}, \text{Kl}(\mathbb{T}), F_{\mathbb{T}}, G_{\mathbb{T}}, \eta, \varepsilon)$ siga una adjunció, necessitem que $\eta : \text{Id}_{\mathbb{C}} \implies G_{\mathbb{T}} \circ F_{\mathbb{T}}$ siga una transformació natural, i per a això notem que, si prenim $x \in \text{Ob}(\mathbb{C})$

$$\eta_x \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(x, T(x)) = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(x, G_{\mathbb{T}} \circ F_{\mathbb{T}}(x)).$$

I també, si prenim $x, y \in \text{Ob}(\mathbb{C})$ i $f \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(x, y)$, llavors volem vore que

$$G_{\mathbb{T}}(F_{\mathbb{T}}(f)) \circ \eta_x = \eta_y \circ f.$$

Desenvolupant la part de l'esquerra de la igualtat arribem a què

$$\begin{aligned}
G_{\mathbb{T}}(F_{\mathbb{T}}(f)) \circ \eta_x &= G_{\mathbb{T}}(\eta_y \circ f) \circ \eta_x \\
&= \mu_y \circ T(\eta_y \circ f) \circ \eta_x \\
&= \mu_y \circ T(\eta_y) \circ T(f) \circ \eta_x \\
&= T(f) \circ \eta_x \\
&= \eta_y \circ f.
\end{aligned}$$

On hem fet servir la Interpretació 5.1 per a dir que $\mu_y \circ T(\eta_y) = \text{id}_{T(x)}$ i en l'última igualtat hem fet servir que η és una transformació natural de $\text{Id}_{\mathbb{C}}$ en T .

Així, η és una transformació natural de $\text{Id}_{\mathbb{C}}$ en $G_{\mathbb{T}} \circ F_{\mathbb{T}}$.

Ara hem de vore que ε és una transformació natural de $F_{\mathbb{T}} \circ G_{\mathbb{T}}$ en $\text{id}_{\text{Kl}(\mathbb{T})}$. Siga doncs $x \in \text{Ob}(\mathbb{C})$

$$\varepsilon_x = \text{id}_{T(x)} \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(T(x), T(x)) = \text{Hom}_{\text{Kl}(\mathbb{T})}(T(x), x) = \text{Hom}_{\text{Kl}(\mathbb{T})}(F_{\mathbb{T}} \circ G_{\mathbb{T}}(x), x).$$

I també, si prenim $x, y \in \text{Ob}(\mathbb{C})$ i $f \in \text{Hom}_{\text{Kl}(\mathbb{T})}(x, y) = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(x, T(y))$, llavors volem vore que

$$f \circ^{\text{Kl}(\mathbb{T})} \varepsilon_x = \varepsilon_y \circ^{\text{Kl}(\mathbb{T})} F_{\mathbb{T}}(G_{\mathbb{T}}(f)).$$

Desenvolupant la part de la dreta de la igualtat arribem a què

$$\begin{aligned}
\varepsilon_y \circ^{\text{Kl}(\mathbb{T})} F_{\mathbb{T}}(G_{\mathbb{T}}(f)) &= \text{id}_{T(y)} \circ^{\text{Kl}(\mathbb{T})} F_{\mathbb{T}}(\mu_y \circ T(f)) \\
&= \text{id}_{T(y)} \circ^{\text{Kl}(\mathbb{T})} (\eta_{T(y)} \circ \mu_y \circ T(f)) \\
&= \mu_y \circ T(\text{id}_{T(y)}) \circ \eta_{T(y)} \circ \mu_y \circ T(f) \\
&= \mu_y \circ \eta_{T(y)} \circ \mu_y \circ T(f) \\
&= \mu_y \circ T(f).
\end{aligned}$$

On en l'última igualtat hem fet servir la Interpretació 5.1 de les igualtats de les mònades.

D'altra banda, desenvolupant la part de l'esquerra,

$$f \circ^{\text{Kl}(\mathbb{T})} \varepsilon_x = \mu_y \circ T(f) \circ \varepsilon_x = \mu_y \circ T(f) \circ \text{id}_{T(x)} = \mu_y \circ T(f).$$

Així, hem comprovat que ε és transformació natural de $F_{\mathbb{T}} \circ G_{\mathbb{T}}$ en $\text{id}_{\text{Kl}(\mathbb{T})}$.

Per tindre l'adjunció sols ens falta vore que se satisfan les identitats triangulars, anem a explicitar-les, siga $x \in \text{Ob}(\mathbb{C})$

$$\text{id}_{F_{\mathbb{T}}(x)}^{\text{Kl}(\mathbb{T})} = \varepsilon_{F_{\mathbb{T}}(x)} \circ^{\text{Kl}(\mathbb{T})} F_{\mathbb{T}}(\eta_x) \quad \text{i} \quad \text{id}_{G_{\mathbb{T}}(x)} = G_{\mathbb{T}}(\varepsilon_x) \circ \eta_{G_{\mathbb{T}}(x)}.$$

Fem primer la primera, simplifiquem un poc a banda i banda de la igualtat,

$$\text{id}_{F_{\mathbb{T}}(x)}^{\text{Kl}(\mathbb{T})} = \text{id}_x^{\text{Kl}(\mathbb{T})} = \eta_x.$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{F_{\mathbb{T}}(x)} \circ \text{Kl}(\mathbb{T}) F_{\mathbb{T}}(\eta_x) &= \text{id}_{T(x)} \circ \text{Kl}(\mathbb{T}) (\eta_{T(x)} \circ \eta_x) \\
&= \mu_x \circ T(\text{id}_{T(x)}) \circ \eta_{T(x)} \circ \eta_x \\
&= \mu_x \circ \text{id}_{T(T(x))} \circ \eta_{T(x)} \circ \eta_x \\
&= \mu_x \circ \eta_{T(x)} \circ \eta_x \\
&= \eta_x.
\end{aligned}$$

On hem fet servir que $\mu_x \circ \eta_{T(x)} = \text{id}_{T(x)}$ que ho tenim gràcies a la Interpretació 5.1.

Fem ara la segona. De nou, simplifiquem a banda i banda,

$$\text{id}_{G_{\mathbb{T}}(x)} = \text{id}_{T(x)}.$$

$$\begin{aligned}
G_{\mathbb{T}}(\varepsilon_x) \circ \eta_{G_{\mathbb{T}}(x)} &= G_{\mathbb{T}}(\text{id}_{T(x)}) \circ \eta_{T(x)} \\
&= \mu_x \circ T(\text{id}_{T(x)}) \circ \eta_{T(x)} \\
&= \mu_x \circ \text{id}_{T(T(x))} \circ \eta_{T(x)} \\
&= \mu_x \circ \eta_{T(x)} \\
&= \text{id}_{T(x)}.
\end{aligned}$$

On l'última igualtat és gràcies a la Interpretació 5.1.

Comprovades totes les condicions, hem demostrat que la 6-tupla $(\mathbf{C}, \text{Kl}(\mathbb{T}), F_{\mathbb{T}}, G_{\mathbb{T}}, \eta, \varepsilon)$ és una adjunció. $\square$

En la proposició següent veurem que l'adjunció que hem construït no és una qualsevol: és especial en el sentit que, si considerem la mònada induïda per aquesta adjunció, recuperem exactament la mònada original.

