



VNIVERSITAT
DE VALÈNCIA

Treball Fi de Grau – Curs 2024/2025

Introducció a la lògica modal

Autor: **Alba Porras Martín**

Tutor: ENRIC COSME LLÓPEZ

Índex

1	Introducció	1
2	Preliminars	5
2.1	Lògica proposicional clàssica	5
2.2	Lema de Zorn-Kuratowski	7
3	Sintaxi i semàntica	9
3.1	Fórmules modals	9
3.2	Instàncies de substitució	10
3.3	Models relacionals	11
3.4	Veritat, validesa i tautologies	12
3.5	Esquemes de validesa	18
3.6	Conseqüència semàntica	27
4	Definibilitat en el marc	29
4.1	Relacions d'accessibilitat	29
4.2	Marc	36
4.3	Relacions d'equivalència i ($S5$)	40
5	Demostracions sintàctiques i el teorema de correcció	47
5.1	Lògica modal normal	49
5.2	Demostracions i sistemes modals	52
5.3	Demostracions en K	55
5.4	Regles derivades	58
5.5	Demostracions en sistemes modals	62
5.6	Validesa	64
5.7	Consistència	65
6	Completesa i models canònics	69
6.1	Conjunts Σ -consistents complets	69
6.2	Modalitats i conjunts complets consistents	75

6.3	El model canònic i el Lema de Veritat	78
6.4	Determinació i completeness per a $\mathbf{K}$	81
6.5	Completeness respecte al marc	81
7	Conclusions	85
	Bibliografia	85

Capítol 1

Introducció

En lògica, a més de determinar si una proposició és vertadera o falsa, podem analitzar de quina manera ho és. Per exemple, si considerem l’afirmació “Hi ha neu a la muntanya”, hi ha diferents maneres d’interpretar la seua veritat o falsedat. Podem preguntar-nos si és necessàriament certa, si se sap amb seguretat, si algú creu que és vertadera, si ho ha sigut en el passat o si ho serà en el futur, o si continuarà havent-hi neu si el clima canvia.

Aquestes variacions són el que es coneix com a “modalitats”, ja que indiquen diferents maneres en què una proposició pot ser vertadera. Les modalitats no es poden tractar fàcilment amb les taules de veritat i les variables proposicionals del càlcul proposicional. Per aquest motiu, es va desenvolupar la lògica modal. Aquesta és una extensió de la lògica clàssica que incorpora operadors modals per a expressar aquests conceptes (necessitats, possibilitats, coneixement i altres conceptes fonamentals). La lògica modal ens proporciona la semàntica necessària per a permetre fer demostracions rigoroses que impliquen modalitats, la qual cosa fins fa poc es considerava difícil o innecessari.

L’interès per la lògica modal no és nou. Igual que amb la lògica proposicional clàssica, Aristòtil ja intentà formalitzar la relació entre allò que és vertader, allò que és necessari i allò que és possible, és a dir, entre necessitat i possibilitat. Però el seu enfocament presentava inconsistències, per tant, la lògica modal va ser descartada com un fracàs.

Més tard, Kant i Frege defensaren que les modalitats no afegien res essencial al coneixement lògic, sinó que simplement suggerien per què podem creure que una proposició determinada és vertadera. Segons ells, afegir una modalitat (com “necessàriament” o “possiblement”) a una proposició P , no proporciona més informació ni permet demostrar res més del que ja es podia demostrar sobre P sense la modalitat. És a dir, la modalitat no afegeix ni lleva res a la capacitat de demostrar la veritat o falsedat de P . Però aquesta afirmació ha resultat ser completament falsa. És a dir, sembla raonable dir que si P és certa, aleshores P ha de ser una combinació de coses possibles, ja que allò que és vertader no pot ser impossible. No obstant això, és molt menys evident afirmar que pel fet que P siga possible, P siga realment cert. Això suggereix que la modalitat té més contingut del

que Kant i Frege pensaven, és a dir, les afirmacions modals no són equivalents a les seues corresponents afirmacions no modals.

No obstant això, al segle XX es va demostrar que aquestes modalitats tenen implicacions lògiques importants, fet que va dur a un renaixement de la disciplina. Actualment, la lògica modal s'utilitza en múltiples branques de la filosofia, les matemàtiques i la informàtica.

Els dos operadors fonamentals de la lògica modal són $\Box$ (necessitat) i $\Diamond$ (possibilitat). Així, $\Box p$ significa “p és necessàriament vertader”, mentre que $\Diamond p$ significa “p és possiblement vertader”. Aquest enfocament permet la formalització de conceptes metafísics i epistèmics, com ara “si p és necessari, aleshores és vertader” ($\Box p \rightarrow p$) o “si p és possible, aleshores és necessàriament possible” ($\Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$).

Per altra banda, els operadors modals $\Box$ i $\Diamond$ són intensionals, la qual cosa significa que el fet que $\Box p$ o $\Diamond p$ siguin certes no depèn únicament de si la proposició p ho és, sinó també del seu significat. Per a interpretar correctament aquests operadors, es requereix una semàntica diferent de la veritativo-funcional usada en la lògica clàssica, que és la semàntica relacional o de mons possibles (desenvolupada per Saul Kripke [3]). Segons aquest enfocament, en lloc d'assignar valors de veritat directament a les proposicions, es defineixen conjunts de mons possibles on aquestes poden ser vertaderes o falses, és a dir, una proposició no és simplement vertadera o falsa, sinó que pot ser vertadera en alguns mons i falsa en altres. Per exemple, el concepte de necessitat ($\Box p$) es formalitza així: una proposició és necessàriament vertadera en un món si ho és en tots els mons accessibles des d'eixe món. Aquesta idea es basa en el principi de Leibniz, que diu que allò que és necessàriament cert és el que és cert en tots els mons possibles.

Aquest treball proporciona una introducció a la sintaxi, la semàntica i la teoria de la demostració de la lògica modal, tot açò dividit en sis capítols. Al capítol 2, de preliminars, s'introdueixen algunes idees i resultats fonamentals de la lògica proposicional clàssica, per poder entendre els conceptes que introduïrem al llarg del treball més fàcilment.

En el tercer capítol, començarem introduint les definicions i els conceptes per a poder fer una argumentació sòlida del tema en les següents seccions. Parlarem de mons i models, i farem algun exemple per a aclarir els conceptes que definim.

A continuació, en el quart introduïrem el concepte de marc, que ens aporta una relació directa entre la validesa d'una fórmula en un marc, i la relació d'accessibilitat d'aquest.

El quint capítol tracta les lògiques modals normals, que són lògiques amb els operadors $\Box$ i $\Diamond$. Es discuteix la seua sintaxi, els models relacionals i les nocions semàntiques basades en ells (com la validesa i la consistència), així com els sistemes de demostració (tant demostracions sintàctiques com taules de veritat).

En el capítol 6 es mostrarà que aquests sistemes es comporten de manera coherent, és a dir, que el conjunt de proposicions demostrables i el conjunt de proposicions vertaderes són idèntics. És a dir, estudiarem alguns resultats fonamentals de les lògiques modals, com la correcció i la completesa dels sistemes de demostració considerats.

En resum, el resultat important al que volem arribar en aquest treball és a que si una fórmula modal és vertadera aleshores és demostrable (completesa), i si una fórmula modal

és demostrable aleshores és vertadera (correcció). Finalitzem el treball amb un capítol de conclusions on sintetitzarem els punts més importants del nostre estudi.

Capítol 2

Preliminars

Abans d'entrar en el nucli d'aquest treball, anem a introduir alguns conceptes que serviran per a entendre millor la lògica modal i facilitar el desenvolupament dels pròxims apartats. En aquest capítol, presentarem alguns elements essencials de la lògica proposicional, com la seua sintaxi, semàntica i alguns resultats bàsics. Aquests preliminars ens proporcionaran la base necessària per a comprendre i analitzar en profunditat els temes que tractarem en els capítols següents.

2.1 Lògica proposicional clàssica

Definició 2.1.1. (Variables proposicionals). Les variables proposicionals són un conjunt infinit numerable, que denotarem per V , de variables que denotaran proposicions. Aquest conjunt ve donat per

$$V = \{ p_n \mid n \in \mathbb{N} \}$$

Definició 2.1.2. El llenguatge bàsic de la lògica proposicional clàssica inclou els següents elements:

1. La constant proposicional per al fals, denotada per $\perp$.
2. Un conjunt V infinit numerable de variables proposicionals.
3. El connector proposicional unari de negació, que denotarem per $\neg$.
4. Els connectors proposicionals binaris $\wedge$ (conjunció), $\vee$ (disjunció), $\rightarrow$ (condicional).

Definició 2.1.3. (Fórmules). Les fórmules del llenguatge proposicional bàsic es defineixen recursivament de la següent manera:

1. $\perp$ és una fórmula atòmica.
2. Tota variable proposicional és una fórmula atòmica.

3. Si A és una fórmula, aleshores $\neg A$ també és una fórmula.
4. Si A i B són fórmules, aleshores $(A \wedge B)$ és una fórmula.
5. Si A i B són fórmules, aleshores $(A \vee B)$ és una fórmula.
6. Si A i B són fórmules, aleshores $(A \rightarrow B)$ és una fórmula.
7. Res més és una fórmula.

Denotem per Form al conjunt de totes les fórmules de la lògica proposicional clàssica.

A continuació enunciem la propietat universal del conjunt de fórmules proposicionals, que diu que si tenim una àlgebra on estiguen definides les operacions lògiques clàssiques i una assignació del conjunt de variables proposicionals en l'àlgebra, aleshores l'assignació sempre es pot estendre a un homomorfisme, o el que és el mateix, Form és l'àlgebra lliure per a les operacions lògiques definida sobre el conjunt de variables proposicionals.

Teorema 2.1.1. (*Propietat Universal*). *Siga A un conjunt on tenim definides les operacions en $\Sigma = \{\perp, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Siga $f : V \rightarrow A$ una aplicació. Aleshores existeix un únic Σ -homomorfisme $f^\# : \text{Form} \rightarrow A$ tal que $f^\# \circ \text{in}_V = f$.*

Definició 2.1.4. (Taula de veritat). El conjunt $2 = \{0, 1\}$ té estructura de Σ -àlgebra.

Aquestes operacions es poden representar en la següent taula:

ϕ	ψ	$\neg\phi$	$\phi \wedge \psi$	$\phi \vee \psi$	$\phi \rightarrow \psi$	$\phi \leftrightarrow \psi$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Una valoració és una aplicació

$$v : V \rightarrow 2.$$

Si $v(p_n) = 1$, direm que p_n és vertadera per a v . Pel contrari, si $v(p_n) = 0$, direm que p_n és falsa per a v .

A més, per la Propietat Universal sabem que esta valoració es pot estendre a un Σ -homomorfisme

$$v^\# : \text{Form} \rightarrow 2.$$

Aquesta valoració permet estendre el valor de veritat a tota fórmula simplement coneixent el valor de veritat de les proposicions en la fórmula.

Exemple 2.1.1. A continuació vegem la taula de veritat de la fórmula $(P \wedge Q) \vee R \rightarrow R$.

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \vee R$	$(P \wedge Q) \vee R \rightarrow R$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1

Definició 2.1.5. (Tautologia). Siga ϕ una fórmula en Form, direm que ϕ és una tautologia si per a tota valoració $v : V \rightarrow 2$, es té que $v^\#(\phi) = 1$.

Definició 2.1.6. (Contradicció). Siga ϕ una fórmula en Form, direm que ϕ és una contradicció si per a tota valoració $v : V \rightarrow 2$, es té que $v^\#(\phi) = 0$.

Exemple 2.1.2. A continuació vorem un exemple bàsic de tautologia i altre de contradicció, mitjançant taules de veritat.

1. $P \vee \neg P$ és una tautologia.

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
0	1	1
1	0	1

2. $P \wedge \neg P$ és una contradicció.

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$
0	1	0
1	0	0

Nota 2.1.1. Observem que, quan estudiem les tautologies mitjançant taules de veritat, totes les files de la última columna de la taula han de ser 1. Açò ens serà útil al llarg del treball per demostrar que una fórmula és una tautologia.

2.2 Lema de Zorn-Kuratowski

El Lema de Zorn-Kuratowski és una eina fonamental que permet establir l'existència d'elements maximals en conjunts parcialment ordenats, i que necessitarem més endavant per

demostrar el Lema de Lindenbaum. Presentem primer unes definicions que ens faran falta per poder entendre'l.

Definició 2.2.1. (Conjunt parcialment ordenat). Un ordre parcial sobre un conjunt X és una relació binària $\leq$ en X que compleix les següents condicions:

1. (Reflexivitat): $\forall x \in X, (x \leq x)$.
2. (Antisimetria): $\forall x, y \in X, ((x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x = y)$.
3. (Transitivitat): $\forall x, y, z \in X, ((x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z)$.

Un conjunt parcialment ordenat és una tupla $(X, \leq)$, on X és un conjunt i $\leq$ un ordre parcial sobre X .

Definició 2.2.2. (Cadena). Una cadena, o conjunt totalment ordenat, és un conjunt C amb una relació d'ordre parcial $\leq$ en la qual tota parella d'elements està relacionada, és a dir, compleix la següent propietat:

$$\forall x, y \in C, (x \leq y \vee x \geq y).$$

Definició 2.2.3. (Fita superior). Siga $(X, \leq)$ un conjunt parcialment ordenat i $Y \subseteq X$. Un element s de X és una fita superior de Y si satisfà la següent condició:

$$\forall y \in Y, (y \leq s).$$

Denotem per $\text{Fsup}_X(Y)$ el conjunt de totes les fites superiors d' Y en X .

Definició 2.2.4. (Suprem). Siga $(X, \leq)$ un conjunt parcialment ordenat i $Y \subseteq X$. Diem que $s \in X$ és un suprem d' Y en X si compleix les següents condicions:

1. s és fita superior de Y en X , és a dir, $s \in \text{Fsup}_X(Y)$.
2. Per a cada $x \in \text{Fsup}_X(Y)$, $s \leq x$.

Definició 2.2.5. (Element maximal). Siga $(X, \leq)$ un conjunt parcialment ordenat. Diem que m és un element maximal de X si compleix la següent propietat:

$$\forall x \in X, (m \leq x \rightarrow m = x).$$

Ara sí, estem en condicions d'enunciar el Lema de Zorn-Kuratowski.

Lema 2.2.1. (Zorn-Kuratowski). Siga $(X, \leq)$ un conjunt parcialment ordenat no buit per al qual tota cadena no buida en X té suprem, aleshores existirà un element maximal en X .

Nota 2.2.1. El lema de Zorn-Kuratowski és equivalent a l'Axioma d'Elecció.

Capítol 3

Sintaxi i semàntica

La lògica modal estudia les proposicions modals i les relacions d'implicació entre elles. Els operadors modals, com la necessitat ($\Box$) i la possibilitat ($\Diamond$), permeten formalitzar expressions com “és necessari que” o “és possible que”.

Aquest capítol serveix com a introducció als conceptes bàsics de la sintaxi i la semàntica de la lògica modal, establint les bases per als capítols posteriors, que desenvoluparan formalment aquests conceptes i exploraran les seues aplicacions en diferents sistemes lògics.

3.1 Fórmules modals

En aquesta secció es presenta el llenguatge formal de la lògica modal. Es defineixen les fórmules ben formades a partir dels símbols proposicionals i els connectius lògics, així com els operadors modals.

Definició 3.1.1. El llenguatge bàsic de la lògica modal inclou el llenguatge bàsic de la lògica proposicional, i també

1. L'operador modal (unari) de necessitat $\Box$.
2. L'operador modal (unari) de possibilitat $\Diamond$.

Definició 3.1.2. (Fórmules modals). Les fórmules del llenguatge modal bàsic es defineixen recursivament de la següent manera:

1. $\perp$ és una fórmula modal atòmica.
2. Tota variable proposicional és una fórmula modal atòmica.
3. Si A és una fórmula modal, aleshores $\neg A$ també és una fórmula modal.
4. Si A i B són fórmules modals, aleshores $(A \wedge B)$ és una fórmula modal.

5. Si A i B són fórmules modals, aleshores $(A \vee B)$ és una fórmula modal.
6. Si A i B són fórmules modals, aleshores $(A \rightarrow B)$ és una fórmula modal.
7. Si A és una fórmula modal, aleshores $\Box A$ també és una fórmula modal.
8. Si A és una fórmula modal, aleshores $\Diamond A$ també és una fórmula modal.
9. Res més és una fórmula modal.

Denotem per FormMod al conjunt de totes les fórmules modals.

Definició 3.1.3. Les fórmules construïdes utilitzant els operadors definits s'han d'interpretar de la següent manera:

1. Definim la veritat, denotada per $\top$, com $\neg \perp$.
2. Definim la doble implicació, denotada per $A \leftrightarrow B$, com $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

Nota 3.1.1. Si una fórmula no conté els operadors modals ($\Box$ i $\Diamond$) diem que és no modal o clàssica.

3.2 Instàncies de substitució

Una instància d'una fórmula A és el resultat de substituir totes les aparicions d'una variable proposicional en A per altra fórmula. Aquest concepte és fonamental per a l'anàlisi de la validesa i la demostrabilitat en la lògica modal. A continuació, definim aquest concepte de manera més precisa.