Proposició 5.4. *Siguen $\mathbf{C}$ una categoria, $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ una mònada sobre $\mathbf{C}$. Siga*

$$(\mathbf{C}, \text{Kl}(\mathbb{T}), F_{\mathbb{T}}, G_{\mathbb{T}}, \eta, \varepsilon)$$

l'adjunció de la Proposició 5.3. Llavors, la mònada induïda per aquesta adjunció és precisament $\mathbb{T}$, és a dir,

$$\mathbb{T} = \mathbb{T}_{F_{\mathbb{T}} \dashv G_{\mathbb{T}}}.$$

Demostració. Recordem que $\mathbb{T}_{F_{\mathbb{T}} \dashv G_{\mathbb{T}}} = (G_{\mathbb{T}} \circ F_{\mathbb{T}}, \eta, \text{id}_{G_{\mathbb{T}}} * \varepsilon * \text{id}_{F_{\mathbb{T}}})$. Hem de veure que això és igual a $\mathbb{T}$ component a component.

Primer, hem de veure que $T = G_{\mathbb{T}} \circ F_{\mathbb{T}}$, per fer això vejam que fan les mateixes assignacions als objectes i als morfismes. Siga $x \in \text{Ob}(\mathbf{C})$

$$G_{\mathbb{T}} \circ F_{\mathbb{T}}(x) = G_{\mathbb{T}}(x) = T(x).$$

Així, sobre els objectes actuen igual, vegem-ho ara per als morfismes, siguen $x, y \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ i $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(x, y)$

$$G_{\mathbb{T}} \circ F_{\mathbb{T}}(f) = G_{\mathbb{T}}(\eta_y \circ f) = \mu_y \circ T(\eta_y \circ f) = \mu_y \circ T(\eta_y) \circ T(f) = T(f).$$

On hem fet servir que

$$\mu_y \circ T(\eta_y) = \text{id}_{T(t)}$$

gràcies a la Interpretació 5.1.

Vist això, hem demostrat que $T = G_{\mathbb{T}} \circ F_{\mathbb{T}}$. A més, com $\eta = \eta$ sols falta vore que,

$$\mu = \text{id}_{G_{\mathbb{T}}} * \varepsilon * \text{id}_{F_{\mathbb{T}}}.$$

O equivalentment, avaluant a tot $x \in \text{Ob}(\mathbf{C})$,

$$\mu_x = G_{\mathbb{T}}(\varepsilon_{F_{\mathbb{T}}(x)}).$$

Desenvolupem el costat de la dreta,

$$G_{\mathbb{T}}(\varepsilon_{F_{\mathbb{T}}(x)}) = G_{\mathbb{T}}(\varepsilon_x) = G_{\mathbb{T}}(\text{id}_{T(x)}) = \mu_x \circ T(\text{id}_{T(x)}) = \mu_x \circ \text{id}_{T(T(x))} = \mu_x.$$

Així, ja hem vist que en totes les components $\mathbb{T} = \mathbb{T}_{F_{\mathbb{T}} \rightarrow G_{\mathbb{T}}}$ i, per tant, són la mateixa mònada. Just com volíem vore. $\square$

5.2 Categoria d'àlgebres d'Eilenberg-Moore d'una mònada

Ara veurem l'altra construcció per a obtindre una adjunció a partir d'una mònada. Si la categoria de Kleisli mantenia els objectes originals i modificava els morfismes i la composició per incorporar l'efecte de la mònada, la construcció d'Eilenberg i Moore segueix una estratègia oposada. En aquest cas, mantindrem els morfismes originals intactes, però enriquirem els objectes, que ara seran parells (x, v) , on x és un objecte de la categoria de partida i v és una estructura addicional que fa que x respecte la mònada, és a dir, que satisfà certes propietats de compatibilitat amb l'estructura de la mònada.

Aquesta perspectiva ens permet definir una nova categoria, anomenada categoria d'àlgebres d'Eilenberg-Moore, on els objectes tenen una estructura algebraica associada a la mònada, però els morfismes són simplement els de la categoria original que preserven aquesta estructura.

Definim la categoria d'àlgebres d'Eilenberg-Moore associada a una mònada.

Definició 5.4 (Categoria d'àlgebres d'Eilenberg-Moore d'una mònada). Siguen $\mathbf{C}$ una categoria i $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ una mònada sobre $\mathbf{C}$. Anem a definir la categoria $\text{Alg}(\mathbb{T})$. Els objectes seran totes les possibles parelles (x, v) tals que $x \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ i $v \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(T(x), x)$ que satisfan dues propietats,

$$1) v \circ T(v) = v \circ \mu_x \quad \text{i} \quad 2) v \circ \eta_x = \text{id}_x.$$

(Notació, al morfisme li posem v en comptes d' f , ja que en aquests contextos diem que v és una valoració). A un parell (x, v) l'anomenarem àlgebra d'Eilenberg-Moore. Els morfismes entre (x, v^x) , (y, v^y) dues àlgebres d'Eilenberg-Moore en $\text{Alg}(\mathbb{T})$ són tots els possibles morfismes $f \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(x, y)$ tals que,

$$f \circ v^x = v^y \circ T(f).$$

A aquests morfismes en $\text{Alg}(\mathbb{T})$ els anomenarem $\mathbb{T}$ -homomorfismes, i els composarem igual que ho feiem en $\mathbb{C}$.

Comprovem que aquesta definició és una categoria.

Proposició 5.5. *Siguen $\mathbb{C}$ una categoria i $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ una mònada sobre $\mathbb{C}$. Llavors $\text{Alg}(\mathbb{T})$ és una categoria.*

Demostració. Primer, definim per a cada àlgebra d'Eilenberg-Moore (x, v) el morfisme identitat en $\text{Alg}(\mathbb{T})$ com id_x . A continuació vorem que satisfà la condició per ser un $\mathbb{T}$ -homomorfisme de (x, v) a (x, v) , ja que

$$\text{id}_x \circ v^x = v^x \circ T(\text{id}_x).$$

Ara anem a vore que es poden compondre els $\mathbb{T}$ -homomorfismes igual que ho fem en $\mathbb{C}$. Siguen $(x, v^x), (y, v^y), (z, v^z)$ àlgebres d'Eilenberg-Moore, $f \in \text{Hom}_{\text{Alg}(\mathbb{T})}((x, v^x), (y, v^y))$ i $g \in \text{Hom}_{\text{Alg}(\mathbb{T})}((y, v^y), (z, v^z))$, és a dir, $f \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(x, y)$ i $g \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(y, z)$ tals que,

$$f \circ v^x = v^y \circ T(f) \quad \text{i} \quad g \circ v^y = v^z \circ T(g).$$

Tot el que hem de vore és que $(g \circ f) \circ v^x = v^z \circ T(g \circ f)$. Açò ix immediat en substituir, ja que

$$g \circ f \circ v^x = g \circ v^y \circ T(f) = v^z \circ T(g) \circ T(f) = v^z \circ T(g \circ f).$$

Que la composició és associativa ho tenim perquè la composició en $\mathbb{C}$ ho és.

Que la identitat és neutre per a la composició també ve heretat de què ho és en $\mathbb{C}$.

Per tant, vistes totes les propietats, hem demostrat que $\text{Alg}(\mathbb{T})$ és una categoria. $\square$

Ara que ja hem definit la categoria $\text{Alg}(\mathbb{T})$, definirem els functors que formaran part de l'adjunció i vorem que són adjunts.

Proposició 5.6. *Siguen $\mathbb{C}$ una categoria i $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ una mònada sobre $\mathbb{C}$.*

1. *Existeix un functor d'oblit, $U : \text{Alg}(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que, si (x, v^x) i (y, v^y) són àlgebres d'Eilenberg-Moore i f un $\mathbb{T}$ -homomorfisme entre elles, aleshores*

$$U((x, v)) = x \quad \text{i} \quad U(f) = f.$$

2. Existeix un funtor $F : \mathbf{C} \longrightarrow \text{Alg}(\mathbb{T})$ tal que, si $x, y \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ i $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(x, y)$, llavors,

$$F(x) = (T(x), \mu_x) \quad \text{i} \quad F(f) = T(f).$$

3. Existeix una adjunció tal que $F \dashv U$.

Demostració. 1. Per vore que U és funtor vejam que satisfà les propietats dels funtors. Notem que U està ben definit, ja que si f és un $\mathbb{T}$ -homomorfisme entre (x, v^x) i (y, v^y) , en particular,

$$U(f) = f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(x, y) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(U((x, v^x)), U((y, v^y))).$$

per la definició de $\mathbb{T}$ -homomorfisme.

Notem ara que, ja que el $\mathbb{T}$ -homomorfisme identitat de (x, v^x) és id_x , i per tant

$$U(\text{id}_x) = \text{id}_x = \text{id}_{U((x, v^x))}.$$

És a dir U preserva identitats.

Finalment, hem de vore que U respecta composicions. Siguen $(x, v^x), (y, v^y), (z, v^z)$ àlgebres d'Eilenberg-Moore, $f \in \text{Hom}_{\text{Alg}(\mathbb{T})}((x, v^x), (y, v^y))$ i $g \in \text{Hom}_{\text{Alg}(\mathbb{T})}((y, v^y), (z, v^z))$. Volem vore que,

$$U(g \circ f) = U(g) \circ U(f).$$

Però desenvolupant per la definició d' U a banda i banda això és equivalent a

$$g \circ f = g \circ f,$$

que és cert. Vistes totes les propietats, podem afirmar que U és funtor.

2. Abans de vore que F és un funtor, hem de vore que està ben definit, és a dir, que per a tots $x, y \in \text{Ob}(\mathbf{C})$, $(T(x), \mu_x)$ és una àlgebra d'Eilenberg-Moore i que si $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(x, y)$, llavors $T(f)$ és un $\mathbb{T}$ -homomorfisme de $(T(x), \mu_x)$ a $(T(y), \mu_y)$. Recordem que les condicions per tal que $(T(x), \mu_x)$ siga una àlgebra d'Eilenberg-Moore són,

$$1) \mu_x \circ T(\mu_x) = \mu_x \circ \mu_{T(x)} \quad \text{i} \quad 2) \mu_x \circ \eta_{T(x)} = \text{id}_{T(x)}.$$

Que les tenim les dues gràcies a la Interpretació 5.1.

Ara, per vore que $T(f)$ és un $\mathbb{T}$ -homomorfisme, hem de comprovar que,

$$T(f) \circ \mu_{T(x)} = \mu_{T(y)} \circ T(T(f)).$$

Que és certa, ja que μ és una transformació natural i $T(f) \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(T(x), T(y))$. Vejam ara que F és funtor.

Vejam que T preserva identitats. Si $x \in \text{Ob}(\mathbf{C})$, llavors $T(\text{id}_x) = \text{id}_{T(x)}$. Per tant,

$$F(\text{id}_x) = T(\text{id}_x) = \text{id}_{T(x)} = \text{id}_{F(x)}.$$

On tenim la última igualtat ja que $\text{id}_{T(x)}$ és un $\mathbb{T}$ -homomorfisme.

Finalment, comprovem que F respecta composicions. Siguen $x, y, z \in \text{Ob}(\mathbb{C})$, $f \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(x, y)$ i $g \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(y, z)$. Volem vore que,

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

Però desenvolupant per la definició d' F a banda i banda això és equivalent a

$$T(g \circ f) = T(g) \circ T(f).$$

Que és cert, ja que T és funtor. Vistes totes les propietats, podem afirmar que F és funtor.

3. De nou, per a definir l'adjunció, primer prendrem η com a la unitat. Anem ara a definir les components de ε , la counitat de l'adjunció. Siga (x, v) una àlgebra d'Eilenberg-Moore, definim,

$$\varepsilon_{(x,v)} = v.$$

Anem a vore que la definició és consistent. Com volem que $(\mathbb{C}, \text{Alg}(\mathbb{T}), F, U, \eta, \varepsilon)$ siga una adjunció, necessitem que $\eta : \text{Id}_{\mathbb{C}} \Longrightarrow U \circ F$ siga una transformació natural i per a això notem que, si prenim $x \in \text{Ob}(\mathbb{C})$,

$$\eta_x \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(x, T(x)) = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(x, U \circ F(x)).$$

I també, si prenim $x, y \in \text{Ob}(\mathbb{C})$ i $f \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(x, y)$, llavors volem vore que

$$U(F(f)) \circ \eta_x = \eta_y \circ f.$$

Desenvolupant la part de l'esquerra de la igualtat arribem a què

$$U(F(f)) \circ \eta_x = U(T(f)) \circ \eta_x = T(f) \circ \eta_x = \eta_y \circ f.$$

On l'última igualtat es deu al fet que η és una transformació natural de $\text{Id}_{\mathbb{C}}$ en T .

Ara vejам que ε és transformació natural de $F \circ U$ en $\text{id}_{\text{Alg}(\mathbb{T})}$. Siga doncs $(x, v) \in \text{Ob}(\text{Alg}(\mathbb{T}))$,

$$\varepsilon_{(x,v)} = v \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(T(x), x).$$

I el que volem vore és que

$$\varepsilon_{(x,v)} \in \text{Hom}_{\text{Alg}(\mathbb{T})}(F(U((x, v))), (x, v)) = \text{Hom}_{\text{Alg}(\mathbb{T})}((T(x), \mu_x), (x, v)).$$

Que $\varepsilon_{(x,v)} \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(T(x), x)$ ja ho tenim, sols ens falta vore que v satisfà la propietat de ser $\mathbb{T}$ -homomorfisme de $(T(x), \mu_x)$ a (x, v) que és,

$$v \circ \mu_x = v \circ T(v).$$

Però això és exactament la primera igualtat que satisfà v per tal que (x, v) siga una àlgebra d'Eilenberg-Moore. Ara també, si prenim $(x, v^x), (y, v^y)$ dues àlgebres d'Eilenberg-Moore i f un $\mathbb{T}$ -homomorfisme de la primera en la segona hem de vore que,

$$f \circ \varepsilon_{(x, v^x)} = \varepsilon_{(y, v^y)} \circ F(U(f)).$$

Desenvolupem el costat de la dreta,

$$\varepsilon_{(y, v^y)} \circ F(U(f)) = v^y \circ F(f) = v^y \circ T(f) = f \circ v^x = f \circ \varepsilon_{(x, v^x)}.$$

On la penúltima igualtat la tenim pel fet que f és un $\mathbb{T}$ -homomorfisme.