Definició 3.2.1. (Instància de substitució). Siga A una fórmula modal en la qual totes les seues variables proposicionals són $p_1, \dots, p_n$. Siguen $D_1, \dots, D_n$ fórmules modals. Definim $A[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n]$ com el resultat de substituir simultàniament cada D_i per p_i en A . Notem que és una definició recursiva sobre A :

1. Si $A \equiv \perp$, aleshores $A[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n]$ és $\perp$.
2. Si $A \equiv q$, aleshores $A[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n]$ és q , sempre que $q \neq p_i$ per a $i = 1, \dots, n$.
3. Si $A \equiv p_i$, aleshores $A[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n]$ és D_i .
4. Si $A \equiv \neg B$, aleshores $A[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n]$ és $\neg B[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n]$.
5. Si $A \equiv (B \wedge C)$, aleshores

$$A[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n] = (B[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n] \wedge C[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n]).$$

6. Si $A \equiv (B \vee C)$, aleshores

$$A[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n] = (B[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n] \vee C[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n]).$$

7. Si $A \equiv (B \rightarrow C)$, aleshores

$$A[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n] = (B[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n] \rightarrow C[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n]).$$

8. Si $A \equiv (B \leftrightarrow C)$, aleshores

$$A[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n] = (B[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n] \leftrightarrow C[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n]).$$

9. Si $A \equiv \Box B$, aleshores $A[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n] = \Box B[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n]$.

10. Si $A \equiv \Diamond B$, aleshores $A[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n] = \Diamond B[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n]$.

La fórmula $A[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n]$ s'anomena una instància de substitució d' A .

3.3 Models relacionals

El concepte bàsic de semàntica per a la lògica modal normal és el de model. Consisteix en un conjunt de mons, els quals estan relacionats mitjançant una relació d'accessibilitat binària, junt amb una assignació que determina quines variables proposicionals es consideren “vertaderes” en cada món.

Definició 3.3.1. (Model) Un model és una tupla $M = (W, R, V)$, on

- W és un conjunt els elements del qual s'anomenen *mons*.
- $R \subseteq W \times W$ és una relació binària, anomenada relació d'accessibilitat.
- $v : V \longrightarrow \mathcal{P}(W)$ és una aplicació, anomenada valoració, que assigna a cada variable proposicional aquells mons on “és vertadera”.

A més, si $(w, w') \in R$ diem que w' és accessible desde w . I si $w \in W$ satisfà que $w \in v(p)$ diem que p és vertadera en w .

Exemple 3.3.1. Considerem el model $M = (W, R, V)$, on $W = \{1, 2, 3\}$, $R = \{(1, 2), (1, 3)\}$ i l'aplicació v està definida com segueix:

$$\begin{aligned} v : V &\longrightarrow \mathcal{P}(W) \\ p &\longmapsto \{1, 2\} \\ q &\longmapsto \emptyset \\ r &\longmapsto \{1\} \end{aligned}$$

Hem representat en la Figura 3.1 aquest model amb un diagrama senzill.

Cal notar que els mons es representen per nodes, i el món w' és accessible des de w quan hi ha una fletxa de w a w' . A més, etiquetem un node (món w) amb p quan $w \in V(p)$.

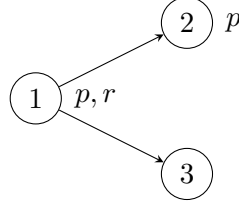


Figura 3.1: El model de l'Exemple 3.3.1.

3.4 Veritat, validesa i tautologies

Cada model determina quines fórmules modals es consideren vertaderes en cada món dins del model. La relació “el model M fa que la fórmula A siga vertadera en el món w ” és un concepte fonamental de la semàntica relacional.

Aquesta relació es defineix recursivament i coincideix amb la caracterització habitual mitjançant taules de veritat per als operadors no modals. A continuació, definim el concepte de veritat, que estableix quan una fórmula és vertadera en un món determinat.

Definició 3.4.1. (Fórmula vertadera en un món). Siga A una fórmula, $M = (W, R, V)$ un model, i $w \in W$ un món. Anem a definir recursivament que A és vertadera en el món w del model M , i escriurem $M, w \Vdash A$. Així, $M, w \Vdash A$ si

1. Si $A \equiv \perp$, aleshores mai es té que $M, w \Vdash \perp$.
2. $M, w \Vdash p$ si, i només si, $w \in V(p)$.
3. Si $A \equiv \neg B$, aleshores $M, w \Vdash A$ si, i només si, $M, w \nVdash B$.
4. Si $A \equiv (B \wedge C)$, aleshores $M, w \Vdash A$ si, i només si, $M, w \Vdash B$ i $M, w \Vdash C$.
5. Si $A \equiv (B \vee C)$, aleshores $M, w \Vdash A$ si, i només si, $M, w \Vdash B$ o $M, w \Vdash C$.
6. Si $A \equiv (B \rightarrow C)$, aleshores $M, w \Vdash A$ si, i només si, $M, w \nVdash B$ o $M, w \Vdash C$.
7. Si $A \equiv \Box B$, aleshores $M, w \Vdash A$ si, i només si, $M, w' \Vdash B$ per a cada $w' \in W$ amb $(w, w') \in R$.
8. Si $A \equiv \Diamond B$, aleshores $M, w \Vdash A$ si, i només si, $M, w' \Vdash B$, per a algun $w' \in W$ amb $(w, w') \in R$.

Exemple 3.4.1. Siga $A \equiv \Diamond((p \wedge q) \rightarrow r)$. Anem a vore que en el model de la Figura 3.1 tenim $M, 1 \Vdash A$.

Per la definició anterior, sabem que $M, 1 \Vdash A$, és a dir, $M, 1 \Vdash \Diamond((p \wedge q) \rightarrow r)$ si existeix al menys un $w' \in W$ amb $(1, w') \in R$ tal que $M, w' \Vdash ((p \wedge q) \rightarrow r)$.

Notem que $M, 2 \Vdash ((p \wedge q) \rightarrow r)$ si, i només si, $M, 2 \not\Vdash (p \wedge q)$ o $M, 2 \Vdash r$. No tenim $M, 2 \Vdash r$, vejам si tenim l'altra. Notem que $M, 2 \not\Vdash (p \wedge q)$ si, i només si, $M, 2 \not\Vdash p$ o $M, 2 \not\Vdash q$. Com $M, 2 \not\Vdash q$, ja ho tenim. Per tant, $M, 2 \Vdash ((p \wedge q) \rightarrow r)$, i així, $M, 1 \Vdash A$.

També resulta útil expressar la relació entre els operadors modals de necessitat i possibilitat. En concret, a continuació es mostra que una fórmula és necessària si, i només si, és impossible que la seua negació siga possible, i, de manera anàloga, que una fórmula és possible si, i només si, no és necessari que la seua negació siga vertadera.

Proposició 3.4.1. $M, w \Vdash \Box A$ si, i només si, $M, w \Vdash \neg \Diamond \neg A$.

Demostració. Suposem que

$$M, w \Vdash \Box A.$$

Així, per a tot món $w' \in W$ amb $(w, w') \in R$ es té que $M, w' \Vdash A$.

Per reducció a l'absurd, suposem que

$$M, w \Vdash \Diamond \neg A.$$

Aleshores existeix un $w' \in W$ per al què $(w, w') \in R$ i tal que $M, w' \Vdash \neg A$, és a dir, $M, w' \not\Vdash A$, que és una contradicció perquè estàvem suposant que $M, w' \Vdash A$, per a tot $w' \in W$ amb $(w, w') \in R$. Per tant, $M, w \not\Vdash \Diamond \neg A$, és a dir, $M, w \Vdash \neg \Diamond \neg A$.

Suposem ara que

$$M, w \Vdash \neg \Diamond \neg A.$$

Així, $M, w \not\Vdash \Diamond \neg A$, per a $w \in W$. Ara, que $M, w \not\Vdash \Diamond \neg A$ vol dir que $M, w' \not\Vdash \neg A$ per a tot $w' \in W$ amb $(w, w') \in R$, per tant, $M, w' \Vdash A$, per a tot $w' \in W$ amb $(w, w') \in R$. I per definició, açò vol dir que $M, w \Vdash \Box A$. $\square$

Proposició 3.4.2. $M, w \Vdash \Diamond A$ si, i només si, $M, w \Vdash \neg \Box \neg A$.

Demostració. Suposem que

$$M, w \Vdash \Diamond A.$$

Així, existeix un $w' \in W$ amb $(w, w') \in R$ tal que $M, w' \Vdash A$.

Suposem per reducció a l'absurd que

$$M, w \Vdash \Box \neg A.$$

Així, per a tot $w' \in W$ amb $(w, w') \in R$, $M, w' \Vdash \neg A$. És a dir, $M, w' \not\Vdash A$, per a tot $w' \in W$ amb $(w, w') \in R$, que contradiu que existeix un $w' \in W$ amb $(w, w') \in R$ tal que $M, w' \Vdash A$. Per tant, $M, w \not\Vdash \Box \neg A$.

Suposem ara que

$$M, w \Vdash \neg \Box \neg A.$$

Així, $M, w \nVdash \Box \neg A$. És a dir, existeix al menys un $w' \in W$ amb $(w, w') \in R$ tal que $M, w' \nVdash \neg A$, i açò ho tenim si, i només si, $M, w' \Vdash A$ per a algun $w' \in W$ amb $(w, w') \in R$. Per definició, açò significa que $M, w \Vdash \Diamond A$. $\square$

De vegades ens interessa saber quines fórmules són vertaderes en tots els mons d'un model donat. Introduïm ara una definició per a aquest concepte.

Definició 3.4.2. (Fórmula vertadera en un model). Una fórmula A és vertadera en $M = (W, R, V)$, escrit $M \Vdash A$, si, i només si, $M, w \Vdash A$ per a tot $w \in W$.

A continuació es presenten dues propietats generals sobre la validesa de fórmules en els models modals.

Proposició 3.4.3. 1. Si $M \Vdash A$, aleshores $M \nVdash \neg A$, però no a l'inrevés.

2. Si $M \Vdash A \rightarrow B$, aleshores si $M \Vdash A$ llavors $M \Vdash B$, però no a l'inrevés.

Demostració. 1. Suposem que $M \Vdash A$, aleshores $M, w \Vdash A$ per a tot $w \in W$. Suposem per reducció a l'absurd que $M \Vdash \neg A$, aleshores per a tot $w \in W$, $M, w \Vdash \neg A$, que contradeix al fet que $M, w \Vdash A$ per a tot $w \in W$. Per tant, $M, w \nVdash \neg A$.

Suposem ara que $M \nVdash \neg A$, per tant existeix $w \in W$ per al què $M, w \Vdash A$. Açò no obliga a que $M, w \Vdash A$ per a tot $w \in W$. Vejam un contraexemple en la Figura 3.2, on $M \nVdash \neg p$ i $M \nVdash p$.

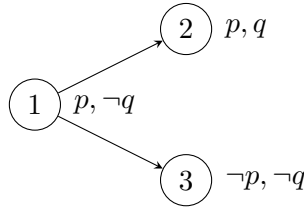


Figura 3.2: $M \nVdash \neg p$ i $M \nVdash p$.

2. Suposem que $M \Vdash A \rightarrow B$ i $M \Vdash A$. Aleshores, $M, w \Vdash A \rightarrow B$ i $M, w \Vdash A$ per a tot mon $w \in W$, així, $M, w \Vdash B$, i com que ho tenim per a tot $w \in W$, també tenim $M \Vdash B$.

Per a vore que no es dona l'altra implicació, vejam un contraexemple. En la Figura 3.2, tenim que $M \nVdash p$. Així, si $M \Vdash p$ aleshores $M \Vdash q$. Però $M \nVdash p \rightarrow q$, perquè en el món 1, p és vertader i q fals.

$\square$

D'igual manera que hem dit que de vegades ens interessin les fórmules que són vertaderes en tots els mons d'un model, les fórmules que són vertaderes en tots els models, és a dir, vertaderes en cada món de tots els models, són també interessants. Anomenem a aquestes fórmules vàlides.

Notem que no totes les fórmules que podríem esperar que foren vàlides segons la interpretació de $\Box$ ho són. Alguns models, com per exemple els reflexius (on cada món és accessible des de si mateix), fan que la fórmula $A \equiv \Box p \rightarrow p$ siga vàlida, però A no és sempre vàlida.

A continuació, definim aquest concepte de manera precisa.

Definició 3.4.3. (Fórmula vàlida) Una fórmula és vàlida en una classe $\mathcal{C}$ de models, escrit $\mathcal{C} \models A$, si és vertadera en cada model de $\mathcal{C}$. Escriurem $\models A$ si A és vàlida en qualsevol model.

Vegem un exemple de fórmula vàlida.

Exemple 3.4.2. Anem a vore que

$$\models p \rightarrow p.$$

Siga $M = (W, R, V)$ un model, volem vore que $M \models p \rightarrow p$. Siga $w \in W$, volem demostrar que $M, w \models p \rightarrow p$. Açò es té si $M, w \not\models p$ (si, i només si, $w \notin V(p)$) o si $M, w \models p$ (si, i només si, $w \in V(p)$). Com necessàriament ha de passar $w \in V(p)$ o $w \notin V(p)$, es té que $M, w \models p$. Així, $\models p \rightarrow p$.

Exemple 3.4.3. Siga $\mathcal{C}$ la classe de tots els models per als què la relació d'accessibilitat és reflexiva. Aleshores,

$$\mathcal{C} \models \Box p \rightarrow p.$$

Anem a vore-ho. Siga $M = (W, R, V)$ un model en $\mathcal{C}$, volem vore que $M \models \Box p \rightarrow p$. Siga $w \in W$, volem vore que $M, w \models \Box p \rightarrow p$. Açò es té si $M, w \not\models \Box p$ o $M, w \models p$. Suposem que $M, w \not\models p$. Aleshores, com R és reflexiva, $(w, w) \in R$, així, $M, w \not\models \Box p$. Per tant, $M, w \models \Box p \rightarrow p$, així $M \models \Box p \rightarrow p$, com volíem.

Presentem ara una proposició que descriu com es conserva la validesa d'una fórmula quan es considera un subconjunt d'una classe de models en què ja era vàlida.

Proposició 3.4.4. Si $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ i $\mathcal{C} \models A$, aleshores $\mathcal{C}' \models A$.

Ara es mostra com la validesa absoluta d'una fórmula implica també la validesa de la seua necessitat.

Proposició 3.4.5. Si A és vàlida, aleshores $\Box A$ també. És a dir, si $\models A$, aleshores $\models \Box A$.

Demostració. Suposem $\models A$. Siga $M = (W, R, V)$ un model. Siga $w \in W$ un món qualsevol. Com estem suposant que $\models A$, tenim $M, w' \models A$ per a tot $w' \in W$ amb $(w, w') \in R$. Així, es té que $M, w \models \Box A$. Per tant, $\models \Box A$. $\square$

Una fórmula sense modalitats és una tautologia si és vertadera en totes les assignacions de valors de veritat. Tota tautologia és vertadera en tots els mons de tots els models. Però per a fórmules modals (amb $\Box$ i $\Diamond$), no està definit el concepte de tautologia.

El concepte d'instància tautològica (una fórmula que és una instància d'una tautologia no modal), que introduïrem ara, ajuda a resoldre aquest buit. També demostrarem que totes les instàncies tautològiques són vàlides.

Definició 3.4.4. (Instància tautològica). Una fórmula modal B és una instància tautològica si, i només si, existeix una tautologia lliure de modalitats A amb variables proposicionals $p_1, \dots, p_n$ i fórmules $D_1, \dots, D_n$ tal que $B \equiv A[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n]$.

En el següent lema es mostra que una fórmula proposicional clàssica conserva la seua veritat quan es substitueixen les seues variables per fórmules modals. Es tracta d'una correspondència entre valoracions clàssiques i models modals, que permet garantir la coherència entre ambdós contextos sota certes condicions.

Lema 3.4.1. *Suposem que A és una fórmula lliure de modalitats, és a dir, una fórmula proposicional clàssica sobre les variables proposicionals $p_1, \dots, p_n$ i siguen $D_1, \dots, D_n$ fórmules modals. Aleshores, per a tota valoració $v : \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow 2$, per a tot model $M = (W, R, V)$ i per a tot $w \in W$ tal que per a tot $1 \leq i \leq n$, satisfà que $v(p_i) = 1$ si, i només si, $M, w \Vdash D_i$, tenim que $v^\sharp(A) = 1$ si, i només si, $M, w \Vdash A[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n]$.*

Demostració. Per inducció sobre la fórmula A .

Cas 1: $A \equiv \perp$.

Per una banda, $v^\sharp(\perp) = 1$, i per altra banda, $M, w \not\Vdash \perp$. Per tant, $v^\sharp(\perp) = 1$ si, i només si, $M, w \Vdash \perp$.

Cas 2: $A \equiv q$, on $q \neq p_i$, per a tot $1 \leq i \leq n$.

Si $v^\sharp(q) = 1$, aleshores $M, w \Vdash q$. Per altra part, com $A[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n] = q$, es té que $M, w \Vdash A[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n]$. Per tant, $v^\sharp(q) = 1$ si, i només si, $M, w \Vdash A[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n]$, com volíem vore.

Cas 3: $A \equiv p_i$, volem demostrar $v^\sharp(A) = 1$ si, i només si, $M, w \Vdash A[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n]$. Suposem que $v^\sharp(A) = 1$, açò és cert si $v(p_i) = 1$. Com w satisfà la hipòtesi del lema es té que $M, w \Vdash D_i$. Notem que $D_i \equiv A[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n]$. Per tant, $M, w \Vdash A[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n]$.

Per altra banda, suposem que $M, w \Vdash A[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n]$. Com $A[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n] \equiv D_i$, es té que $M, w \Vdash D_i$. Com w satisfà la hipòtesi del lema, aleshores $v(p_i) = 1$. Per tant, $v^\sharp(A) = v(p_i) = 1$.