Així hem comprovat que ε és una transformació natural de $F \circ U$ en $\text{id}_{\text{Alg}(\mathbb{T})}$.

Per tindre l'adjunció sols ens falta vore que se satisfan les identitats triangulars, anem a explicitar la primera, siga $x \in \text{Ob}(\mathbb{C})$, aleshores s'ha de satisfer que

$$\text{id}_{F(x)} = \varepsilon_{F(x)} \circ F(\eta_x).$$

Desenvolupem la banda de la dreta,

$$\varepsilon_{F(x)} \circ F(\eta_x) = \varepsilon_{(T(x), \mu_x)} \circ T(\eta_x) = \mu_x \circ T(\eta_x) = \text{id}_{T(x)}.$$

On l'última igualtat es deu a la Interpretació 5.1 de les mònades.

Ara en recordar la definició d'identitat en $\text{Alg}(\mathbb{T})$ tenim que,

$$\text{id}_{F(x)} = \text{id}_{(T(x), \mu_x)} = \text{id}_{T(x)}.$$

Així ja hem vist la primera identitat triangular. Vejam ara la segona. Siga (x, v) una àlgebra d'Eilenberg-Moore, hem de vore que,

$$\text{id}_{U((x, v))} = U(\varepsilon_{(x, v)}) \circ \eta_{U((x, v))}.$$

Desenvolupem a banda i banda,

$$\text{id}_{U((x, v))} = \text{id}_x.$$

$$U(\varepsilon_{(x, v)}) \circ \eta_{U((x, v))} = U(v) \circ \eta_x = v \circ \eta_x = \text{id}_x.$$

On l'última igualtat es deu al fet que (x, v) és una àlgebra d'Eilenberg-Moore.

Així, ja hem vist les dues identitats triangulars i amb això hem acabat la demostració de que $(\mathbb{C}, \text{Alg}(\mathbb{T}), F, U, \eta, \varepsilon)$ és una adjunció. $\square$

En la proposició següent veurem que, igual com passava amb la construcció de Kleisli, l'adjunció que hem definit a partir de la categoria d'Eilenberg-Moore també és especial: si considerem la mònada induïda per aquesta adjunció, recuperem exactament la mònada original.

Proposició 5.7. *Siguen $\mathcal{C}$ una categoria i $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ una mònada sobre $\mathcal{C}$. Siga*

$$(\mathcal{C}, \text{Alg}(\mathbb{T}), F, U, \eta, \varepsilon)$$

l'adjunció de la Proposició 5.6. Llavors, la mònada induïda per aquesta adjunció és precisament $\mathbb{T}$, és a dir,

$$\mathbb{T} = \mathbb{T}_{F \dashv U}$$

Demostració. Recordem que $\mathbb{T}_{F \dashv U} = (U \circ F, \eta, \text{id}_U * \varepsilon * \text{id}_F)$. Anem a veure que això és igual a $\mathbb{T}$ component a component.

Primer, hem de veure que $T = U \circ F$, per fer això vejam que fan les mateixes assignacions als objectes i als morfismes. Siga $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$

$$U \circ F(x) = U((T(x), \mu_x)) = T(x).$$

Així, sobre els objectes actuen igual, vegem-ho ara per als morfismes, siguen $x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ i $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$

$$U \circ F(f) = U(T(f)) = T(f).$$

Vist això, hem demostrat que $T = U \circ F$. A més, com $\eta = \eta$ sols falta veure que,

$$\mu = \text{id}_U * \varepsilon * \text{id}_F.$$

O equivalentment, avaluant a tot $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$,

$$\mu_x = U(\varepsilon_{F(x)}).$$

Desenvolupem el costat de la dreta,

$$U(\varepsilon_{F(x)}) = U(\varepsilon_{(T(x), \mu_x)}) = U(\mu_x) = \mu_x.$$

Així, ja hem vist que en totes les components $\mathbb{T} = \mathbb{T}_{F \dashv U}$ i, per tant, són la mateixa mònada. Just com volíem veure. $\square$

5.3 La categoria d'adjuncions

En aquesta secció vorem que les adjuncions de Kleisli i d'Eilenberg–Moore —dues formes de construir una adjunció que recupera una mònada donada— són especials. De fet, mostrarem que les adjuncions que induïxen una mònada concreta poden organitzar-se dins d'una categoria, i que les construccions de Kleisli i d'Eilenberg–Moore corresponen, respectivament, als objectes inicial i final, respectivament, d'aquesta categoria.

Això vol dir que la categoria de Kleisli és, en un cert sentit, la manera més xicoteta de generar la mònada mitjançant una adjunció, mentre que la categoria d'Eilenberg–Moore és la manera més rica o completa, ja que recull tota l'estructura possible compatible amb la mònada.

Vejam primer que les adjuncions que induïxen una mònada concreta formen una categoria que serà una subcategoria de la categoria de totes les adjuncions, Adj .

Definició 5.5 (La categoria $\text{Adj}_{\mathbb{T}}$). Siguen $\mathcal{C}$ una categoria i $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ una mònada sobre $\mathcal{C}$. Les adjuncions que tenen com a primera categoria $\mathcal{C}$ i tals que la seua mònada induïda és precisament $\mathbb{T}$ junt amb els morfismes d'adjuncions que tenen en la seua primera component $\text{Id}_{\mathcal{C}}$ forma una subcategoria d' Adj que anomenarem $\text{Adj}_{\mathbb{T}}$.

Explicitem un poc més com és $\text{Adj}_{\mathbb{T}}$ i després demostrarem que $\text{Adj}_{\mathbb{T}}$ és una categoria.

Un objecte en $\text{Adj}_{\mathbb{T}}$ és una adjunció $(\mathcal{C}, D', F', G', \eta', \varepsilon')$ de forma que, $\mathbb{T}_{F' \dashv G'} = \mathbb{T}$. Si $(\mathcal{C}, D', F', G', \eta', \varepsilon')$ i $(\mathcal{C}, D'', F'', G'', \eta'', \varepsilon'')$ són dos objectes d' $\text{Adj}_{\mathbb{T}}$, un morfisme del primer al segon en $\text{Adj}_{\mathbb{T}}$ és un morfisme d'adjuncions de la forma $(\text{Id}_{\mathcal{C}}, K)$.

Anem a veure ara que $\text{Adj}_{\mathbb{T}}$ és una categoria, és a dir, hem de comprovar que $\text{Adj}_{\mathbb{T}}$ satisfà els quatre requisits per ser una categoria.

Que els morfismes es poden compondre ja ho vam demostrar quan vam veure que Adj és una categoria. Ara, siguen $(\mathcal{C}, D', F', G', \eta', \varepsilon')$, $(\mathcal{C}, D'', F'', G'', \eta'', \varepsilon'')$ i $(\mathcal{C}, D''', F''', G''', \eta''', \varepsilon''')$ tres objectes d' $\text{Adj}_{\mathbb{T}}$, $(\text{Id}_{\mathcal{C}}, K)$ un morfisme en $\text{Adj}_{\mathbb{T}}$ de $F' \dashv G'$ en $F'' \dashv G''$ i $(\text{Id}_{\mathcal{C}}, K')$ un morfisme en $\text{Adj}_{\mathbb{T}}$ de $F'' \dashv G''$ en $F''' \dashv G'''$.

La composició $(\text{Id}_{\mathcal{C}}, K) \circ (\text{Id}_{\mathcal{C}}, K')$ la vam definir per ser,

$$(\text{Id}_{\mathcal{C}} \circ \text{Id}_{\mathcal{C}}, K' \circ K)$$

que és un morfisme en $\text{Adj}_{\mathbb{T}}$, ja que la seua primera component continua sent $\text{Id}_{\mathcal{C}}$.

La composició dels morfismes en $\text{Adj}_{\mathbb{T}}$ és associativa, ja que vam demostrar que la composició dels morfismes d'adjuncions és associativa.

Que existeix el morfisme identitat també ho tenim perquè $(\text{Id}_{\mathcal{C}}, \text{Id}_{\mathcal{D}})$ és un morfisme en $\text{Adj}_{\mathbb{T}}$. Finalment, que els morfismes identitats són neutres per a la composició ens ve heretat de la categoria Adj .

Vistes totes les propietats, hem demostrat que $\text{Adj}_{\mathbb{T}}$ és una categoria.

Vejam en detall les conseqüències de les condicions dels objectes i morfismes d' $\text{Adj}_{\mathbb{T}}$.

Interpretació 5.2. Suposant que tenim una situació com la de la Definició 5.5, explicitarem primer que vol dir que una adjunció siga un objecte d' $\text{Adj}_{\mathbb{T}}$. Siga $(\mathcal{C}, D', F', G', \eta', \varepsilon') \in \text{Ob}(\text{Adj}_{\mathbb{T}})$, llavors,

$$\mathbb{T} = (T, \eta, \mu) = (G' \circ F', \eta', \text{id}_{G'} * \varepsilon' * \text{id}_{F'}) = \mathbb{T}_{F' \dashv G'}.$$

I, per tant, han de ser iguals component a component, així tenim tres condicions. Avaluant la tercera en tot $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ens queda que,

1. $T = G' \circ F'$.
2. $\eta = \eta'$.
3. $\mu_x = G'(\varepsilon'_{F'(x)})$.

Ara, siguen $(C, D', F', G', \eta, \varepsilon')$ i $(C, D'', F'', G'', \eta, \varepsilon'') \in \text{Ob}(\text{Adj}_{\mathbb{T}})$. On a les unitats ja les hem identificades amb η per la condició 2 de ser un objecte d' $\text{Adj}_{\mathbb{T}}$. Siga també (Id_C, K) un morfisme de $F' \dashv G'$ en $F'' \dashv G''$, mirem en detall les condicions que ha de complir,

- $\text{Id}_C \circ G' = G'' \circ K, K \circ F' = F'' \circ \text{Id}_C$
- $\text{id}_{\text{Id}_C} * \eta = \eta * \text{id}_{\text{Id}_C}$.
- $\varepsilon'' * \text{id}_K = \text{id}_K * \varepsilon'$.

Simplificant i avaluant en la tercera condició en els objectes de D' , això és equivalent a què per a tot $y \in \text{Ob}(D')$

1. $G' = G'' \circ K, K \circ F' = F''$.
2. $\varepsilon''_{K(y)} = K(\varepsilon'_y)$.

Ara que ja hem fet la interpretació, estem a punt per vore que les adjuncions de Kleisli i de Eilenberg-Moore són objectes inicial i final respectivament.

Proposició 5.8. *Siguen C una categoria i $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ una mònada sobre C . En $\text{Adj}_{\mathbb{T}}$, la mònada $(C, \text{Kl}(\mathbb{T}), F_{\mathbb{T}}, G_{\mathbb{T}}, \eta, \varepsilon)$ és un objecte inicial i $(C, \text{Alg}(\mathbb{T}), F, U, \eta, \varepsilon)$ és un objecte final.*

Demostració. Primer, per tots els resultats de les seccions anteriors, podem dir que les adjuncions $(C, \text{Kl}(\mathbb{T}), F_{\mathbb{T}}, G_{\mathbb{T}}, \eta, \varepsilon)$ i $(C, \text{Alg}(\mathbb{T}), F, U, \eta, \varepsilon)$ són objectes de la categoria $\text{Adj}_{\mathbb{T}}$, ja que hem demostrat que en ambdós casos, la mònada associada a l'adjunció és $\mathbb{T}$. Vist que aquestes adjuncions són objectes d' $\text{Adj}_{\mathbb{T}}$. Anem a vore ara que l'adjunció de Kleisli és objecte inicial.

Per vore que $(C, \text{Kl}(\mathbb{T}), F_{\mathbb{T}}, G_{\mathbb{T}}, \eta, \varepsilon)$ és un objecte inicial en $\text{Adj}_{\mathbb{T}}$, hem de vore que per a tot objecte $(C, D', F', G', \eta, \varepsilon') \in \text{Ob}(\text{Adj}_{\mathbb{T}})$ existeix un únic morfisme d'adjuncions (Id_C, K) de $(C, \text{Kl}(\mathbb{T}), F_{\mathbb{T}}, G_{\mathbb{T}}, \eta, \varepsilon)$ fins a $(C, D', F', G', \eta, \varepsilon')$.

Comencem per l'existència, per fer això, hem de definir el funtor $K : \text{Kl}(\mathbb{T}) \rightarrow D'$, per fer això, hem de definir com actua sobre els objectes i els morfismes de $\text{Kl}(\mathbb{T})$. Siguen $x, y \in \text{Ob}(C)$ i $f \in \text{Hom}_{\text{Kl}(\mathbb{T})}(x, y) = \text{Hom}_C(x, T(y))$, definim,

$$K(x) = F'(x) \quad \text{i} \quad K(f) = \varepsilon'_{F'(y)} \circ F'(f).$$

Vejam que K és un funtor i que (Id_C, K) és un morfisme d'adjuncions. Comencem per vore que K és un funtor. Siguen $x, y \in \text{Ob}(C)$ i $f \in \text{Hom}_{\text{Kl}(\mathbb{T})}(x, y) = \text{Hom}_C(x, T(y))$. Com F' funtor i ε' transformació natural tenim que,

$$F'(f) \in \text{Hom}_{D'}(F'(x), F'(T(y))) \quad \text{i} \quad \varepsilon'_{F'(y)} \in \text{Hom}_{D'}(F'(G'(F'(x))), F'(y)).$$

Però, com $(C, D', F', G', \eta, \varepsilon') \in \text{Ob}(\text{Adj}_{\mathbb{T}})$, tenim que $T = G' \circ F'$, així aquests morfismes es poden compondre i tenim,

$$K(f) = \varepsilon'_{F'(y)} \circ F'(f) \in \text{Hom}_{D'}(F'(x), F'(y)) = \text{Hom}_{D'}(K(x), K(y)).$$

Que és el primer que volíem vore. Vejam ara que K respecta identitats, per fer això, recordem que per a tot $x \in \text{Ob}(C)$, $\text{id}_x^{\text{Kl}(\mathbb{T})} = \eta_x$. Així,

$$K(\text{id}_x^{\text{Kl}(\mathbb{T})}) = K(\eta_x) = \varepsilon'_{F'(x)} \circ F'(\eta_x) = \text{id}_{F'(x)} = \text{id}_{K(x)}.$$

On la penúltima igualtat és conseqüència de la primera igualtat triangular de l'adjunció $F' \dashv G'$.