Hipòtesi inductiva. Suposem l'enunciat cert per a les fórmules lliures de modalitats B i C . Demostrem-ho per als següents casos.

Cas 4: $A \equiv \neg B$. Tenim que

$$\begin{aligned}
v^\#(A) = 1 \text{ si, i només si, } v^\#(B) = 0 \\
& \text{si, i només si, } M, w \not\models B[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n] \\
& \text{si, i només si, } M, w \models \neg B[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n] \\
& \text{si, i només si, } M, w \models \neg(B[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n]) \equiv (\neg B)[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n] \\
& \text{si, i només si, } M, w \models A[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n].
\end{aligned}$$

Cas 5: $A \equiv B \wedge C$. Tenim que

$$\begin{aligned}
v^\#(A) = 1 \text{ si, i només si, } v^\#(B) = v^\#(C) = 1 \\
& \text{si, i només si, } M, w \models B[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n] \text{ i } M, w \models C[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n] \\
& \text{si, i només si, } M, w \models (B \wedge C)[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n] \\
& \text{si, i només si, } M, w \models A[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n].
\end{aligned}$$

Cas 6: $A \equiv B \vee C$. Tenim que

$$\begin{aligned}
v^\#(A) = 1 \text{ si, i només si, } v^\#(B) = 1 \text{ o } v^\#(C) = 1 \\
& \text{si, i només si, } M, w \models B[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n] \text{ o } M, w \models C[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n] \\
& \text{si, i només si, } M, w \models (B \vee C)[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n] \\
& \text{si, i només si, } M, w \models A[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n].
\end{aligned}$$

Cas 7: $A \equiv B \rightarrow C$. Tenim que

$$\begin{aligned}
v^\#(A) = 1 \text{ si, i només si, } v^\#(B) = 0 \text{ o } v^\#(C) = 1 \\
& \text{si, i només si, } M, w \not\models B[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n] \text{ o } M, w \models C[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n] \\
& \text{si, i només si, } M, w \models (B \rightarrow C)[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n] \\
& \text{si, i només si, } M, w \models A[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n].
\end{aligned}$$

□

Corol·lari 3.4.1. *Totes les tautologies proposicionals són vàlides.*

Demostració. Fem la demostració per reducció a l'absurd. Siga A una tautologia. Suposem que A no és vàlida. Aleshores existeix un model $M = (W, R, V)$ i un món $w \in W$ de forma que $M, w \not\models A$. Siguen $\{p_1, \dots, p_n\}$ les variables proposicionals que ocorren en A . Considerem la següent valoració

$$\begin{aligned}
v : \{p_1, \dots, p_n\} & \longrightarrow 2 \\
p_i & \longmapsto \begin{cases} 1, & \text{si } M, w \models p_i \\ 0, & \text{en altre cas} \end{cases}
\end{aligned}$$

Aleshores com el món w satisfà la condició $v(p_i) = 1$ si, i només si, $M, w \Vdash p_i$. Pel Lema tècnic 3.4.1, $M, w \Vdash A[p_1/p_1, \dots, p_n/p_n]$ si, i només si, $v^\sharp(A) = 1$. Notem que $A[p_1/p_1, \dots, p_n/p_n] \equiv A$. Com que $M, w \nVdash A$, aleshores, pel Lema tenim que $v^\sharp(A) \neq 1$. Per tant, $v^\sharp(A) = 0$, contradient que A és una tautologia. $\square$

3.5 Esquemes de validesa

Definició 3.5.1. (Esquema). Donada una fórmula modal C sobre les variables $p_1, \dots, p_n$, l'esquema de C és el conjunt de totes les fórmules modals que resulten de fer substitucions en C , és a dir,

$$\{C[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n] \mid D_1, \dots, D_n \text{ són fórmules modals}\}.$$

La fórmula C s'anomena fórmula característica de l'esquema, i és única (excepte per un canvi de nom de les variables proposicionals). Una fórmula A és una instància d'un esquema si és un membre del conjunt anterior.

A més, diem que un esquema és vertader en un model si, i només si, totes les seues instàncies ho són. Per altra part, un esquema és vàlid si, i només si, és vertader en tot model.

A continuació presentem alguns esquemes i propietats bàsiques que resulten essencials per al desenvolupament de la lògica modal. Aquestes propietats reflecteixen la manera en què es relacionen els conceptes de necessitat, possibilitat i implicació dins del sistema, i constitueixen la base per a moltes demostracions i resultats posteriors.

Proposició 3.5.1. *El següent esquema, que anomenarem K , és vàlid.*

$$\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B) \quad (\text{K})$$

Demostració. Siga $M = (W, R, V)$ un model i $w \in W$, hem de demostrar que

$$M, w \Vdash \Box(A \rightarrow B) \rightarrow M, w \Vdash (\Box A \rightarrow \Box B).$$

Suposem que

$$M, w \Vdash \Box(A \rightarrow B),$$

hem de demostrar que

$$M, w \Vdash \Box A \rightarrow \Box B.$$

Així, suposem que $M, w \Vdash \Box A$. Hem de vore que $M, w \Vdash \Box B$. Siga $w' \in W$ tal que $(w, w') \in R$. Hem de demostrar que $M, w' \Vdash B$. Com $M, w \Vdash \Box(A \rightarrow B)$ i $(w, w') \in R$, aleshores, $M, w' \Vdash A \rightarrow B$, és a dir, $M, w' \nVdash A$ o $M, w' \Vdash B$. Ara, com $M, w \Vdash \Box A$ i $(w, w') \in R$, aleshores, $M, w' \Vdash A$. Així, necessàriament $M, w' \Vdash B$. Per tant, $M, w \Vdash \Box B$, com volíem. $\square$

Proposició 3.5.2. *El següent esquema, que anomenarem DUAL, és vàlid.*

$$\Diamond A \leftrightarrow \neg \Box \neg A \quad (\text{DUAL})$$

Demostració. Siga $M = (W, R, V)$ un model i $w \in W$. Hem de vore que $M, w \Vdash \Diamond A \leftrightarrow M, w \Vdash \neg \Box \neg A$.

Per una part, suposem que

$$M, w \Vdash \Diamond A,$$

hem de demostrar que

$$M, w \Vdash \neg \Box \neg A.$$

És a dir, $M, w \not\Vdash \Box \neg A$. Siga $w' \in W$ tal que $(w, w') \in R$. Hem de vore que existeix $w' \in W$ tal que $M, w' \not\Vdash \neg A$, és a dir, $M, w' \Vdash A$. Per hipòtesi, sabem que $M, w \Vdash \Diamond A$, és a dir, existeix $w' \in W$ amb $(w, w') \in R$ tal que $M, w' \Vdash A$. Per tant, ja hem trobat el w' que volíem. Així, $M, w \Vdash \neg \Box \neg A$.

Per altra part, suposem ara que

$$M, w \Vdash \neg \Box \neg A.$$

Hem de demostrar que

$$M, w \Vdash \Diamond A.$$

Com $M, w \Vdash \neg \Box \neg A$, es té $M, w \not\Vdash \Box \neg A$, és a dir, existeix $w' \in W$ amb $(w, w') \in R$ tal que $M, w' \not\Vdash \neg A$. Açò es té si, i només si, $M, w' \Vdash A$. Per tant, com hem trobat un $w' \in W$ amb $(w, w') \in R$ tal que $M, w' \Vdash A$, tenim que $M, w \Vdash \Diamond A$. $\square$

Proposició 3.5.3. *Si A i $A \rightarrow B$ són fórmules vertaderes en un model, aleshores B també ho és.*

Demostració. Per definició, sabem que A és vertadera en $M = (W, R, V)$ si, i només si, $M, w \Vdash A$, per a tot $w \in W$. Anàlogament, $A \rightarrow B$ és vertadera en M si, i només si, $M, w \Vdash (A \rightarrow B)$, per a tot món $w \in W$. Volem vore que $M \Vdash B$, és a dir,

$$M, w \Vdash B,$$

per a tot $w \in W$. Tenim que $M, w \Vdash A \rightarrow B$. Açò és, $M, w \not\Vdash A$ o $M, w \Vdash B$. Com no tenim que $M, w \not\Vdash A$, ja que per hipòtesi $M, w \Vdash A$, tindrem $M, w \Vdash B$. Per tant, $M \Vdash B$, com volíem. $\square$

Nota 3.5.1. La Proposició 3.5.3 ens permet afirmar que les fórmules vàlides estan tancades per modus ponens.

A continuació, presentem diversos exemples d'esquemes vàlids i no vàlids, amb la finalitat d'analitzar aquest concepte amb més profunditat.

Proposició 3.5.4. *L'esquema $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Diamond A \rightarrow \Diamond B)$ és vàlid.*

Demostració. Siga el model $M = (W, R, V)$ i $w \in W$. Hem de vore que

$$M, w \Vdash \Diamond A \rightarrow \Diamond B \text{ o } M, w \nVdash \Box(A \rightarrow B).$$

Suposem que $M, w \Vdash \Box(A \rightarrow B)$, açò és, per a tot $w' \in W$ tal que $(w, w') \in R$, $M, w' \Vdash (A \rightarrow B)$. És a dir, $M, w' \nVdash A$ o $M, w' \Vdash B$, per a tot $w' \in W$ tal que $(w, w') \in R$.

Ara, volem vore que $M, w \Vdash \Diamond A \rightarrow \Diamond B$, açò és, $M, w \nVdash \Diamond A$ o $M, w \Vdash \Diamond B$. Però com teníem $M, w' \nVdash A$ o $M, w' \Vdash B$, per a tot $w' \in W$ tal que $(w, w') \in R$, necessàriament tindrem que $M, w \nVdash \Diamond A$ o $M, w \Vdash \Diamond B$. Per tant, $M, w \Vdash \Diamond A \rightarrow \Diamond B$. $\square$

Proposició 3.5.5. *L'esquema $\Diamond(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Diamond B)$ és vàlid.*

Demostració. Siga el model $M = (W, R, V)$ i el món $w \in W$. Hem de vore que

$$M, w \Vdash (\Box A \rightarrow \Diamond B) \text{ o } M, w \nVdash \Diamond(A \rightarrow B).$$

Suposem que $M, w \Vdash \Diamond(A \rightarrow B)$, açò és, existeix $w' \in W$ amb $(w, w') \in R$ tal que $M, w' \Vdash A \rightarrow B$. És a dir, $M, w' \nVdash A$ o $M, w' \Vdash B$.

Ara, volem vore que $M, w \Vdash (\Box A \rightarrow \Diamond B)$, és a dir, $M, w \nVdash \Box A$ o $M, w \Vdash \Diamond B$. Així, si tenim $M, w' \nVdash A$, aleshores $M, w \nVdash \Box A$. I si tenim, $M, w' \Vdash B$, aleshores $M, w \Vdash \Diamond B$, com volíem. Per tant, $M, w \Vdash (\Box A \rightarrow \Diamond B)$. $\square$

Proposició 3.5.6. *L'esquema $\Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$ és vàlid.*

Demostració. Siga $M = (W, R, V)$ un model i $w \in W$ un món.

Per una banda, suposem que

$$M, w \Vdash \Box(A \wedge B).$$

Volem demostrar que

$$M, w \Vdash (\Box A \wedge \Box B).$$

Com $M, w \Vdash \Box(A \wedge B)$, per a tot $w' \in W$ amb $(w, w') \in R$, es té $M, w' \Vdash A \wedge B$. És a dir, $M, w' \Vdash A$ i $M, w' \Vdash B$. Per tant, com ho tenim per a tot $w' \in W$, significa que $M, w \Vdash \Box A$ i $M, w \Vdash \Box B$, és a dir, $M, w \Vdash (\Box A \wedge \Box B)$, com volíem vore.

Per altra banda, si suposem

$$M, w \Vdash (\Box A \wedge \Box B),$$

tenim $M, w \Vdash \Box A$ i $M, w \Vdash \Box B$. És a dir, per a tot $w' \in W$ amb $(w, w') \in R$, $M, w' \Vdash A$ i $M, w' \Vdash B$, equivalentment, $M, w' \Vdash A \wedge B$. Així, com ho tenim per a cada $w' \in W$ amb $(w, w') \in R$, tenim que $M, w \Vdash \Box(A \wedge B)$, com volíem demostrar. $\square$

Proposició 3.5.7. *L'esquema $\Box A \rightarrow \Box(B \rightarrow A)$ és vàlid.*

Demostració. Siga $M = (W, R, V)$ un model i $w \in W$ un món. Suposem que

$$M, w \Vdash \Box A.$$

És a dir, per a tot $w' \in W$ amb $(w, w') \in R$, tenim que $M, w' \Vdash A$. Volem vore que

$$M, w \Vdash \Box(B \rightarrow A),$$

és a dir, per a tot $w' \in W$ amb $(w, w') \in R$ es té que $M, w' \Vdash B \rightarrow A$. Açò és, $M, w' \nVdash B$ o $M, w' \Vdash A$. Aquesta última la tenim per hipòtesi. Per tant, es té $M, w \Vdash \Box(B \rightarrow A)$. $\square$

Proposició 3.5.8. *L'esquema $\neg\Diamond A \rightarrow \Box(A \rightarrow B)$ és vàlid.*

Demostració. Siga $M = (W, R, V)$ un model i $w \in W$ un món. Suposem que

$$M, w \Vdash \neg\Diamond A,$$

és a dir, $M, w \nVdash \Diamond A$. En altres paraules, per a tot $w' \in W$ amb $(w, w') \in R$, tenim que $M, w' \nVdash A$. Ara volem vore que

$$M, w \Vdash \Box(A \rightarrow B),$$

és a dir, per a tot $w' \in W$ amb $(w, w') \in R$ es té que $M, w' \Vdash A \rightarrow B$. Açò és, $M, w' \nVdash A$ o $M, w' \Vdash B$. Com hem vist que $M, w' \nVdash A$, per a tot $w' \in W$ amb $(w, w') \in R$, ja ho tenim. Per tant, $M, w \Vdash \Box(A \rightarrow B)$. $\square$

Proposició 3.5.9. *L'esquema $\Diamond(A \vee B) \leftrightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B)$ és vàlid.*

Demostració. Siga $M = (W, R, V)$ un model i $w \in W$ un món. Anem a demostrar la doble implicació, és a dir, anem a vore que

$$M, w \Vdash \Diamond(A \vee B) \text{ si, i només si, } M, w \Vdash (\Diamond A \vee \Diamond B).$$

Suposem que $M, w \Vdash \Diamond(A \vee B)$. Per definició, existeix un món $w' \in W$ amb $(w, w') \in R$ tal que $M, w' \Vdash A \vee B$ si, i només si, $M, w' \Vdash A$ o $M, w' \Vdash B$ si, i només si, $M, w \Vdash \Diamond A$ o $M, w \Vdash \Diamond B$ si, i només si, $M, w \Vdash \Diamond A \vee \Diamond B$. $\square$

Proposició 3.5.10. *L'esquema $\Box(A \vee B) \rightarrow (\Box A \vee \Box B)$ no és vàlid.*

Demostració. Volem vore que $\Box(A \vee B) \not\vdash (\Box A \vee \Box B)$.

Siga $M = (W, R, V)$, amb $w_1, w_2, w_3 \in W$. En la següent figura veiem un contraexemple.

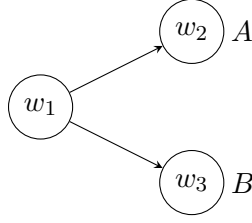


Figura 3.3: Contraexemple de l'esquema $\Box(A \vee B) \rightarrow (\Box A \vee \Box B)$.

Observem que tenim $\Box(A \vee B)$ perquè per a tot $w' \in W$, amb $(w, w') \in R$, $M, w' \Vdash A$ o $M, w' \Vdash B$, però no tenim $\Box A \vee \Box B$. Açò ho tindriem si $M, w_1 \Vdash \Box A$ o $M, w_1 \Vdash \Box B$, però notem que, per una part, $(w_1, w_2) \in R$ i $M, w_2 \nVdash B$, per tant $M, w_1 \nVdash \Box B$, i per altra part, $(w_1, w_3) \in R$ i $M, w_3 \nVdash A$, per tant $M, w_1 \nVdash \Box A$. És a dir, $M, w \nVdash \Box A \vee \Box B$. $\square$

Proposició 3.5.11. *L'esquema $(\Diamond A \wedge \Diamond B) \rightarrow \Diamond(A \wedge B)$ no és vàlid.*

Demostració. Vejam un contraexemple. Siga el següent model.

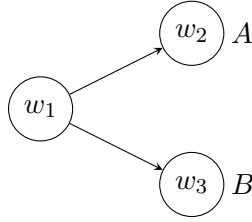


Figura 3.4: Contraexemple de l'esquema $(\Diamond A \wedge \Diamond B) \rightarrow \Diamond(A \wedge B)$.

Es té $\Diamond A \wedge \Diamond B$ perquè $(w_1, w_2) \in R$, $(w_1, w_3) \in R$ i $M, w_2 \Vdash A$, $M, w_3 \Vdash B$. Però no es té $\Diamond(A \wedge B)$ perquè $M, w_2 \nVdash A \wedge B$ i $M, w_3 \nVdash A \wedge B$. Per tant, queda demostrat que aquest esquema no és vàlid. $\square$

Proposició 3.5.12. *L'esquema $A \rightarrow \Box A$ no és vàlid.*

Demostració. Vejam un contraexemple. Siga el següent model.

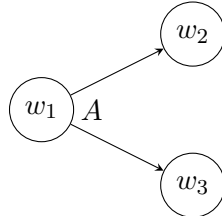


Figura 3.5: Contraexemple de l'esquema $A \rightarrow \Box A$.