Vejam ara que K respecta composicions. Siguen $x, y, z \in \text{Ob}(C)$, $f \in \text{Hom}_{\text{Kl}(\mathbb{T})}(x, y) = \text{Hom}_C(x, T(y))$ i $g \in \text{Hom}_{\text{Kl}(\mathbb{T})}(y, z) = \text{Hom}_C(y, T(z))$. Volem vore que,

$$K(g \circ^{\text{Kl}(\mathbb{T})} f) = K(g) \circ K(f).$$

Desenvolupem la banda de l'esquerra,

$$\begin{aligned} K(g \circ^{\text{Kl}(\mathbb{T})} f) &= K(\mu_z \circ T(g) \circ f) \\ &= \varepsilon'_{F'(z)} \circ F'(\mu_z \circ T(g) \circ f) \\ &= \varepsilon'_{F'(z)} \circ F'(G'(\varepsilon'_{F'(z)}) \circ G'(F'(g)) \circ f) \\ &= \varepsilon'_{F'(z)} \circ F'(G'(\varepsilon'_{F'(z)})) \circ F'(G'(F'(g))) \circ F'(f). \end{aligned}$$

En aquest punt, recordem que al llarg de la demostració on vam vore que la mònada induïda per una adjunció és una mònada, vam demostrar la igualtat $\varepsilon' \circ (\varepsilon' * \text{id}_{F' \circ G'}) = \varepsilon' \circ (\text{id}_{F' \circ G'} * \varepsilon')$. I aquesta igualtat la farem servir ara en l'objecte $F'(z)$ per concloure que

$$\varepsilon'_{F'(z)} \circ F'(G'(\varepsilon'_{F'(z)})) = \varepsilon'_{F'(z)} \circ \varepsilon'_{F'(G'(F'(z)))}.$$

Per acabar, sols ens falta un detall. Recordem que $\varepsilon' : F' \circ G' \Longrightarrow \text{id}_{D'}$ és una transformació natural i que com $g \in \text{Hom}_C(y, T(z))$ i F' funtor, tenim que $F'(g) \in \text{Hom}_{D'}(F'(y), F'(T(z))) = \text{Hom}_{D'}(F'(y), F'(G'(F'(z))))$. Així,

$$\varepsilon'_{F'(G'(F'(z)))} \circ F'(G'(F'(g))) = F'(g) \circ \varepsilon_{F'(y)}.$$

Posant-ho tot junt ara tenim que

$$\begin{aligned} K(g \circ^{\text{Kl}(\mathbb{T})} f) &= \varepsilon'_{F'(z)} \circ \varepsilon'_{F'(G'(F'(z)))} \circ F'(G'(F'(g))) \circ F'(f) \\ &= \varepsilon'_{F'(z)} \circ F'(G'(\varepsilon'_{F'(z)})) \circ F'(G'(F'(g))) \circ F'(f) \\ &= \varepsilon'_{F'(z)} \circ F'(g) \circ \varepsilon_{F'(y)} \circ F'(f) \\ &= K(g) \circ K(f). \end{aligned}$$

D'on concloem que K és un funtor. Vejam ara que satisfà les propietats per tal que (Id_C, K) siga un morfisme d'adjuncions. Gràcies a la Interpretació 5.2 sols hem de comprovar que se satisfan els següents dos punts.

1. $G_{\mathbb{T}} = G' \circ K$, $K \circ F_{\mathbb{T}} = F'$.
2. $\varepsilon'_{K(x)} = K(\varepsilon_x)$, per a tot $x \in \text{Ob}(\mathbf{C})$.

Vejam primer el primer punt. Siguen $x, y \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ i $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(x, y)$, així,

$$K \circ F_{\mathbb{T}}(x) = K(x) = F'(x)$$

$$K \circ F_{\mathbb{T}}(f) = K(\eta_y \circ f) = \varepsilon'_{F'(y)} \circ F'(\eta_y) \circ F'(f) = F'(f).$$

Ja que ja hem vist que $\varepsilon'_{F'(y)} \circ F'(\eta_y) = \text{id}_{F'(y)}$. I per tant tenim $K \circ F_{\mathbb{T}} = F'$. Vejam l'altra. Siguen $x, y \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ i $f \in \text{Hom}_{\text{Kl}(\mathbb{T})}(x, y) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(x, T(y))$, així,

$$G' \circ K(x) = G' \circ F'(x) = T(x) = G_{\mathbb{T}}(x).$$

$$G' \circ K(f) = G'(\varepsilon'_{F'(y)} \circ F'(f)) = G'(\varepsilon'_{F'(y)}) \circ G'(F'(f)) = \mu_y \circ T(f) = G_{\mathbb{T}}(f).$$

On tenim la igualtat $G'(\varepsilon'_{F'(y)}) = \mu_y$ gràcies a la Interpretació 5.2 de què $F' \dashv G' \in \text{Ob}(\text{Adj}_{\mathbb{T}})$.

Vejam ara el segon punt. Recordem abans que la counitat de l'adjunció de Kleisli té la forma $\varepsilon_x = \text{id}_{T(x)} \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(T(x), T(x)) = \text{Hom}_{\text{Kl}(\mathbb{T})}(T(x), x)$. Així,

$$K(\varepsilon_x) = K(\text{id}_{T(x)}) = \varepsilon'_{F'(x)} \circ F'(\text{id}_{T(x)}) = \varepsilon'_{K(x)} \circ \text{id}_{F'(T(x))} = \varepsilon'_{K(x)}.$$

On hem fet servir la definició de K i que $F' : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}'$ respecta identitats en ser un funtor.

Vist tot això, ja tenim l'existència, vejam ara la unicitat. Suposem que $K' : \text{Kl}(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathbf{D}'$ és un funtor tal que $(\text{Id}_{\mathbf{C}}, K')$ és un morfisme d'adjuncions. Vejam primer que K' actua igual que K sobre els objectes. Com $(\text{Id}_{\mathbf{C}}, K')$ és un morfisme d'adjuncions, tenim que $K' \circ F_{\mathbb{T}} = F'$, en particular, per a tot $x \in \text{Ob}(\mathbf{C})$

$$K'(x) = K' \circ F_{\mathbb{T}}(x) = F'(x) = K(x).$$

Ja que $F_{\mathbb{T}}(x) = x$ per a tot objecte de $\mathbf{C}$. Vejam ara que K' actua igual que K en els morfismes. Aquesta tasca és més delicada i requereix alguns passos, els farem a poc a poc. Siguen $x, y \in \text{Ob}(\mathbf{C})$, $f \in \text{Hom}_{\text{Kl}(\mathbb{T})}(x, y) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(x, T(y))$.

Primer, com tenim que $K'(\varepsilon_x) = \varepsilon'_{K'(x)}$, si fem servir que $\varepsilon_x = \text{id}_{T(x)}$ i que ja hem vist que $K'(x) = K(x)$. Podem concloure que

$$K'(\text{id}_{T(x)}) = K'(\varepsilon_x) = \varepsilon'_{K'(x)} = \varepsilon'_{K(x)} = \varepsilon'_{F'(x)}.$$

D'altra banda, com tenim que $K' \circ F_{\mathbb{T}} = F'$, en particular,

$$K' \circ F_{\mathbb{T}}(f) = K'(\eta_{T(y)} \circ f) = F'(f).$$

Amb això sols no en tenim prou, vejam que més podem fer i com combinar el que tenim. Per la Interpretació 5.1 de les mònades tenim que

$$f = \mu_y \circ \eta_{T(y)} \circ f.$$

En aquest punt, com les identitats són neutres per a la composició, podem inserir una enmig de l'equació, així,

$$f = \mu_y \circ \text{id}_{T(T(y))} \circ \eta_{T(y)} \circ f.$$

Ara, com T és un funtor, respecta identitats, així,

$$f = \mu_y \circ T(\text{id}_{T(y)}) \circ \eta_{T(y)} \circ f.$$

I ara el que podem vore és que podem expressar aquestes composicions, com una composició en $\text{Kl}(\mathbb{T})$ de la següent manera,

$$f = \text{id}_{T(y)} \circ^{\text{Kl}(\mathbb{T})} (\eta_{T(y)} \circ f).$$

Finalment, com $K' : \text{Kl}(\mathbb{T}) \rightarrow \mathcal{D}'$ és un funtor, respecta les composicions, així, si ho ajuntem tot ens queda que,

$$\begin{aligned} K'(f) &= K'(\text{id}_{T(y)} \circ^{\text{Kl}(\mathbb{T})} (\eta_{T(y)} \circ f)) \\ &= K'(\text{id}_{T(y)}) \circ K'(\eta_{T(y)} \circ f) \\ &= \varepsilon'_{F'(x)} \circ F'(f) \\ &= K(f). \end{aligned}$$

I, per tant, hem comprovat que K' actua igual que K sobre els morfismes i podem afirmar la unicitat.

Vistes existència i unicitat, podem concloure que $(\mathcal{C}, \text{Kl}(\mathbb{T}), F_{\mathbb{T}}, G_{\mathbb{T}}, \eta, \varepsilon)$ és un objecte inicial en $\text{Adj}_{\mathbb{T}}$.

Vejam ara que $(\mathcal{C}, \text{Alg}(\mathbb{T}), F, U, \eta, \varepsilon)$ és un objecte final en $\text{Adj}_{\mathbb{T}}$, per fer això, hem de vore que, per a tot objecte $(\mathcal{C}, \mathcal{D}', F', G', \eta, \varepsilon') \in \text{Ob}(\text{Adj}_{\mathbb{T}})$ existeix un únic morfisme d'adjuncions $(\text{Id}_{\mathcal{C}}, K)$ de $(\mathcal{C}, \mathcal{D}', F', G', \eta, \varepsilon')$ fins a $(\mathcal{C}, \text{Alg}(\mathbb{T}), F, U, \eta, \varepsilon)$.

Comencem per l'existència. Per fer això, hem de definir el funtor $K : \mathcal{D}' \rightarrow \text{Alg}(\mathbb{T})$, per fer això, hem de definir com actua sobre els objectes i els morfismes de $\mathcal{D}'$. Siguen $x, y \in \text{Ob}(\mathcal{D}')$ i $f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}'}(x, y)$, definim,

$$K(x) = (G'(x), G'(\varepsilon'_x)) \quad \text{i} \quad K(f) = G'(f).$$

Vejam que K és un funtor i que $(\text{Id}_{\mathcal{C}}, K)$ és un morfisme d'adjuncions. Però abans hem de vore que K està ben definit, és a dir, que per a tot $x \in \mathcal{D}'$, $(G'(x), G'(\varepsilon'_x))$ és una àlgebra d'Eilenberg-Moore.

Per fer això recordem que $\varepsilon' : F' \circ G' \implies \text{id}_{D'}$ és una transformació natural, per tant, $\varepsilon'_x \in \text{Hom}_{D'}(F'(G'(x)), x)$. Així,

$$G'(\varepsilon'_x) \in \text{Hom}_{D'}(G'(F'(G'(x))), G'(x)) = \text{Hom}_{D'}(T(G'(x)), G'(x)).$$

Com volíem vore. Ara vejam que se satisfan les dues propietats de les àlgebres d'Eilenberg-Moore. Aquestes són,

$$G'(\varepsilon'_x) \circ T(G'(\varepsilon'_x)) = G'(\varepsilon'_x) \circ \mu_{G'(x)} \quad \text{i} \quad G'(\varepsilon'_x) \circ \eta_{G'(x)} = \text{id}_{G'(x)}.$$

Per vore la primera, hem de recordar de nou que $\varepsilon' \circ (\varepsilon' * \text{id}_{F' \circ G'}) = \varepsilon' \circ (\text{id}_{F' \circ G'} * \varepsilon')$, igualtat que vam demostrar quan vam vore que la mònada induïda per una adjunció és una mònada. Amb això i recordant que $T = G' \circ F'$ i $\mu_y = G'(\varepsilon'_{F'(y)})$ per a tot $y \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ en tenim prou. Comencem desenvolupant la banda de l'esquerra,

$$\begin{aligned} G'(\varepsilon'_x) \circ T(G'(\varepsilon'_x)) &= G'(\varepsilon'_x) \circ G'(F'(G'(\varepsilon'_x))) \\ &= G'(\varepsilon'_x \circ F'(G'(\varepsilon'_x))) \\ &= G'(\varepsilon'_x \circ \varepsilon'_{F'(G'(x))}) \\ &= G'(\varepsilon'_x) \circ G'(\varepsilon'_{F'(G'(x))}) \\ &= G'(\varepsilon'_x) \circ \mu_{G'(x)}. \end{aligned}$$

La segona la tenim directament de la segona identitat triangular de $(\mathbf{C}, D', F', G', \eta, \varepsilon')$. Així, ja hem vist que K està ben definit.

A continuació, vejam que K és un funtor. Siguen $x, y \in \text{Ob}(D')$ i $f \in \text{Hom}_{D'}(x, y)$, volem vore que $K(f) \in \text{Hom}_{\text{Alg}(\mathbf{T})}(K(x), K(y))$. Així que el primer que hem de vore és que $K(f) \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(G'(x), G'(y))$. Però això ho tenim, ja que $K(f) = G'(f)$ i G' funtor. Així, sols ens falta vore que

$$K(f) \circ G'(\varepsilon'_x) = G'(\varepsilon'_y) \circ T(K(f)).$$

Substituint les K i la T , això és equivalent a vore que

$$G'(f) \circ G'(\varepsilon'_x) = G'(\varepsilon'_y) \circ G'(F'(G'(f))).$$

I ara, com $\varepsilon' : F' \circ G' \implies \text{id}_{D'}$ és una transformació natural, tenim que,

$$f \circ \varepsilon'_x = \varepsilon'_y \circ F'(G'(f)).$$

Deixant actuar a G' en aquesta última igualtat i recordant que G' respecta composicions, tenim el que volem.

Vejam ara que K respecta identitats. Siga $x \in \text{Ob}(D')$.

$$K(\text{id}_x) = G'(\text{id}_x) = \text{id}_{G'(x)} = \text{id}_{(G'(x), G'(\varepsilon'_x))} = \text{id}_{K(x)}.$$

La segona igualtat la tenim gràcies al fet que G' és un funtor i, per tant, respecta identitats.