Es té $M, w_1 \Vdash A$ però no $M, w_1 \Vdash \Box A$ perquè $(w_1, w_2) \in R$ i $M, w_2 \nVdash A$, per tant, $M, w_1 \nVdash \Box A$. $\square$

Proposició 3.5.13. *L'esquema $\Box \Diamond A \rightarrow B$ no és vàlid.*

Demostració. Vejam un contraexemple. Siga el següent model.

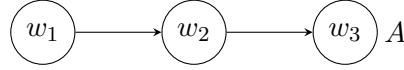


Figura 3.6: Contraexemple de l'esquema $\Box \Diamond A \rightarrow B$.

Notem que tenim $M, w_1 \Vdash \Box \Diamond A$, ja que per a tot món al què es pot accedir a partir de w_1 , que és soles w_2 , es té $M, w_2 \Vdash \Diamond A$. Però no tenim $M, w_1 \Vdash B$. $\square$

Proposició 3.5.14. *L'esquema $\Box \Box A \rightarrow \Box A$ no és vàlid.*

Demostració. Vejam un contraexemple. Siga el següent model.

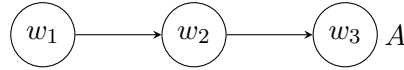


Figura 3.7: Contraexemple de l'esquema $\Box \Box A \rightarrow \Box A$.

Notem que tenim $M, w_1 \Vdash \Box \Box A$, ja que per a tot món al què es pot accedir a partir de w_1 , que és soles w_2 , es té $M, w_2 \Vdash \Box A$, ja que $w_3 \Vdash A$, i $(w_2, w_3) \in R$. Però no tenim $M, w_1 \Vdash \Box A$, ja que $M, w_2 \nVdash A$. $\square$

Proposició 3.5.15. *L'esquema $\Box \Diamond A \rightarrow \Diamond \Box A$ no és vàlid.*

Demostració. Vejam un contraexemple. Siga el següent model.

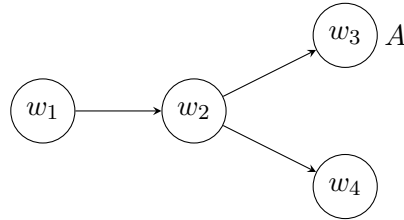


Figura 3.8: Contraexemple de l'esquema $\Box \Diamond A \rightarrow \Diamond \Box A$.

Observem que es té $M, w_1 \Vdash \Box \Diamond A$, ja que per a tot món al què es pot accedir a partir de w_1 , que és soles w_2 , es té $M, w_2 \Vdash \Diamond A$, perquè $M, w_3 \Vdash A$, i $(w_2, w_3) \in R$. Però també podem vore que no es té $M, w_1 \Vdash \Diamond \Box A$, perquè $M, w_2 \nVdash \Box A$, per no tindre $M, w_4 \Vdash A$, amb $(w_2, w_4) \in R$. $\square$

En resum, agrupem aquestes últimes proposicions en la Taula 3.1.

Esquemes vàlids	Esquemes no vàlids
$\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Diamond A \rightarrow \Diamond B)$	$\Box(A \vee B) \rightarrow (\Box A \vee \Box B)$
$\Diamond(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Diamond B)$	$(\Diamond A \wedge \Diamond B) \rightarrow \Diamond(A \wedge B)$
$\Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$	$A \rightarrow \Box A$
$\Box A \rightarrow \Box(B \rightarrow A)$	$\Box \Diamond A \rightarrow B$
$\neg \Diamond A \rightarrow \Box(A \rightarrow B)$	$\Box \Box A \rightarrow \Box A$
$\Diamond(A \vee B) \leftrightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B)$	$\Box \Diamond A \rightarrow \Diamond \Box A$

Taula 3.1: Exemples d'esquemes vàlids i esquemes no vàlids.

Proposició 3.5.16. *Una fórmula A és vàlida si, i només si, totes les seues instàncies de substitució ho són. Així, un esquema és vàlid si, i només si, la seua fórmula característica ho és.*

Demostració. La implicació d'esquerra a dreta és immediata, en ser A una instància de substitució de si mateixa.

Vejam l'altra implicació. Suposem que A té com a variables $p_1, \dots, p_n$.

Siga $M = (W, R, V)$ un model i

$$B = A[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n]$$

una instància de substitució sobre A , amb $D_1, \dots, D_n$ fórmules modals. Definim un nou model $M' = (W, R, V')$ emprant el món i les relacions del model M però amb la valoració V' sobre les variables $p_1, \dots, p_n$ següent

$$V'(p_i) = \{w \in W : M, w \Vdash D_i\} \text{ i } V'(q) = V(q) \text{ amb } q \neq p_i, \text{ per a } 1 \leq i \leq n.$$

Anem a demostrar que $M, w \Vdash B$ si, i només si, $M', w \Vdash A$, per a tot $w \in W$, per inducció sobre la fórmula A .

Cas 1: $A \equiv \perp$, així, $B \equiv \perp$. Notem que $M', w \not\Vdash A$ i $M, w \not\Vdash B$

Cas 2: $A \equiv q$, amb $q \neq p_i$, per a tot $1 \leq i \leq n$. Així, $B \equiv q$. Es té la següent cadena d'equivalències.

$$M, w \Vdash q \text{ si, i només si, } w \in V(q) \text{ si, i només si, } w \in V'(q) \text{ si, i només si, } M', w \Vdash q.$$

Cas 3: $A \equiv p_i$, amb $1 \leq i \leq n$. Així, $B \equiv D_i$. Es té la següent cadena d'equivalències.

$$M, w \Vdash D_i \text{ si, i només si, } w \in V(p_i) \text{ si, i només si, } w \in V'(p_i) \text{ si, i només si, } M', w \Vdash p_i.$$

Hipòtesi inductiva. Suposem l'enunciat cert per a les fórmules lliures de modalitats B i C . És a dir, si B i C són vàlides, aleshores les seues instàncies de substitució també ho són. Demostrem-ho per als següents casos.

Cas 4: $A \equiv \neg B$.

Sabem que $M, w \Vdash \neg B$ si, i només si, $M, w \nVdash B$. Ara, per hipòtesi inductiva, tenim que

$$M, w \Vdash B \text{ si, i només si, } M', w \Vdash B[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n].$$

Per tant, $M, w \Vdash \neg B$ si, i només si, $M', w \nVdash B[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n]$. És a dir, tenim $M', w \Vdash \neg B[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n]$, com volíem.

Cas 5: $A \equiv B \wedge C$.

Volem demostrar que

$$M, w \Vdash B \wedge C \text{ si, i només si, } M', w \Vdash B[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n] \wedge C[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n].$$

Per una banda, sabem que $M, w \Vdash B \wedge C$ si, i només si, $M, w \Vdash B$ i $M, w \Vdash C$. Per altra banda, per hipòtesi inductiva sabem que

$$M, w \Vdash B \text{ si, i només si, } M', w \Vdash B[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n] \text{ i}$$

$$M, w \Vdash C \text{ si, i només si, } M', w \Vdash C[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n].$$

Per tant, $M, w \Vdash B \wedge C$ si, i només si, $M', w \Vdash B[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n] \wedge C[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n]$.

Cas 6: $A \equiv B \vee C$.

Volem demostrar que

$$M, w \Vdash B \vee C \text{ si, i només si, } M', w \Vdash B[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n] \vee C[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n].$$

Per una banda, sabem que $M, w \Vdash B \vee C$ si, i només si, $M, w \Vdash B$ o $M, w \Vdash C$. Per altra banda, per hipòtesi inductiva sabem que

$$M, w \Vdash B \text{ si, i només si, } M', w \Vdash B[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n] \text{ i}$$

$$M, w \Vdash C \text{ si, i només si, } M', w \Vdash C[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n].$$

Per tant, es té que $M, w \Vdash B \vee C$ si, i només si, $M', w \Vdash B[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n] \vee C[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n]$.

Cas 7: $A \equiv B \rightarrow C$.

Volem demostrar que

$$M, w \Vdash B \rightarrow C \text{ si, i només si, } M', w \Vdash B[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n] \rightarrow C[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n].$$

Per una banda, sabem que $M, w \Vdash B \rightarrow C$ si, i només si, $M, w \nVdash B$ o $M, w \Vdash C$. Per altra banda, per hipòtesi inductiva sabem que

$$M, w \Vdash B \text{ si, i només si, } M', w \Vdash B[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n] \text{ i}$$

$$M, w \Vdash C \text{ si, i només si, } M', w \Vdash C[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n].$$

Així, si estem en el cas en què $M, w \not\models B$, tindrem també $M', w \not\models B[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n]$, i si estem en el cas en què $M, w \models C$, tindrem $M', w \models C[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n]$.

Per tant, es té que $M, w \models B \rightarrow C$ si, i només si, $M', w \models B[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n] \rightarrow C[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n]$, com volíem.

Cas 8: $A \equiv \Box B$

Volem demostrar que

$$M, w \models \Box B \text{ si, i només si, } M', w \models \Box B[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n].$$

Per una part sabem que $M, w \models \Box B$ si, i només si, per a tot $w' \in W$ tal que $(w, w') \in R$, es té $M, w' \models B$.

I per hipòtesi inductiva, per a tot món w' tenim que

$$M, w' \models B \text{ si, i només si, } M', w' \models B[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n].$$

Així,

$M, w \models \Box B$ si, i només si, per a tot $w' \in W$ amb $(w, w') \in R$ es té que $M, w' \models B$
 si, i només si, per a tot $w' \in W$ amb $(w, w') \in R$ es té que $M', w' \models B[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n]$
 si, i només si, $M', w \models \Box B[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n]$.

Cas 9: $A \equiv \Diamond B$

Volem demostrar que

$$M, w \models \Diamond B \text{ si, i només si, } M', w \models \Diamond B[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n].$$

Per una part, sabem que $M, w \models \Diamond B$ si, i només si, existeix $w' \in W$ amb $(w, w') \in R$ tal que $M, w' \models B$.

Per hipòtesi inductiva, per a qualsevol món w' tal que $(w, w') \in R$, tenim que

$$M, w' \models B \text{ si, i només si, } M', w' \models B[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n].$$

Aleshores,

$M, w \models \Diamond B$ si, i només si, existeix $w' \in W$ amb $(w, w') \in R$ tal que $M, w' \models B$
 si, i només si, existeix un món $w' \in W$ amb $(w, w') \in R$ tal que $M', w' \models B[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n]$
 si, i només si, $M', w \models \Diamond B[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n]$.

□

3.6 Conseqüència semàntica

Amb el concepte de veritat en un món, podem definir una relació d'implicació entre fórmules. És a dir, una fórmula B implica A si en tots els models i tots els mons, sempre que B siga vertadera, A també ho és.

Definició 3.6.1. (Conseqüència semàntica). Siga Γ un conjunt de fórmules modals i A una fórmula modal. Direm que A és conseqüència semàntica de Γ , escrit $\Gamma \models A$, si, i només si, per a tot model $M = (W, R, V)$ i tot món $w \in W$, si es té $M, w \Vdash B$ per a tota fórmula $B \in \Gamma$, aleshores es té $M, w \Vdash A$.

Vegem dos exemples de conseqüència semàntica.

Exemple 3.6.1. Siguen $\Gamma = \{p, q\}$ i $A \equiv p \wedge q$. Tenim $p, q \models p \wedge q$.

Exemple 3.6.2. Anem a vore

$$(p \rightarrow \Diamond p) \models (\Box(\neg p)) \rightarrow \neg p.$$

Siga $M = (W, R, V)$ un model i $w \in W$ un món tal que $M, w \Vdash p \rightarrow \Diamond p$. Així, $M, w \nVdash p$ o $M, w \Vdash \Diamond p$. Raonem per casos.

Per una banda, sabem que $M, w \nVdash p$ si, i només si, $p \notin V(w)$. Volem vore que

$$M, w \Vdash (\Box(\neg p)) \rightarrow \neg p.$$

Notem que si $p \notin V(w)$, aleshores $M, w \Vdash \neg p$. Açò és suficient per a tindre que $M, w \Vdash (\Box(\neg p)) \rightarrow \neg p$.

Per altra banda, si $M, w \Vdash \Diamond p$, existeix $w' \in W$ tal que $(w, w') \in R$ i $M, w' \Vdash p$. Volem demostrar que $M, w \Vdash (\Box(\neg p)) \rightarrow \neg p$. Suposem per reducció a l'absurd que

$$M, w \Vdash \Box \neg p,$$

en particular $M, w' \Vdash \neg p$, és a dir, $M, w' \nVdash p$, que és una contradicció.

Per tant, tindrem que $M, w \nVdash \Box \neg p$, i així, $M, w \Vdash (\Box(\neg p)) \rightarrow \neg p$, com volíem.

Capítol 4

Definibilitat en el marc

La lògica modal analitza la relació entre la relació d'accessibilitat i la veritat de certes fórmules en certs models. Per exemple, si la relació és reflexiva (cada món és accessible des de si mateix), aleshores la fórmula $\Box A \rightarrow A$ serà certa en tots els mons. No obstant això, el contrari no sempre es compleix, ja que podem construir models no reflexius on aquesta fórmula siga certa. Per garantir que $\Box A \rightarrow A$ implica reflexivitat, cal eliminar la funció de valoració V i considerar només els *marcs* (estructures (W, R) sense assignació de valors). Així, una fórmula és vàlida en un *marc* si ho és en tots els models basats en ell, establint una correspondència entre fórmules i classes de *marcs*. En aquest capítol estudiarem la relació entre les propietats de la relació d'accessibilitat i la validesa de certes fórmules en lògica modal.

4.1 Relacions d'accessibilitat

Moltes fórmules modals són característiques de propietats senzilles de la relació d'accessibilitat. Això vol dir que qualsevol model que complisca una propietat determinada farà vertadera una fórmula concreta i totes les seues instàncies per substitució. A continuació, presentarem cinc exemples de tipus de relacions d'accessibilitat i les fórmules que garanteixen la seua veritat.

Proposició 4.1.1. *Suposem que $M = (W, R, V)$ és un model, on R és una relació serial, és a dir, per a tot món $u \in W$, existeix almenys un món $v \in W$ tal que $(u, v) \in R$. Aleshores $M \models \Box p \rightarrow \Diamond p$.*

Demostració. Siga $M = (W, R, V)$ un model amb R una relació serial, i considerem un món $w \in W$. Hem de vore

$$M, w \models \Box p \rightarrow \Diamond p,$$

és a dir, es té

$$M, w \not\models \Box p \text{ o } M, w \models \Diamond p.$$

Suposem que $M, w \Vdash \Box p$, volem vore que $M, w \Vdash \Diamond p$. Com R és serial, per a cada món w existeix almenys un món v tal que $(w, v) \in R$.

Ara, com estem suposant $M, w \Vdash \Box p$, per a tot món $w' \in W$ amb $(w, w') \in R$, es té $M, w' \Vdash p$. Per tant, necessàriament tenim que existeix un món w' , amb $(w, w') \in R$ tal que $M, w' \Vdash p$, és a dir, $M, w \Vdash \Diamond p$. Aleshores, $M \Vdash \Box p \rightarrow \Diamond p$, com volíem. $\square$

Proposició 4.1.2. *Suposem que $M = (W, R, V)$ és un model, on R és una relació reflexiva, és a dir, per a tot $w \in W$ es té $(w, w) \in R$. Aleshores $M \Vdash \Box p \rightarrow p$.*

Demostració. Siga $M = (W, R, V)$ un model amb R una relació reflexiva, i considerem un món $w \in W$. Hem de vore que

$$M, w \Vdash \Box p \rightarrow p,$$

és a dir,

$$M, w \not\Vdash \Box p \text{ o } M, w \Vdash p.$$

Per a fer-ho, suposem que $M, w \Vdash \Box p$ i anem a demostrar que $M, w \Vdash p$. Com estem suposant $M, w \Vdash \Box p$, aleshores per a tot $w' \in W$ complint $(w, w') \in R$, es té $M, w' \Vdash p$. Però com R és reflexiva sabem que $(w, w) \in R$, per tant, $M, w \Vdash p$, com volíem. $\square$

Proposició 4.1.3. *Suposem que $M = (W, R, V)$ és un model, on R és una relació simètrica, és a dir, per a tot $u \in W$ i per a tot $v \in W$, si es té $(u, v) \in R$, aleshores $(v, u) \in R$. Aleshores, $M \Vdash p \rightarrow \Box \Diamond p$.*

Demostració. Siga $M = (W, R, V)$ un model amb R una relació simètrica, i considerem un món $w \in W$. Hem de vore

$$M, w \Vdash p \rightarrow \Box \Diamond p.$$

És a dir,

$$M, w \not\Vdash p \text{ o } M, w \Vdash \Box \Diamond p.$$

Per a fer-ho, suposem que $M, w \Vdash p$ i demostrem que $M, w \Vdash \Box \Diamond p$. És a dir, volem vore que per a tot $w' \in W$ tal que $(w, w') \in R$, es compleix $M, w' \Vdash \Diamond p$. Açò és, existeix $w'' \in W$ amb $(w', w'') \in R$ tal que $M, w'' \Vdash p$.

Ara bé, com R és simètrica, sabem que si $(w, w') \in R$, aleshores $(w', w) \in R$. Per tant, com teníem $(w, w') \in R$, també es té $(w', w) \in R$.