Finalment, vejam que K respecta composicions. Siguen $x, y, z \in \text{Ob}(\mathbf{D}')$, $f \in \text{Hom}_{\mathbf{D}'}(x, y)$ i $g \in \text{Hom}_{\mathbf{D}'}(y, z)$. Volem vore que

$$K(g \circ f) = K(g) \circ K(f).$$

O equivalentment, si substituïm les K ,

$$G'(g \circ f) = G'(g) \circ G'(f).$$

El que sabem que és cert, ja que G' és un funtor i, per tant, respecta composicions.

Així, ja hem vist que K és un funtor. Ara anem a vore que $(\text{Id}_{\mathbf{C}}, K)$ és un morfisme d'adjuncions. Gràcies a la Interpretació 5.2 sols hem de comprovar que se satisfan els següents dos punts.

1. $G' = U \circ K$, $K \circ F' = F$.
2. $\varepsilon_{K(y)} = K(\varepsilon'_y)$, per a tot $y \in \text{Ob}(\mathbf{D}')$.

Vejam primer el primer punt. Siguen $x, y \in \text{Ob}(\mathbf{D}')$ i $f \in \text{Hom}_{\mathbf{D}'}(x, y)$.

$$U \circ K(x) = U((G'(x), G'(\varepsilon'_x))) = G'(x).$$

$$U \circ K(f) = U(G'(f)) = G'(f).$$

Ja tenim la primera, vejam la segona. Siguen $x, y \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ i $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(x, y)$.

$$K \circ F'(x) = (G'(F'(x)), G'(\varepsilon'_{F'(x)})) = (T(x), \mu_x) = F(x).$$

$$K \circ F'(f) = G'(F'(f)) = T(f) = F(f).$$

On hem fet servir que $T = G' \circ F'$ i $G'(\varepsilon'_{F'(x)}) = \mu_x$, que les tenim gràcies a la Interpretació 5.2 de que $(\mathbf{C}, \mathbf{D}', F', G', \eta, \varepsilon') \in \text{Ob}(\text{Adj}_{\mathbb{T}})$.

Vejam ara el segon punt. Per fer això, recordem que en l'adjunció d'Eilenberg-Moore tenim que $\varepsilon_{(x,v)} = v$. Amb això present, tenim que,

$$\varepsilon_{K(y)} = \varepsilon_{(G'(y), G'(\varepsilon'_y))} = G'(\varepsilon'_y) = K(\varepsilon'_y).$$

Per tant, vistos tots els punts, ja hem vist l'existència. Vejam ara la unicitat. Suposem que $K' : \mathbf{D}' \rightarrow \text{Alg}(\mathbb{T})$ és un funtor tal que $(\text{Id}_{\mathbf{C}}, K')$ és un morfisme d'adjuncions. Vejam primer que K' actua igual que K sobre els objectes. Com K' va a parar a $\text{Alg}(\mathbb{T})$ farem servir la següent notació, $K'(x) = (K'_1(x), K'_2(x))$ per a tot $x \in \text{Ob}(\mathbf{D}')$. Ara, com $(\text{Id}_{\mathbf{C}}, K')$ és un morfisme d'adjuncions, tenim que $G' = U \circ K'$ i en particular, $G'(x) = U \circ K'(x) = K'_1(x)$ per a tot $x \in \text{Ob}(\mathbf{D}')$. Així, per vore que K i K' actuen igual sobre els objectes, sols ens falta vore que porten a la mateixa valoració.

Abans de vore això, vorem que coincideixen en els morfismes. De nou fent servir que $G' = U \circ K'$, tenim que en particular, $K(f) = G'(f) = U \circ K'(f) = K'(f)$. Així, K i K' actuen igual sobre els morfismes.

Per acabar, recordem que també tenim que, per a tot $x \in \text{Ob}(\mathcal{D}')$,

$$\varepsilon_{K'(x)} = K'(\varepsilon'_x).$$

Però per la definició d' ε , això és equivalent a què

$$K'_2(x) = K'(\varepsilon'_x).$$

I ara que sabem que K i K' actuen igual sobre els morfismes, tenim que,

$$K'_2(x) = K'(\varepsilon'_x) = G'(\varepsilon'_x).$$

Que era precisament el que volíem vore i, per tant, queda provada la unicitat.

Vistes existència i unicitat, podem concloure que $(\mathcal{C}, \text{Alg}(\mathbb{T}), F, U, \eta, \varepsilon)$ és un objecte final en $\text{Adj}_{\mathbb{T}}$. $\square$

Nota 5.1. El motiu pel qual podem considerar “canònica” la forma de construir una adjunció a partir d’una mònada, com fan Kleisli o Eilenberg–Moore, és precisament aquesta última propietat: el fet que aquestes adjuncions ocupen posicions extremes (inicial i final) dins de la categoria de totes les adjuncions que indueixen una mònada donada. Aquesta universalitat les distingeix de qualsevol altra adjunció que recupere la mònada inicial, i justifica el seu caràcter privilegiat dins d’aquest context.

Capítol 6

Conclusions

En aquest document ens hem endinsat en la teoria de categories, presentant els seus conceptes fonamentals tot centrant-nos especialment en la noció d'adjunció. Hem destacat com aquestes situacions poden expressar-se mitjançant la propietat universal i hem analitzat algunes de les seues conseqüències més rellevants. A més, hem examinat exemples concrets d'adjuncions, tant en el context de la teoria de l'ordre com en el cas dels monoides lliures. Finalment, hem explorat la connexió profunda entre adjuncions i mònades.

Aquest treball m'ha permés prendre una nova perspectiva a l'hora d'entendre les matemàtiques. Ha estat una experiència enriquidora que m'ha ajudat a desenvolupar una visió més abstracta i coherent de diferents conceptes matemàtics.

Tot i això, per raons de temps i de claredat expositiva, s'han deixat fora conceptes rellevants dins de la teoria de categories que constitueixen una continuació natural per a qualsevol lector que vulga aprofundir en aquest camp i que tinc intenció d'explorar en un futur proper, com ara els límits i colímits, les categories de funcions, les categories completes i cocompletes, les categories abelianes o el famós lema de Yoneda. Aquests temes poden abordar-se a partir de fonts introductòries com els textos de Mac Lane [Mac98] i Riehl [Rie17], així com també l'obra de Lambek i Scott [LS88], que han estat també referències fonamentals en l'elaboració d'aquest treball.

Agraïments

Voldria agrair de tot cor a la meua família pel seu suport constant al llarg dels meus estudis. En especial, els agraïsc, entre moltes altres coses, haver-me criat en valencià, la llengua amb què pense, estime i escric les matemàtiques.

També vull expressar el meu agraïment al meu tutor, Enric Cosme, i a la Universitat de València per haver-me donat l'oportunitat d'estudiar aquest grau i fer aquest treball en la llengua que m'estime: el valencià.

Bibliografia

- [LS88] J. Lambek i P. J. Scott. *Introduction to higher-order categorical logic*. Vol. 7. Cambridge University Press, 1988.
- [Mac98] S. Mac Lane. *Categories for the working mathematician*. Vol. 5. Springer Science & Business Media, 1998.
- [Rie17] E. Riehl. *Category theory in context*. Courier Dover Publications, 2017.