Per últim, com estàvem suposant $M, w \Vdash p$, agafant $w'' = w$ ja tenim el que volíem, que $M, w \Vdash \Box \Diamond p$. $\square$

Proposició 4.1.4. *Suposem que $M = (W, R, V)$ és un model, on R és una relació transitiva, és a dir, per a tot $u, v, w \in W$, si $(u, v) \in R$ i $(v, w) \in R$, aleshores $(u, w) \in R$. Aleshores, $M \Vdash \Box p \rightarrow \Box \Box p$.*

Demostració. Siga $M = (W, R, V)$ un model amb R una relació transitiva, i considerem un món $w \in W$. Hem de vore que

$$M, w \not\models \Box p \text{ o } M, w \models \Box \Box p.$$

Suposem que $M, w \models \Box p$, volem vore que $M, w \models \Box \Box p$. Com estem suposant $M, w \models \Box p$, per a tot $w' \in W$ amb $(w, w') \in R$, es té $M, w' \models p$.

Siga ara altre món $w'' \in W$, que compleix $(w', w'') \in R$. Com R és transitiva, sabem que si es compleix $(w, w') \in R$ i $(w', w'') \in R$, aleshores també $(w, w'') \in R$. Per tant, com havíem vist que $M, w' \models p$, per a tot $w' \in W$ amb $(w, w') \in R$, aleshores es té $M, w'' \models p$, en tindre $(w, w'') \in R$.

Per tant, es té que $M, w \models \Box \Box p$, com volíem vore. $\square$

Proposició 4.1.5. *Suposem que $M = (W, R, V)$ és un model, on R és una relació euclidiana, és a dir, per a tot $u, v, w \in W$ amb $(u, v) \in R$ i $(u, w) \in R$, es compleix $(v, w) \in R$. Aleshores, $M \models \Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$.*

Demostració. Siga $M = (W, R, V)$ un model amb R una relació euclidiana, i considerem un món $w \in W$. Hem de vore que

$$M, w \not\models \Diamond p \text{ o } M, w \models \Box \Diamond p.$$

Suposem que $M, w \models \Diamond p$, volem vore que $M, w \models \Box \Diamond p$. Com $M, w \models \Diamond p$, existeix $w' \in W$ amb $(w, w') \in R$ tal que $M, w' \models p$.

Ara, el que volem vore és que per a tot $u \in W$ amb $(w, u) \in R$, es compleix $M, u \models \Diamond p$. És a dir, existeix $v \in W$ amb $(u, v) \in R$ tal que $M, v \models p$.

Per últim, com R és euclidiana, i tenim que $(w, u) \in R$ i $(w, w') \in R$, aleshores es té que $(u, w') \in R$. Per tant, com teníem que $M, w' \models p$, agafant $v = w'$, ja tenim assegurat que existeix $v \in W$ amb $(u, v) \in R$ satisfent $M, v \models p$, com volíem. $\square$

En resum, agrupem aquests últims teoremes, junt al nom que rep cada correspondència, en la Taula 4.1.

Si R és una relació ... ,	aleshores ... és vertadera en M .
serial	$\Box p \rightarrow \Diamond p$ (D)
reflexiva	$\Box p \rightarrow p$ (T)
simètrica	$p \rightarrow \Box \Diamond p$ (B)
transitiva	$\Box p \rightarrow \Box \Box p$ (4)
euclidiana	$\Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$ (5)

Taula 4.1: Exemples de relacions amb la seua fórmula vertadera corresponent.

Nota 4.1.1. Cal remarcar que les implicacions de dreta a esquerra d'aquests teoremes no es tenen, és a dir, no és cert que si un model verifica un esquema, aleshores la relació d'accessibilitat d'aquest model té la propietat corresponent.

Per exemple, busquem un contraexemple per a T i per a la relació reflexiva. Considerem el model $M = (W, R, V)$, on $W = \{w\}$, $R = \emptyset$ i $V(p) = \{w\}$. Aleshores, com $M, w \Vdash p$, es té que $M, w \Vdash \Box p \rightarrow p$ però R no és reflexiva.

No obstant això, ací només hi ha una instància de T que falla en M , però altres instàncies són certes. Cal notar que és més difícil donar exemples on totes les instàncies de substitució de T siguin certes en M , però M no siga reflexiu. Tot i això, la pròxima proposició mostra que també existeixen models d'aquest tipus.

Proposició 4.1.6. *Siga $M = (W, R, V)$ un model tal que $W = \{u, v\}$, on els mons u i v estan relacionats per R , és a dir, tenim $(u, v) \in R$ i $(v, u) \in R$. Suposem que per a tot p , $u \in V(p)$ si, i només si, $v \in V(p)$. Aleshores:*

1. *Per a tota fórmula A , es compleix $M, u \Vdash A$ si, i només si, $M, v \Vdash A$.*
2. *Tota instància de T és certa en M .*

Nota 4.1.2. Com M no és reflexiu (de fet, és irreflexiu, és a dir, cap element està relacionat en si mateix), l'altra implicació dels teoremes de la Taula 4.1 falla en el cas de T . Es poden donar arguments similars per a alguns dels esquemes mencionats en els teoremes de la Taula 4.2.

A continuació presentem diferents propietats que pot complir una relació d'accessibilitat, junt amb les fórmules modals que són vàlides en tots els models construïts sobre relacions amb aquestes propietats.

Proposició 4.1.7. *Siga el model $M = (W, R, V)$, on R és una relació parcialment funcional, és a dir, per a tot món $u, v, w \in W$ tal que $(u, v) \in R$ i $(u, w) \in R$, es té que $v = w$. Aleshores, $M \Vdash \Diamond p \rightarrow \Box p$.*

Demostració. Siga $M = (W, R, V)$ un model on R és una relació parcialment funcional. Volem demostrar que

$$M \Vdash \Diamond p \rightarrow \Box p$$

Siga $u \in W$ un món. Suposem que $M, u \Vdash \Diamond p$. Això significa que existeix un món v amb $(u, v) \in R$ tal que $M, v \Vdash p$. Volem demostrar que $M, u \Vdash \Box p$, és a dir, que per a tot món w tal que $(u, w) \in R$, es compleix $M, w \Vdash p$.

Com que R és parcialment funcional, si existeix un altre món w tal que $(u, w) \in R$, aleshores es té $w = v$. Per tant, l'únic món accessible des d' u és v , i com que ja sabem que $M, v \Vdash p$, es compleix també que $M, w \Vdash p$ per a qualsevol w amb $(u, w) \in R$. Per tant, $M, u \Vdash \Box p$, com volíem. $\square$

Proposició 4.1.8. *Siga el model $M = (W, R, V)$, on R és una relació funcional, és a dir, per a tot món $u \in W$, existeix un món $v \in W$ tal que per a tot $w \in W$, es té $(u, w) \in R$ si, i només si, $v = w$. Aleshores, $M \Vdash \Diamond p \leftrightarrow \Box p$.*

Demostració. Siga $M = (W, R, V)$ un model, on R és una relació funcional. Volem demostrar que

$$M \Vdash \Diamond p \leftrightarrow \Box p.$$

Siga $u \in W$ un món. Suposem primer que

$$M, u \Vdash \Diamond p.$$

Això significa que existeix un món $v \in W$ amb $(u, v) \in R$ tal que $M, v \Vdash p$. Raonem igual que abans. Com que R és funcional, aquest món v és l'únic món accessible des d' u , és a dir, per a qualsevol altre món w , si $(u, w) \in R$ aleshores $w = v$. Per tant, com que $M, v \Vdash p$, també es compleix $M, w \Vdash p$ per a tot món w tal que $(u, w) \in R$, i així obtenim que $M, u \Vdash \Box p$. Açò demostra que $M \Vdash \Diamond p \rightarrow \Box p$.

Per a l'altra implicació, suposem que

$$M, u \Vdash \Box p.$$

Això significa que per a tot món w amb $(u, w) \in R$, es compleix $M, w \Vdash p$. Com que R és funcional, només hi ha un únic món v tal que $(u, v) \in R$. Aleshores, pel fet que $M, u \Vdash \Box p$, es té que $M, v \Vdash p$, i com que aquest és un món (l'únic) accessible des d' u , també es compleix $M, u \Vdash \Diamond p$. Així obtenim que $M \Vdash \Box p \rightarrow \Diamond p$.

Per tant, es té que $M \Vdash \Diamond p \leftrightarrow \Box p$, com volíem vore. $\square$

Proposició 4.1.9. *Siga el model $M = (W, R, V)$, on R és una relació feblement densa, és a dir, per a tot món $u, v \in W$ tal que $(u, v) \in R$, existeix un $w \in W$ tal que $(u, w) \in R$ i $(w, v) \in R$. Aleshores $M \Vdash \Box \Box p \rightarrow \Box p$.*

Demostració. Siga un model $M = (W, R, V)$, on R és una relació feblement densa. Volem demostrar que

$$M \Vdash \Box \Box p \rightarrow \Box p.$$

Siga u un món tal que $M, u \Vdash \Box \Box p$. Com R és una relació feblement densa, es té que per a tot món $u, v \in W$ tal que $(u, v) \in R$, existeix un món $w \in W$ tal que $(u, w) \in R$ i $(w, v) \in R$.

Com u compleix $M, u \Vdash \Box \Box p$, tenim que $M, w \Vdash \Box p$, ja que $(u, w) \in R$ i per tant $M, v \Vdash p$, ja que $(w, v) \in R$.

Així, hem vist que per a tot v amb $(u, v) \in R$, es té $M, v \Vdash p$, és a dir, $M, u \Vdash \Box p$, i per tant

$$M, u \Vdash \Box \Box p \rightarrow \Box p.$$

Per tant, es té que $M \Vdash \Box \Box p \rightarrow \Box p$. $\square$

Proposició 4.1.10. *Siga el model $M = (W, R, V)$, on R és una relació feblement connectada, és a dir, per a tot món $u, v, w \in W$ tal que $(w, u) \in R$ i $(w, v) \in R$, aleshores es té $(u, v) \in R$ o $u = v$ o $(v, u) \in R$. Aleshores $M \models \Box((p \wedge \Box p) \rightarrow q) \vee \Box((q \wedge \Box q) \rightarrow p)$.*

Demostració. Siga un model $M = (W, R, V)$, on R és una relació feblement connectada. Volem demostrar que

$$M \models \Box((p \wedge \Box p) \rightarrow q) \vee \Box((q \wedge \Box q) \rightarrow p).$$

Suposem per reducció a l'absurd que aquesta fórmula no és vàlida. Això significa que existeix un model M i un món $w \in W$ tal que

$$M, w \not\models \Box((p \wedge \Box p) \rightarrow q) \vee \Box((q \wedge \Box q) \rightarrow p).$$

Açò implica que

$$M, w \not\models \Box((p \wedge \Box p) \rightarrow q) \quad \text{i} \quad M, w \not\models \Box((q \wedge \Box q) \rightarrow p).$$

És a dir, existeixen mons $u, v \in W$ tals que $(w, u) \in R$, $(w, v) \in R$ i

$$M, u \not\models (p \wedge \Box p) \rightarrow q, \quad M, v \not\models (q \wedge \Box q) \rightarrow p.$$

Açò significa que

$$M, u \models p \wedge \Box p \quad \text{i} \quad M, u \not\models q,$$

$$M, v \models q \wedge \Box q \quad \text{i} \quad M, v \not\models p.$$

Ara, com tenim $M, u \models \Box p$, en conseqüència, per a tot u' amb $(u, u') \in R$, es té $M, u' \models p$. De manera anàloga, $M, v \models \Box q$ implica que per tot v' amb $(v, v') \in R$, es té $M, v' \models q$.

Per altra banda, com la relació R és feblement connectada, tenim que $(u, v) \in R$, o bé $u = v$, o bé $(v, u) \in R$. Notem a continuació que en cada cas arribem a una contradicció.

1. Si $(u, v) \in R$, aleshores, com que $M, u \models \Box p$, s'obté $M, v \models p$. Però estàvem suposant que $M, v \not\models p$, per tant tenim una contradicció.
2. Si $u = v$, aleshores tenim $M, v \models p$ i $M, u \models q$. Açò contradiu que $M, u \not\models q$ i $M, v \not\models p$.
3. Si $(v, u) \in R$, aleshores, com que $M, v \models \Box q$, s'obté $M, u \models q$. Però estàvem suposat que $M, u \not\models q$, per tant és una contradicció.

Com en qualsevol cas arribem a una contradicció, podem afirmar que la fórmula és vàlida. $\square$

Proposició 4.1.11. *Siga el model $M = (W, R, V)$, on R és una relació feblement dirigida, és a dir, per a tot món $u, v, w \in W$ tal que $(w, u) \in R$ i $(w, v) \in R$, existeix $t \in W$ tal que $(u, t) \in R$ i $(v, t) \in R$. Aleshores $M \models \Diamond \Box p \rightarrow \Box \Diamond p$.*

Demostració. Siga un model $M = (W, R, V)$, on R és una relació feblement dirigida. Volem demostrar que

$$M \models \Diamond \Box p \rightarrow \Box \Diamond p.$$

És a dir, hem de provar que per a qualsevol model M i per a qualsevol món $w \in W$,

$$M, w \not\models \Diamond \Box p \text{ o } M, w \models \Box \Diamond p.$$

Suposem que $M, w \models \Diamond \Box p$, és a dir, existeix un món $u \in W$ amb $(w, u) \in R$ tal que $M, u \models \Box p$. Açò vol dir que per a tot món $u' \in W$ amb $(u, u') \in R$, es compleix $M, u' \models p$.

Volem demostrar que $M, w \models \Box \Diamond p$, és a dir, que per a tot món $v \in W$ tal que $(w, v) \in R$, existeix un món $t \in W$ tal que $(v, t) \in R$ i $M, t \models p$.

Considerem un món $v \in W$ tal que $(w, v) \in R$. Com R és feblement dirigida, i com tenim $(w, u) \in R$ i $(w, v) \in R$, sabem que existeix un món $t \in W$ tal que

$$(u, t) \in R \text{ i } (v, t) \in R.$$

Haviem vist que $M, u \models \Box p$ implica que per a tot món u' tal que $(u, u') \in R$, es compleix $M, u' \models p$. Aplicant-ho a t , ja que $(u, t) \in R$, obtenim $M, t \models p$.

Així, hem trobat un món t tal que $(v, t) \in R$ i $M, t \models p$, la qual cosa demostra que $M, v \models \Diamond p$.

Com v era arbitrari, ja tenim provat que $M, w \models \Box \Diamond p$, i per tant tenim que

$$M \models \Diamond \Box p \rightarrow \Box \Diamond p.$$

□

En resum, agrupem aquests últims teoremes en la Taula 4.2.

Si R és una relació ... ,	aleshores ... és vertadera en M .
parcialment funcional	$\Diamond p \rightarrow \Box p$
funcional	$\Diamond p \leftrightarrow \Box p$
feblement densa	$\Box \Box p \rightarrow \Box p$
feblement connectada	$\Box((p \wedge \Box p) \rightarrow q) \vee \Box((q \wedge \Box q) \rightarrow p)$ (L)
feblement dirigida	$\Diamond \Box p \rightarrow \Box \Diamond p$ (G)

Taula 4.2: Més exemples de relacions amb la seua fórmula vertadera corresponent.

4.2 Marcs

En aquesta secció introduïm el concepte fonamental de marc en la semàntica de la lògica modal. Els marcs proporcionen l'estructura subjacent sobre la qual es defineixen els models, i ens permeten caracteritzar la validesa de les fórmules modals segons les propietats de la relació d'accessibilitat.

Definició 4.2.1. (Marc). Un marc és un parell $F = (W, R)$, on $W \neq \emptyset$ és un conjunt no buit de mons, i $R \subseteq W \times W$ una relació en W .

Un model M està basat en un marc $F = (W, R)$ si $M = (W, R, V)$ per a alguna valoració V .

Definició 4.2.2. (Fórmula vàlida en un marc). Siga $F = (W, R)$ un marc. Direm que una fórmula modal A és vàlida en F , denotat $F \models A$, si es té $M \Vdash A$ per a tot model M basat en F .

Si $\mathcal{F}$ és una classe de marcs, direm que A és vàlida en $\mathcal{F}$, denotat $\mathcal{F} \models A$, si es té $F \models A$ per a tot marc F en $\mathcal{F}$.

Els marcs són interessants perquè la relació entre esquemes i propietats de la relació d'accessibilitat R es troba a nivell de marcs, no de models. Per exemple, encara que T siga vertadera en tots els models reflexius, no tots els models en què T és vertadera són reflexius. No obstant això, és cert que no només T és vàlida en tots els marcs reflexius, sinó que també cada marc en què T és vàlida, és reflexiu.

En altres paraules, encara que les implicacions contràries de la Taula 4.1 fallen, es mantenen si substituïm “model” per “marc”. És a dir, per a les propietats considerades en la columna esquerra de la Taula 4.1, és cert que si una fórmula és vàlida en un marc, aleshores la relació d'accessibilitat R d'eixe marc té la propietat corresponent. Definim aquest concepte.

Definició 4.2.3. Siga $\mathcal{F}$ una classe de marcs i A una fórmula modal. Direm que A defineix $\mathcal{F}$ si, i només si, $F \models A$ per a tots i únicament per a tots els marcs F de $\mathcal{F}$.

A continuació, establim els resultats de definibilitat completa per a marcs.

Proposició 4.2.1. Si la fórmula (D) $\Box p \rightarrow \Diamond p$ és vàlida en un marc F , aleshores F és serial.

Demostració. Suposem que un marc $F = (W, R)$ satisfà (D) , és a dir,

$$F \models \Box p \rightarrow \Diamond p.$$

Així, per a tota valoració V , si considerem $M = (W, R, V)$, tindrem que $M \Vdash \Box p \rightarrow \Diamond p$. Volem vore que R és serial, és a dir, siga $w \in W$, existeix $v \in W$ tal que $(w, v) \in R$.

Per reducció a l'absurd, suposem que no existeix $v \in W$ tal que $(w, v) \in R$. Siga A un fórmula qualsevol. Per una part tenim que

$$M, w \Vdash \Box A,$$

perquè es compleix que per a tot $w' \in W$ amb $(w, w') \in R$, $M, w' \Vdash A$ (ja que, com estem suposant, no existeix $w' \in W$ tal que $(w, w') \in R$). I per altra part, tenim que

$$M, w \nVdash \Diamond A,$$

perquè no existeix $w' \in W$ amb $(w, w') \in R$.

Com açò ho tenim per a tota fórmula A , en particular es té per a $A \equiv p$. És a dir, tenim $M, w \Vdash \Box p$ però $M, w \nVdash \Diamond p$, que és una contradicció ja que estem suposant $F \models \Box p \rightarrow \Diamond p$. Per tant, per a tot $w \in W$ existeix $v \in W$ amb $(w, v) \in R$, és a dir, R és serial. $\square$

Proposició 4.2.2. *Si la fórmula (T) $\Box p \rightarrow p$ és vàlida en un marc F , aleshores F és reflexiu.*

Demostració. Suposem que un marc $F = (W, R)$ satisfà (T), és a dir,

$$F \models \Box p \rightarrow p.$$

Així, per a tota valoració V , si considerem el model $M = (W, R, V)$, s'ha de tindre que $M \Vdash \Box p \rightarrow p$. Volem vore que R és reflexiva.

Considerem un món $w \in W$, volem vore que $(w, w) \in R$. Per reducció a l'absurd, suposem que $(w, w) \notin R$. Considerem la valoració V tal que

$$V(p) = \{w' \in W : (w, w') \in R\}.$$

Considerem el model $M = (W, R, V)$. Així, $M \Vdash \Box p \rightarrow p$, en particular, en el món $w \in W$, es té $M, w \Vdash \Box p \rightarrow p$. Notem que $M, w \Vdash \Box p$, ja que $V(p) = \{w' \in W : (w, w') \in R\}$ però $M, w \nVdash p$. Açò contradiu que $M, w \Vdash \Box p \rightarrow p$. Aquesta contradicció ve de suposar que $(w, w) \notin R$. Per tant, concloem que $(w, w) \in R$. $\square$

Proposició 4.2.3. *Si la fórmula (B) $p \rightarrow \Box \Diamond p$ és vàlida en un marc F , aleshores F és simètric.*

Demostració. Ho demostrem per contrarrecíproc. Suposem que un marc $F = (W, R)$ no és simètric, volem vore que $p \rightarrow \Box \Diamond p$ no és vàlida en F . Com F no és simètric, existeixen $u, v \in W$ tal que $(u, v) \in R$ però $(v, u) \notin R$. Considerem la valoració V tal que

$$V(p) = \{w \in W \text{ tal que } (v, w) \notin R\}.$$

Considerem el model $M = (W, R, V)$. Així, $M, u \Vdash p$ per a tot u tal que $(v, u) \notin R$, en particular,

$$M, u \Vdash p,$$

ja que $(v, u) \notin R$. A més, com $(v, w) \in R$ si, i només si, $w \notin V(p)$, no existeix w amb $(v, w) \in R$ tal que $M, w \Vdash p$. Per tant, $M, v \nVdash \Diamond p$. Ara, com $(u, v) \in R$, tenim

$$M, u \nVdash \Box \Diamond p.$$

Per tant, $M, u \nVdash p \rightarrow \Box \Diamond p$, i així, $p \rightarrow \Box \Diamond p$ no és vàlida en F . $\square$

Proposició 4.2.4. *Si la fórmula (4) $\Box p \rightarrow \Box \Box p$ és vàlida en un marc F , aleshores F és transitiu.*

Demostració. Suposem que (4) és vàlid en el marc $F = (W, R)$, és a dir, que

$$F \models \Box p \rightarrow \Box \Box p,$$

i considerem mons arbitraris $u, v, w \in W$ tals que $(u, v) \in R$ i $(v, w) \in R$. Volem demostrar que $(u, w) \in R$.

Definim la valoració V com segueix.

$$V(p) = \{z \in W \text{ tal que } (u, z) \in R\}.$$

Siga el model $M = (W, R, V)$. Per definició de V , es té que $M, z \Vdash p$ per a tot z tal que $(u, z) \in R$, i per tant, $M, u \Vdash \Box p$. Per altra part, com estem suposant $F \models \Box p \rightarrow \Box \Box p$, la fórmula $\Box p \rightarrow \Box \Box p$ és certa en u , la qual cosa implica que $M, u \Vdash \Box \Box p$.

Per últim, com tenim $(u, v) \in R$, es compleix $M, v \Vdash \Box p$ i com tenim $(v, w) \in R$, aleshores $M, w \Vdash p$. Però per definició de V , açò només és possible si $(u, w) \in R$, com volíem demostrar. Per tant, R és transitiva. $\square$

Proposició 4.2.5. *Si la fórmula (5) $\Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$ és vàlida en un marc F , aleshores F és euclidià.*

Demostració. Fem la demostració per contrarrecíproc.

Suposem que el marc $F = (W, R)$ no és euclidià, és a dir, que hi ha mons $u, v, w \in W$ tals que $(w, u) \in R$ i $(w, v) \in R$, però no es compleix $(u, v) \in R$. Volem provar que F no satisfà (5), és a dir, que

$$F \not\models \Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p.$$

Definim la valoració V de la següent manera

$$V(p) = \{z \in W \text{ tal que } (u, z) \notin R\}$$

Siga el model $M = (W, R, V)$. Com estem suposant que $(u, v) \notin R$, tenim que $M, v \Vdash p$, i com que $(w, v) \in R$, també es compleix $M, w \Vdash \Diamond p$.

Per altra banda, no existeix cap món $u' \in W$ tal que $(u, u') \in R$ i $M, u' \Vdash p$, per la qual cosa $M, u \nVdash \Box \Diamond p$.

Finalment, com tenim que $(w, u) \in R$, es dedueix que $M, w \nVdash \Box \Diamond p$, i per tant, la fórmula (5), $\Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$, no és certa en w , com volíem demostrar. Així, R ha de ser euclidiana. $\square$

Aquests últims teoremes es poden resumir com segueix.

Proposició 4.2.6. *Si la fórmula de la segona columna de la Taula 4.1 és vàlida en un marc F , aleshores F té la propietat de la primera columna de la taula.*

Cal destacar la diferència entre la demostració per a (D) i la dels altres casos, ja que en (D) no s'ha mencionat la valoració V . En la Proposició 4.2.1 hem demostrat que si $M \models (D)$, aleshores M és serial. Així, podem concloure que (D) defineix la classe dels models serials, no només dels marcs.

Corol·lari 4.2.1. *Tot model on (D) siga vertader és serial.*

Corol·lari 4.2.2. *Cada fórmula de la segona columna de la Taula 4.1 defineix la classe de marcs que tenen la propietat de la primera columna.*

A continuació, vorem diverses equivalències i implicacions entre propietats de relacions binàries sobre un conjunt. Aquestes connexions són especialment rellevants en la lògica modal, ja que ajuden a comprendre millor com es comporten les relacions d'accessibilitat en diferents marcs semàntics.

Proposició 4.2.7. *Siga R una relació binària en un conjunt W . Aleshores,*

1. *Si R és reflexiva, aleshores R és serial.*
2. *Si R és simètrica, aleshores R és transitiva si, i només si, R és euclidiana.*
3. *Si R és simètrica o R és euclidiana i antisimètrica, aleshores R és feblement dirigida.*
4. *Si R és euclidiana, aleshores R és feblement connectada.*
5. *Si R és funcional, aleshores R és serial.*

Demostració. 1. Com R és reflexiva, per a tot $w \in W$ es té $(w, w) \in R$. Volem vore que per a tot món $u \in W$, existeix un $v \in W$ tal que $(u, v) \in R$. Però com R és reflexiva, sempre tindrem $(u, u) \in R$. Per tant, ja ho tenim.

2. Suposem que R és simètrica, és a dir, per a cada $u, v \in W$ tal que $(u, v) \in R$, es té $(v, u) \in R$.

Suposem primer que R és transitiva, és a dir, per a cada $u, v, w \in W$, si $(u, v) \in R$ i $(v, w) \in R$, tenim que $(u, w) \in R$. Volem vore que si $(u, v) \in R$ i $(u, w) \in R$, aleshores $(v, w) \in R$. Suposem que $(u, v) \in R$ i $(u, w) \in R$. Com R és simètrica, $(v, u) \in R$. Per tant, en ser R transitiva tenim que $(v, w) \in R$, com volíem.

Suposem ara que R és euclidiana. Suposem $(u, v) \in R$ i $(v, w) \in R$. Volem vore que R és transitiva, és a dir, $(u, w) \in R$. Com R és simètrica, es té $(v, u) \in R$. I com R és euclidiana, $(u, w) \in R$, com volíem.

3. Supposem primer que R és simètrica, és a dir, per a cada $u, v \in W$, si $(u, v) \in R$, aleshores $(v, u) \in R$. Volem vore que R és feblement dirigida, és a dir, per a cada $u, v, w \in W$ amb $(u, v) \in R$ i $(u, w) \in R$, existeix un $t \in W$ tal que $(v, t) \in R$ i $(w, t) \in R$. Però notem que en ser R simètrica, tenim que $(v, u) \in R$ i $(w, u) \in R$. Fent $t = u$, ja ho tenim.

Suposem ara que R és euclidiana, és a dir, si $(u, v) \in R$ i $(u, w) \in R$, aleshores $(v, w) \in R$. A més, suposem que R és antisimètrica, és a dir, per a tot $v, w \in W$ tal que $(v, w) \in R$ i $(w, v) \in R$, aleshores $v = w$. Siguen $u, v, w \in W$ tal que $(u, v) \in R$ i $(u, w) \in R$. En ser R euclidiana tenim $(v, w) \in R$ i $(w, v) \in R$, i per la antisimetria tenim $v = w$. Per tant, amb tot açò concloem que el $t \in W$ que estem buscant és precisament aquest món $v = w$. És a dir, es compleix que $(v, v) \in R$ i $(w, v) \in R$. Per tant, R és feblement dirigida, com volíem vore.

4. Immediata. Volem vore que per a cada $u, v, w \in W$ amb $(u, v) \in R$ i $(u, w) \in R$, es té $(v, w) \in R$ o $v = w$ o $(w, v) \in R$. Però en ser R euclidiana, sabem que si $(u, v) \in R$ i $(u, w) \in R$, es té $(v, w) \in R$, i ja està demostrat.
5. Supposem que R és funcional, és a dir, per a cada $u \in W$ existeix un $v \in W$ tal que per a tot $w \in W$ es té $(u, w) \in R$ si, i només si, $w = v$. Volem vore que R és serial, és a dir, per a tot $u \in W$, existeix un $v \in W$ tal que $(u, v) \in R$.

Aquesta demostració també és immediata. Com tenim $(u, w) \in R$ si, i només si, $w = v$, ja podem afirmar que existeix un $v \in W$ tal que $(u, v) \in R$, per a cada $u \in W$. Per tant, tenim que R és serial.

□

4.3 Relacions d'equivalència i ($S5$)

En aquesta secció analitzarem la lògica modal ($S5$) a partir de les seues caracteritzacions semàntiques. Concretament, veurem com es pot definir mitjançant la validesa de les seues fórmules en marcs universals, on tots els mons són accessibles entre si. A més, mostrarem que ($S5$) també pot ser caracteritzada mitjançant marcs en què la relació d'accessibilitat és una relació d'equivalència, és a dir, reflexiva, simètrica i transitiva.

Definició 4.3.1. (Sistema ($S5$)). ($S5$) és el conjunt de totes les fórmules vàlides en tots els marcs reflexius, simètrics i euclidians, és a dir, aquells on (T), (B) i (5) són vàlids.

Nota 4.3.1. Cal remarcar que aquesta definició és equivalent a dir que els marcs són reflexius, simètrics i transitius, és a dir, tenen una relació d'equivalència. Aquest resultat el vorem posteriorment.

Definició 4.3.2. (Relació total). Una relació R sobre un conjunt W es diu que és total si per a cada parell d'elements $u, v \in W$, es compleix que o bé $(u, v) \in R$, o bé $(v, u) \in R$. És a dir, qualsevol parella de mons està relacionada en almenys una direcció.

Considerem els marcs universals $F = (W, \nabla_W)$, on W és un conjunt i $\nabla_W = W \times W$ la relació total. La relació ∇_W és reflexiva, simètrica i euclidiana. Per tant, totes les fórmules de (S5) són vàlides en els marcs universals.

Definició 4.3.3. (Relació d'equivalència i relació universal). Direm que $R \subseteq W \times W$ és d'equivalència si R és reflexiva, simètrica i transitiva. I R és universal si $R = \nabla_W$.

Les fórmules (T), (B) i (4) caracteritzen els marcs reflexius, simètrics i transitius, respectivament. Per tant, els marcs on la relació d'accessibilitat és una relació d'equivalència són exactament aquells on estes tres fórmules són vàlides. Les relacions d'equivalència es poden caracteritzar d'altres formes.

El nostre objectiu a continuació es vore que són equivalents les següents afirmacions:

1. (S5) són les fórmules vàlides en marcs reflexius, simètrics i euclidians.
2. (S5) són les fórmules vàlides en marcs amb relacions d'equivalència.
3. (S5) són les fórmules vàlides en marcs universals.

Proposició 4.3.1. *Són equivalents:*

1. R és una relació d'equivalència.
2. R és reflexiva i euclidiana.
3. R és serial, simètrica i euclidiana.
4. R és serial, simètrica i transitiva.

Demostració. Demostrem primer $1 \Rightarrow 2$. Suposem que R és relació d'equivalència. És a dir, R és reflexiva, simètrica i transitiva. Per tant, R reflexiva ja ho tenim. Falta vore que R és euclidiana, és a dir, per a tot $u, v, w \in W$,

$$\text{si } (u, v) \in R \text{ i } (u, w) \in R, \text{ aleshores } (v, w) \in R.$$

Suposem que $(u, v) \in R$ i $(u, w) \in R$. Com R és simètrica, $(v, u) \in R$. I com R és transitiva, $(v, w) \in R$. Per tant, R és euclidiana.

Demostrem ara $2 \Rightarrow 3$. Suposem que R és reflexiva i euclidiana. Volem vore que R és serial, simètrica i euclidiana. Aquesta última la tenim per hipòtesi. Anem a vore primer que R és serial, és a dir,

$$\text{per a tot } u \in W, \text{ existeix un } v \in W \text{ tal que } (u, v) \in R.$$

Com R és reflexiva es té que $(u, u) \in R$, per a tot $u \in W$. Per tant, ja tenim que R és serial. Ara vorem que és simètrica. Suposem que $(u, v) \in R$, volem vore que

$$(v, u) \in R \text{ per a tot } u, v \in W.$$

Com R és reflexiva, es té $(u, u) \in R$ per a tot $u \in W$. Com R és euclidiana, si $(u, v) \in R$ i $(u, u) \in R$, aleshores $(v, u) \in R$, com volíem.

Ara provem que $3 \Rightarrow 4$. Suposem que R és serial, simètrica i euclidiana. Hem de vore que R és transitiva, és a dir,

$$\text{si } (u, v) \in R \text{ i } (v, w) \in R, \text{ aleshores } (u, w) \in R.$$

Suposem que $(u, v) \in R$ i $(v, w) \in R$. Per una part, com R és simètrica, tenim que $(v, u) \in R$. I per altra part, com tenim $(v, u) \in R$ i $(v, w) \in R$, i R és euclidiana, tindrem que $(u, w) \in R$, com volíem vore.

Per últim, demostrem $4 \Rightarrow 1$. Suposem que R és serial, simètrica i transitiva. Volem vore que R és d'equivalència, per a això, simplement ens falta demostrar que és reflexiva. Però com R és simètrica, tenim que per a tot $u, v \in W$ amb $(u, v) \in R$, es té $(v, u) \in R$. I com R és transitiva, es té $(u, u) \in R$ per a tot $u \in W$. Així, R és reflexiva, i per tant és una relació d'equivalència. $\square$

Amb aquesta proposició queda provat que 1 és equivalent a 2. Ara vorem l'equivalència entre 2 i 3. Per a fer-ho, necessitem una proposició prèvia.

Proposició 4.3.2. *Siga R una relació d'equivalència, i per a cada $w \in W$ definim la classe d'equivalència de w com el conjunt*

$$[w] = \{w' \in W : (w, w') \in R\}.$$

Aleshores:

1. $w \in [w]$
2. R és universal en cada classe d'equivalència $[w]$.
3. *El conjunt de classes d'equivalència és una partició de W en subconjunts mútuament excloents i conjuntament exhaustius. És a dir, $\bigcup_{w \in W} [w] = W$ i si $[w] \neq [w']$, aleshores $[w] \cap [w'] = \emptyset$.*

Demostració. Siga R una relació d'equivalència sobre W . Per a cada $w \in W$, definim $[w] = \{w' \in W : (w, w') \in R\}$. Demostrem-ho per punts.

1. Notem que, com R és reflexiva, $(w, w) \in R$. Per tant, $w \in [w]$.
2. Volem vore que R és universal en cada classe d'equivalència $[w]$. És a dir,

$$R \cap ([w] \times [w]) = \nabla_{[w]}.$$

Vejam la inclusió d'esquerra a dreta. Siga $(x, y) \in R \cap ([w] \times [w])$, aleshores $(x, y) \in [w] \times [w] = \nabla_{[w]}$.

Per a l'altra inclusió, siga $(x, y) \in \nabla_{[w]} = [w] \times [w]$. Aleshores, $(w, x) \in R$ i $(w, y) \in R$. Per tant, per simetria, $(x, w) \in R$, i per transitivitat, $(x, y) \in R$. Per tant, $(x, y) \in R \cap ([w] \times [w])$.

3. El conjunt quocient $W/R = \{[w] : w \in W\}$ és una partició de W . Volem vore

- (a) $\bigcup_{w \in W} [w] = W$.
- (b) Si $[w] \neq [w']$, aleshores $[w] \cap [w'] = \emptyset$.

Vejam (a). Per a la inclusió d'esquerra a dreta, notem que si $w \in W$, aleshores $[w] \subseteq W$. Per tant, $\bigcup_{w \in W} [w] \subseteq W$. Per a l'altra, si $w \in W$, $w \in [w] \subseteq \bigcup_{w \in W} [w]$. Així,

$$\bigcup_{w \in W} [w] = W.$$

Ara vejам (b). La inclusió de dreta a esquerra es té sempre. Demostrem l'altra inclusió per reducció a l'absurd. Suposem que existeix $z \in [w] \cap [w']$. Aleshores, $(w, z) \in R$ i $(w', z) \in R$. Per simetria, $(z, w') \in R$ i per transitivitat, $(w, w') \in R$, però aleshores $[w] = [w']$, que és una contradicció, ja que estem suposant $[w] \neq [w']$. Per tant, $[w] \cap [w'] \subseteq \emptyset$. Així,

$$[w] \cap [w'] = \emptyset.$$

□

Proposició 4.3.3. *Una fórmula A és vàlida en tots els marcs $F = (W, R)$, on R és una relació d'equivalència, si, i només si, és vàlida en tots els marcs $F = (W, R)$ on R és universal. Per tant, la lògica dels marcs universals és simplement (S5).*

Demostració. Per una part, suposem que R és una relació universal, és a dir, per a tot $u, v \in W$, es té $(u, v) \in R$. Notem que amb açò tenim que R és una relació d'equivalència, ja que R serà reflexiva, simètrica i transitiva, per definició. Així, siga A una fórmula vàlida en tots els marcs $F = (W, R)$, amb R relació d'equivalència, tindrem que A serà vàlida en tots els marcs amb R relació universal.

L'altra implicació la demostrem per contrarrecíproc. Siga $F = (W, R)$, on R és una relació d'equivalència. Considerem el model $M = (W, R, V)$. Suposem que B és una fórmula tal que existeix un $w \in W$ on B no és certa. És a dir, $M, w \not\models B$.

Definim el model $M' = (W', R', V')$ com:

- 1. $W' = [w]$
- 2. R' és universal en W'
- 3. $V'(p) = V(p) \cap W'$

Com tota relació universal és d'equivalència, tenim que R i R' coincideixen en W' . Per tant, podem demostrar per inducció sobre la fórmula A que

$$M', w' \models A \text{ si, i només si, } M, w \models A.$$

Cas 1: $A \equiv \perp$. Sabem que cap món pot satisfer A . Per tant, com la definició de V' no afecta aquest fet, es compleix que

$$M', w' \Vdash \perp \text{ si, i només si, } M, w' \Vdash \perp.$$

Cas 2: $A \equiv p$. Per definició de V' , tenim que $w' \in V'(p)$ si, i només si, $w' \in V(p)$. Per tant,

$$M', w' \Vdash p \text{ si, i només si, } M, w' \Vdash p.$$

Hipòtesi inductiva: Suposem l'enunciat cert per a les fórmules B i C . Demostrem-ho per als següents casos.

Cas 3: $A \equiv \neg B$. Per la hipòtesi d'inducció, sabem que

$$M', w' \Vdash B \text{ si, i només si, } M, w' \Vdash B.$$

Per tant, obtenim immediatament que

$$M', w' \Vdash \neg B \text{ si, i només si, } M, w' \Vdash \neg B.$$

Cas 4: $A \equiv B \wedge C$. Tenim que

$$\begin{aligned} M', w' \Vdash B \wedge C & \text{ si, i només si, } (M', w' \Vdash B \text{ i } M', w' \Vdash C) \\ & \text{ si, i només si, } (M, w' \Vdash B \text{ i } M, w' \Vdash C) \quad (\text{per HI}) \\ & \text{ si, i només si, } M, w' \Vdash B \wedge C. \end{aligned}$$

Cas 5: $A \equiv B \vee C$. Anàlogament al cas anterior, tenim que

$$\begin{aligned} M', w' \Vdash B \vee C & \text{ si, i només si, } (M', w' \Vdash B \text{ o } M', w' \Vdash C) \\ & \text{ si, i només si, } (M, w' \Vdash B \text{ o } M, w' \Vdash C) \quad (\text{per HI}) \\ & \text{ si, i només si, } M, w' \Vdash B \vee C. \end{aligned}$$

Cas 6: $A \equiv B \rightarrow C$. Raonant de manera anàloga,

$$\begin{aligned} M', w' \Vdash B \rightarrow C & \text{ si, i només si, } (M', w' \nVdash B \text{ o } M', w' \Vdash C) \\ & \text{ si, i només si, } (M, w' \nVdash B \text{ o } M, w' \Vdash C) \quad (\text{per HI}) \\ & \text{ si, i només si, } M, w' \Vdash B \rightarrow C. \end{aligned}$$

Cas 7: $A \equiv \Box B$. Es tenen les següents equivalències.

$$\begin{aligned} M', w' \Vdash \Box B & \text{ si, i només si, } M', w'' \Vdash B, \text{ per a tot } w'' \in W \text{ amb } (w', w'') \in R' \\ & \text{ si, i només si, } M, w'' \Vdash B, \text{ per a tot } w'' \in W \text{ amb } (w', w'') \in R' \quad (\text{HI}) \\ & \text{ si, i només si, } M, w' \Vdash \Box B. \end{aligned}$$

Cas 8: $A \equiv \Diamond B$. Es té que

$M', w' \Vdash \Diamond B$ si, i només si, existeix $w'' \in W$ amb $(w', w'') \in R'$ tal que $M', w'' \Vdash B$
si, i només si, existeix $w'' \in W$ amb $(w', w'') \in R'$ tal que $M, w'' \Vdash B$ (HI)
si, i només si, $M, w' \Vdash \Diamond B$.

En particular, com teníem $M, w \not\Vdash B$, tenim $M', w \not\Vdash B$. És a dir, B no és vertadera en un model basat en un marc universal. $\square$

Capítol 5

Demostracions sintàctiques i el teorema de correcció

Fins ara, tenim una semàntica per al llenguatge modal bàsic basada en models relacionals i un concepte de validesa d'una fórmula: és vàlida si és certa en tots els mons de tots els models. La lògica estableix una relació entre la validesa semàntica i la demostrabilitat, de manera que una fórmula és demostrable si, i només si, és vàlida.

Els sistemes de demostració més senzills i antics són els sistemes axiomàtics, on una demostració és una seqüència de fórmules que parteix d'axiomes i arriba a la fórmula desitjada mitjançant algunes regles d'inferència.

Ara, perquè el sistema de demostració s'ajuste a la semàntica, hem de garantir que les fórmules demostrables siguin certes en tots els models. Això ens portarà a definir les lògiques modals normals, on només necessitem dues regles d'inferència: el modus ponens i la necessitat. A més, els axiomes inclouen totes les tautologies i certs axiomes modals addicionals, segons la lògica modal considerada.

Analitzarem també la lògica modal més bàsica, **K**, on comptem amb totes les instàncies de substitució de l'axioma (K) i el seu dual.

Per últim, estudiarem el Teorema de Correcció (Teorema 5.6.1), el qual ens diu que si una fórmula és demostrable en un sistema modal, aleshores és vertadera en eixe sistema.

Definició 5.0.1. (Modus ponens). La regla de modus ponens (MP) és l'esquema

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B} \text{ (MP)}$$

Diem que una fórmula B se segueix per modus ponens de les fórmules A i C si, i només si, $C \equiv A \rightarrow B$.

Definició 5.0.2. (Necessitat). La regla de necessitat (NEC) és l'esquema

$$\frac{A}{\Box A} \text{ (NEC)}$$

Diem que una fórmula B se segueix per necessitat de la fórmula A si, i només si, $B \equiv \Box A$.

Definició 5.0.3. (Demostració). Una demostració des d'un conjunt d'axiomes Σ és una seqüència finita de fórmules $B_1, B_2, \dots, B_n$ que satisfà que per a cada $1 \leq i \leq n$,

1. B_i és una instància de substitució d'una tautologia.
2. B_i és una instància de substitució d'una fórmula en Σ .
3. B_i se segueix per modus ponens de B_j i B_k amb $j, k < i$.
4. B_i se segueix per necessitat de B_j , amb $j < i$.

En este cas, escrivim $\Sigma \vdash A$, on $A \equiv B_n$. I diem “ A és dedueix sintàcticament des de Σ ”, o “ A és demostrable des de Σ ”.

A continuació, mostrem un exemple de demostració d'una fórmula vàlida en un sistema modal, utilitzant instàncies de substitució, modus ponens i la necessitat.

Exemple 5.0.1. Siga $\Sigma = \{p, q\}$. Anem a demostrar que $\Sigma \vdash p \wedge q$ i que $\Sigma \vdash \Box(p \wedge q)$. La fórmula $p \rightarrow (q \rightarrow p \wedge q)$ és una tautologia. Ho vegem amb la següent taula de veritat.

p	q	$p \wedge q$	$q \rightarrow p \wedge q$	$p \rightarrow (q \rightarrow p \wedge q)$
0	0	0	1	1
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

La demostració és la següent.

1. $p \rightarrow (q \rightarrow p \wedge q)$ (Tautologia)
2. $p (\in \Sigma)$
3. $q \rightarrow p \wedge q$ (MP amb 2, 1)
4. $q (\in \Sigma)$
5. $p \wedge q$ (MP amb 3, 4)

Així, $\Sigma \vdash p \wedge q$. A més, de Σ es dedueix sintàcticament $\Box(p \wedge q)$.

Considerem la demostració anterior i afegim el pas

6. $\Box(p \wedge q)$ (NEC)
- Així, $\Sigma \vdash \Box(p \wedge q)$.

5.1 Lògica modal normal

No tots els conjunts de fórmules modals es poden caracteritzar fàcilment com a demostrables a partir d'axiomes. Volem veure que tot el que es pot demostrar en la lògica proposicional clàssica segueix sent demostrable en la lògica modal, tenint en compte que les fórmules ara poden contindre també $\Box$ i $\Diamond$. Per fer-ho, necessitem que una lògica modal continga totes les instàncies tautològiques i siga tancada per modus ponens.

Definició 5.1.1. (Lògica modal). Una lògica modal és un conjunt Σ de fórmules modals el qual

1. Conté totes les tautologies.
2. Està tancat per substitució, és a dir, si $A \in \Sigma$, i $D_1, \dots, D_n$ són fórmules, aleshores $A[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n] \in \Sigma$.
3. Està tancat per modus ponens, és a dir, si $A, A \rightarrow B \in \Sigma$, aleshores $B \in \Sigma$.

Per a poder utilitzar la semàntica relacional per a les lògiques modals, cal garantir que s'incloguen totes les fórmules vàlides en tots els models modals. Això es compleix si totes les instàncies de (K) i (DUAL) són demostrables i, si quan una fórmula A és demostrable, també ho és $\Box A$. Definim aquest concepte com segueix.

Definició 5.1.2. (Lògica modal normal). Una lògica modal és normal si conté

$$\begin{array}{ll} \Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q), & \text{(K)} \\ \Diamond p \leftrightarrow \neg \Box \neg p & \text{(DUAL)} \end{array}$$

i està tancada per necessitat, és a dir, si $A \in \Sigma$, aleshores $\Box A \in \Sigma$.

Exemple 5.1.1. Notem que $\text{Frm}(\mathcal{L})$, el conjunt de totes les fórmules modals, és una lògica modal normal.

Proposició 5.1.1. Tota lògica modal normal està tancada per a la regla RK, definida com

$$\frac{A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \dots (A_{n-1} \rightarrow A_n) \dots)}{\Box A_1 \rightarrow (\Box A_2 \rightarrow \dots (\Box A_{n-1} \rightarrow \Box A_n) \dots)} \text{ RK}$$

Demostració. Per inducció sobre n .

Cas base: $n = 1$.

$$\frac{1. \quad A_1}{2. \quad \Box A_1}$$

Açò és la regla de necessitat, i tota lògica modal normal està tancada per necessitat.

Cas $n = 2$.

1.	$\Box(A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow (\Box A_1 \rightarrow \Box A_2)$	(K)
2.	$A_1 \rightarrow A_2$	($\in \Sigma$)
3.	$\Box(A_1 \rightarrow A_2)$	(NEC)
4.	$\Box A_1 \rightarrow \Box A_2$	(MP 3,1)

Hipòtesi inductiva: Suposem l'enunciat cert per a $n - 1$, és a dir,

1.	$A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \dots (A_{n-2} \rightarrow A_{n-1}) \dots)$
2.	$\Box A_1 \rightarrow (\Box A_2 \rightarrow \dots (\Box A_{n-2} \rightarrow \Box A_{n-1}) \dots)$

Ho demostrem per a n .

Suposem que $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \dots (A_{n-1} \rightarrow A_n) \dots) \in \Sigma$. Com Σ és una lògica modal normal, tota instància de K està en Σ . En particular, $\Box(A_{n-1} \rightarrow A_n) \rightarrow (\Box A_{n-1} \rightarrow \Box A_n) \in \Sigma$.

Notem que $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \dots (A_{n-1} \rightarrow A_n) \dots) \in \Sigma$. Per hipòtesi inductiva, $\Box A_1 \rightarrow (\Box A_2 \rightarrow (\dots \rightarrow \Box(A_{n-1} \rightarrow A_n) \dots)) \in \Sigma$. Però com teníem $\Box(A_{n-1} \rightarrow A_n) \rightarrow (\Box A_{n-1} \rightarrow \Box A_n)$, per modus ponens, $\Box A_1 \rightarrow (\Box A_2 \rightarrow \dots (\Box A_{n-1} \rightarrow \Box A_n) \dots)$, com volíem. $\square$

Proposició 5.1.2. *Tota lògica modal normal Σ conté $\neg\Diamond\perp$.*

Demostració. Sabem que tota lògica modal normal conté a (DUAL), és a dir, tenim $\Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A$. Si substituïm A per $\perp$, tenim que

$$\Diamond\perp \leftrightarrow \neg\Box\neg\perp \in \Sigma.$$

Ara, com $\neg\perp$ és una tautologia (perquè $\neg\perp$ és equivalent a $\top$, la veritat, com vam vore en la Definició 3.1.3), es té que

$$\Box\neg\perp = \Box\top.$$

A més, per definició de lògica modal normal, sabem que Σ conté totes les tautologies.

Així, com $\top$ és una tautologia, per la regla de necessitat $\Box\top$ també ha d'estar en Σ . És a dir, tenim que

$$\Box\neg\perp \in \Sigma,$$

i com havíem vist que $\Diamond\perp \leftrightarrow \neg\Box\neg\perp \in \Sigma$, aleshores tindrem

$$\neg\Diamond\perp \in \Sigma,$$

com volíem vore. $\square$

A continuació, enunciem un lema previ per a poder demostrar la proposició següent.

Lema 5.1.1. *Siga $(\Sigma_i)_{i \in I}$ una família de lògiques modals (normals). Aleshores, $\bigcap_{i \in I} \Sigma_i$ també és una lògica modal (normal).*

Demostració. Hem de vore que se satisfan les 6 condicions de les definicions 5.1.1 i 5.1.2.

1. $\bigcap_{i \in I} \Sigma_i$ conté totes les tautologies, ja que per a cada $i \in I$, Σ_i és lògica modal normal i totes les tautologies estan en Σ_i .
2. $\bigcap_{i \in I} \Sigma_i$ està tancada per substitució. Anem a vore-ho. Si $A \in \bigcap_{i \in I} \Sigma_i$ i $D_1, \dots, D_n$ són fórmules, hem de demostrar que

$$A[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n] \in \bigcap_{i \in I} \Sigma_i.$$

Com $A \in \bigcap_{i \in I} \Sigma_i$, aleshores $A \in \Sigma_i$ per a cada $i \in I$. Com Σ_i és lògica modal normal, aleshores $A[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n] \in \Sigma_i$. Així, $A[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n] \in \bigcap_{i \in I} \Sigma_i$.

3. $\bigcap_{i \in I} \Sigma_i$ està tancada per modus ponens. Si $A \rightarrow B \in \bigcap_{i \in I} \Sigma_i$ i $A \in \bigcap_{i \in I} \Sigma_i$, aleshores per a cada $i \in I$, $A \rightarrow B \in \Sigma_i$ i $A \in \Sigma_i$. Com cada Σ_i és lògica modal normal, per modus ponens es dedueix que $B \in \Sigma_i$ per a cada $i \in I$, i per tant $B \in \bigcap_{i \in I} \Sigma_i$.
4. $\bigcap_{i \in I} \Sigma_i$ conté a (K). Com cada Σ_i és una lògica modal normal, cada Σ_i conté (K). Per tant, (K) també està en la seua intersecció.
5. $\bigcap_{i \in I} \Sigma_i$ conté a (DUAL). Com cada Σ_i satisfà la propietat (DUAL), aquesta propietat també pertany a la seua intersecció.
6. $\bigcap_{i \in I} \Sigma_i$ està tancada per necessitat. Si $A \in \bigcap_{i \in I} \Sigma_i$, aleshores per a cada $i \in I$, $A \in \Sigma_i$. Com cada Σ_i és una lògica modal normal, també tenim $\Box A \in \Sigma_i$. Per tant, $\Box A \in \bigcap_{i \in I} \Sigma_i$.

□

En el que segueix vorem com, a partir d'un conjunt donat de fórmules, és possible construir una lògica modal que les continga. En particular, vorem que sempre existeix una lògica modal mínima que inclou totes les instàncies de les fórmules donades, i que serveix com a base per al desenvolupament d'altres sistemes modals més complexos.

Proposició 5.1.3. *Siguen les fórmules $A_1, \dots, A_n$. Aleshores existeix la menor lògica modal, Σ , que conté totes les instàncies d' $A_1, \dots, A_n$.*

Demostració. Considerem la família

$$\mathcal{A} = \{\Sigma : \Sigma \text{ lògica modal i } A_1, \dots, A_n \in \Sigma\}.$$

Notem que $\mathcal{A}$ no és buida ja que el conjunt de totes les fórmules està en la família. Aleshores, $\bigcap \mathcal{A}$ és lògica modal, conté a $A_1, \dots, A_n$ i és la menor satisfent estes dues condicions. □

Definició 5.1.3. (Sistema modal). La menor lògica modal normal que conté $A_1, \dots, A_n$ s'anomena sistema modal i es denota per $\mathbf{KA}_1 \dots A_n$. La menor lògica modal normal es denota per $\mathbf{K}$.

Nota 5.1.1. Amb aquesta definició, fem el mateix raonament que en la proposició anterior, però ara considerem la família següent

$$\mathcal{A} = \{\Sigma : \Sigma \text{ lògica modal normal i } A_1, \dots, A_n \in \Sigma\}.$$

Aleshores, $\bigcap \mathcal{A}$ és lògica modal normal, conté a $A_1, \dots, A_n$ i és la menor satisfent estes dues condicions. La denotem per $\mathbf{KA}_1, \dots, A_n$.

Ara, per a la família

$$\mathcal{A} = \{\Sigma : \Sigma \text{ lògica modal normal}\}$$

tenim que $\bigcap \mathcal{A} = \mathbf{K}$.

5.2 Demostracions i sistemes modals

Ja hem vist el concepte de demostració en les lògiques modals normals, que en termes generals és una seqüència de fórmules obtingudes a partir d'axiomes o mitjançant regles d'inferència.

En les lògiques modals normals, totes les instàncies de les tautologies, l'axioma (K) i el principi (DUAL) compten com a axiomes, donant lloc al sistema modal $\mathbf{K}$, la lògica modal normal mínima. No obstant això, es poden afegir més axiomes per obtenir altres sistemes, encara que les regles d'inferència sempre són modus ponens i necessitat.

Definició 5.2.1. (Fórmula demostrable). Donat un sistema modal $\mathbf{KA}_1 \dots A_n$ i una fórmula B . Direm que B és demostrable en $\mathbf{KA}_1 \dots A_n$, escrit $\mathbf{KA}_1 \dots A_n \vdash B$ si, i només si, existeix una seqüència finita $C_1, \dots, C_k$ tal que

1. $C_k = B$;
2. Per a cada $1 \leq i \leq k$, C_i és una instància de tautologia, una instància de (K), de (DUAL), o de $A_1, \dots, A_n$, o se segueix de les fórmules prèvies per (MP) o (NEC).

Tot seguit presentem un exemple de deducció modal dins del sistema $\mathbf{K}$ on, a partir d'un conjunt de fórmules donades, es demostra una altra fórmula. L'exemple mostra l'ús de tautologies, modus ponens i la regla de necessitat per justificar formalment la demostració de la fórmula final.

Exemple 5.2.1. Anem a demostrar que $\mathbf{K}(p \rightarrow q)(r \wedge p)(\Diamond r) \vdash \Box q$.

Notem que $(r \wedge p) \rightarrow p$ és tautologia, ja que

r	p	$r \wedge p$	$r \wedge p \rightarrow p$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Així, la demostració és

1.	$r \wedge p$	(A_2)
2.	$r \wedge p \rightarrow p$	(TAUT)
3.	p	(MP)
4.	$p \rightarrow q$	(A_1)
5.	q	(MP)
6.	$\Box q$	(NEC)

Ara, definim el conjunt de totes les fórmules que són deduïbles en el sistema $\mathbf{K}$ a partir d'un conjunt inicial de fórmules $A_1, \dots, A_n$. Aquest conjunt representa la lògica generada per aquestes fórmules dins del sistema modal considerat.

Proposició 5.2.1. $\mathbf{KA}_1 \dots A_n = \{B : \mathbf{KA}_1 \dots A_n \vdash B\}$.

Demostració. Vejam primer la inclusió d'esquerra a dreta.

Com $\mathbf{KA}_1 \dots A_n$ és la menor lògica modal normal que conté $A_1, \dots, A_n$, per a vore que

$$\mathbf{KA}_1 \dots A_n \subseteq \{B : \mathbf{KA}_1 \dots A_n \vdash B\},$$

és suficient vore que $\{B : \mathbf{KA}_1 \dots A_n \vdash B\}$ és una lògica modal normal que satisfà les sis propietats. És a dir, hem de comprovar

1. $\{B : \mathbf{KA}_1 \dots A_n \vdash B\}$ conté totes les tautologies, que ho tenim perquè cada tautologia B és una instància tautològica, per tant, $\mathbf{KA}_1 \dots A_n \vdash B$.
2. $\{B : \mathbf{KA}_1 \dots A_n \vdash B\}$ està tancat per substitució, és a dir, si $A \in \{B : \mathbf{KA}_1 \dots A_n \vdash B\}$ i $D_1, \dots, D_n$ són fórmules, aleshores

$$A[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n] \in \{B : \mathbf{KA}_1 \dots A_n \vdash B\}.$$

Siga $C_1, \dots, C_k$ una demostració per a A .

Considerem la seqüència

$$C_1[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n], \dots, C_k[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n].$$

Notem que $C_k[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n] = A[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n]$.

Per la Definició 5.2.1 sabem que per a cada $1 \leq i \leq n$, $C_i[D_1/p_1, \dots, D_n/p_n]$ és una instància de tautologia, una instància de (K), de (DUAL), o de $A_1, \dots, A_n$, o se segueix de les fórmules prèvies per (MP) o (NEC). Per tant, $\{B : \mathbf{K}A_1 \dots A_n \vdash B\}$ està tancat per substitució.

3. $\{B : \mathbf{K}A_1 \dots A_n \vdash B\}$ està tancat per modus ponens.

Considerem

$$C, C \rightarrow D \in \{B : \mathbf{K}A_1 \dots A_n \vdash B\}.$$

Existeix una demostració de les anteriors que acaba en C , i existeix una demostració que acaba en $C \rightarrow D$. Suposem que $C_1, \dots, C_k \equiv C$ i $E_1, \dots, E_l \equiv C \rightarrow D$.

Considerem la seqüència $C_1, \dots, C_k, E_1, \dots, E_l, D$. Fent modus ponens entre la posició k i la $k+l$, ja tenim que aquesta seqüència és una demostració de D .

Per tant, queda provat amb 1, 2, 3 que $\{B : \mathbf{K}A_1 \dots A_n \vdash B\}$ és lògica modal. Falta vore que també és normal.

4. Volem vore que (K) $\in \{B : \mathbf{K}A_1 \dots A_n \vdash B\}$. Recordem que (K) és

$$\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q).$$

Notem que (K) és una demostració de (K) en $\mathbf{K}A_1 \dots A_n$, és a dir, $\mathbf{K}A_1 \dots A_n \vdash K$, per tant, (K) $\in \{B : \mathbf{K}A_1 \dots A_n \vdash B\}$.

5. Volem vore que (DUAL) $\in \{B : \mathbf{K}A_1 \dots A_n \vdash B\}$. Recordem que (DUAL) és

$$\Diamond p \leftrightarrow \neg \Box \neg p.$$

Anàlogament al cas anterior, notem que (DUAL) és una demostració de (DUAL) en $\mathbf{K}A_1 \dots A_n$, és a dir, $\mathbf{K}A_1 \dots A_n \vdash (\text{DUAL})$, per tant, (DUAL) $\in \{B : \mathbf{K}A_1 \dots A_n \vdash B\}$.

6. $\{B : \mathbf{K}A_1 \dots A_n \vdash B\}$ està tancat per necessitat. Siga $A \in \{B : \mathbf{K}A_1 \dots A_n \vdash B\}$, volem vore ara que també

$$\Box A \in \{B : \mathbf{K}A_1 \dots A_n \vdash B\}.$$

Com $A \in \{B : \mathbf{K}A_1 \dots A_n \vdash B\}$, existeix una demostració que acaba en A . Siga aquesta demostració $C_1, \dots, C_n \equiv A$, fem un pas més i obtenim $C_1, \dots, C_n, \Box A$, on hem utilitzat (NEC) en el pas $n+1$. Per tant, $\Box A \in \{B : \mathbf{K}A_1 \dots A_n \vdash B\}$, com volíem.

Així, amb 4, 5, 6 queda provat que $\{B : \mathbf{K}A_1 \dots A_n \vdash B\}$ és lògica modal normal.

Per últim, veiem que $A_i \in \{B : \mathbf{K}A_1 \dots A_n \vdash B\}$ ja que A_i és una demostració d' A_i en $\mathbf{K}A_1 \dots A_n$.

Com $\mathbf{K}A_1 \dots A_n$ és la menor lògica modal satisfent 1, ..., 7, aleshores $\mathbf{K}A_1 \dots A_n \subseteq \{B : \mathbf{K}A_1 \dots A_n \vdash B\}$.

Per a l'altra inclusió, siga $B \in \{B : \mathbf{K}A_1 \dots A_n \vdash B\}$, aleshores existeix una seqüència $C_1, \dots, C_k$ que demostra B .

Anem a demostrar que $B \in \mathbf{K}A_1 \dots A_n$ per inducció sobre k .

Cas 1: $k = 1$. Una demostració de longitud 1 de B és B . Així B només pot ser una instància de tautologia, una instància de (K), de (DUAL) o d' $A_1, \dots, A_n$. En tot cas, $B \in \mathbf{K}A_1 \dots A_n$.

Hipòtesi inductiva: Suposem l'enunciat cert per a tot $j \leq k - 1$. Sabem que si tenim una demostració de longitud $k - 1$, aleshores l'últim terme de la demostració està en $\mathbf{K}A_1 \dots A_n$.

Ara, demostrem-lo per a k . Siga $C_1, \dots, C_k$ una demostració de B . Notem que per a tot $j \leq k - 1$, el fragment inicial $C_1, \dots, C_j$ és una demostració de C_j en $\mathbf{K}A_1 \dots A_n$. Per hipòtesi inductiva, $C_j \in \mathbf{K}A_1 \dots A_n$. Anem a demostrar que B també està en $\mathbf{K}A_1 \dots A_n$. Com $B \equiv C_k$, aleshores es té un dels següents casos:

1. B és una instància tautològica.
2. B és una instància de (K), de (DUAL), o d' $A_1, \dots, A_n$.
3. B se segueix per modus ponens o per necessitat d'alguna fórmula anterior.

En tot cas es pot justificar que $B \in \mathbf{K}A_1 \dots A_n$. Per tant, $\{B : \mathbf{K}A_1 \dots A_n \vdash B\} \subseteq \mathbf{K}A_1 \dots A_n$.

Així, queda provat que

$$\mathbf{K}A_1 \dots A_n = \{B : \mathbf{K}A_1 \dots A_n \vdash B\}.$$

□

Corol·lari 5.2.1. *La menor lògica modal normal que conté $A_1 \dots A_n$ són totes les fórmules derivades d'elles.*

5.3 Demostracions en K

Per a practicar demostracions en el menor sistema modal, en aquesta secció demostrarem algunes de les fórmules vàlides de la primera columna de la Taula 3.1 mitjançant proves en **K**. Les altres, les demostrarem més endavant, en la secció següent, amb un mètode simplificat que estudiarem posteriorment.

Proposició 5.3.1. $\mathbf{K} \vdash \Box A \rightarrow \Box(B \rightarrow A)$.

Demostració. Ho vegem amb la següent demostració.

1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$	(TAUT)
2. $\Box(A \rightarrow (B \rightarrow A))$	(NEC)
3. $\Box(A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box(B \rightarrow A))$	(K)
4. $\Box A \rightarrow \Box(B \rightarrow A)$	(MP 2,3)

□

Proposició 5.3.2. $\mathbf{K} \vdash \Box(A \wedge B) \rightarrow (\Box A \wedge \Box B)$.

Demostració. Ho vegem amb la següent demostració. Per una part tenim

1. $(A \wedge B) \rightarrow A$	(TAUT)
2. $\Box((A \wedge B) \rightarrow A)$	(NEC)
3. $\Box((A \wedge B) \rightarrow A) \rightarrow (\Box(A \wedge B) \rightarrow \Box A)$	(K)
4. $\Box(A \wedge B) \rightarrow \Box A$	(MP 2,3)

Per altra part,

5. $(A \wedge B) \rightarrow B$	(TAUT)
6. $\Box((A \wedge B) \rightarrow B)$	(NEC)
7. $\Box((A \wedge B) \rightarrow B) \rightarrow (\Box(A \wedge B) \rightarrow \Box B)$	(K)
8. $\Box(A \wedge B) \rightarrow \Box B$	(MP 6,7)

I finalment,

9. $(\Box(A \wedge B) \rightarrow \Box A) \rightarrow ((\Box(A \wedge B) \rightarrow \Box B) \rightarrow (\Box(A \wedge B) \rightarrow (\Box A \wedge \Box B)))$	(TAUT)
10. $(\Box(A \wedge B) \rightarrow \Box B) \rightarrow (\Box(A \wedge B) \rightarrow (\Box A \wedge \Box B))$	(MP 4,9)
11. $\Box(A \wedge B) \rightarrow (\Box A \wedge \Box B)$	(MP 8,10)

Cal destacar que la fórmula utilitzada en (9) és una instància de la tautologia

$$(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \wedge r))).$$

□

Proposició 5.3.3. $\mathbf{K} \vdash (\Box A \wedge \Box B) \rightarrow \Box(A \wedge B)$.

Demostració. Ho vegem amb la següent demostració.

1. $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$	(TAUT)
2. $\Box(A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)))$	(NEC)
3. $\Box(A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box(B \rightarrow (A \wedge B)))$	(K)
4. $\Box A \rightarrow \Box(B \rightarrow (A \wedge B))$	(MP 2,3)
5. $\Box(B \rightarrow (A \wedge B)) \rightarrow (\Box B \rightarrow \Box(A \wedge B))$	(K)

Ara considerem la següent instància de la tautologia $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$, i anomenem-la (6):

$$(\Box A \rightarrow \Box(B \rightarrow (A \wedge B))) \rightarrow (\Box(B \rightarrow (A \wedge B)) \rightarrow (\Box B \rightarrow \Box(A \wedge B))) \rightarrow (\Box A \rightarrow (\Box B \rightarrow \Box(A \wedge B))).$$

Així, continuem la demostració com segueix.

7. $(\Box(B \rightarrow (A \wedge B)) \rightarrow (\Box B \rightarrow \Box(A \wedge B))) \rightarrow (\Box A \rightarrow (\Box B \rightarrow \Box(A \wedge B)))$	(MP 4,6)
8. $\Box A \rightarrow (\Box B \rightarrow \Box(A \wedge B))$	(MP 5,7)
9. $(\Box A \rightarrow (\Box B \rightarrow \Box(A \wedge B))) \rightarrow ((\Box A \wedge \Box B) \rightarrow \Box(A \wedge B))$	(TAUT)
10. $(\Box A \wedge \Box B) \rightarrow \Box(A \wedge B)$	(MP 8,9)

Cal destacar que la fórmula utilitzada en (9) és una instància de la tautologia

$$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r).$$

□

Proposició 5.3.4. $\mathbf{K} \vdash \neg\Box p \rightarrow \Diamond\neg p$.

Demostració. Ho vegem amb la següent demostració.

1. $\Diamond\neg p \leftrightarrow \neg\Box\neg\neg p$	(DUAL amb $\neg p$)
2. $(\Diamond\neg p \leftrightarrow \neg\Box\neg\neg p) \rightarrow (\neg\Box\neg\neg p \rightarrow \Diamond\neg p)$	(TAUT)
3. $\neg\Box\neg\neg p \rightarrow \Diamond\neg p$	(MP 1,2)
4. $\neg\neg p \rightarrow p$	(TAUT)
5. $\Box(\neg\neg p \rightarrow p)$	(NEC)
6. $\Box(\neg\neg p \rightarrow p) \rightarrow (\Box\neg\neg p \rightarrow \Box p)$	(K)
7. $\Box\neg\neg p \rightarrow \Box p$	(MP 5,6)
8. $(\Box\neg\neg p \rightarrow \Box p) \rightarrow (\neg\Box p \rightarrow \neg\Box\neg\neg p)$	(TAUT)
9. $\neg\Box p \rightarrow \neg\Box\neg\neg p$	(MP 7,8)

Ara considerem la següent instància de la tautologia $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$, i anomenem-la (10).

$$(\neg\Box p \rightarrow \neg\Box\neg\neg p) \rightarrow (\neg\Box\neg\neg p \rightarrow \Diamond\neg p) \rightarrow (\neg\Box p \rightarrow \Diamond\neg p).$$

Així, continuem la demostració com segueix

11. $(\neg\Box\neg\neg p \rightarrow \Diamond\neg p) \rightarrow (\neg\Box p \rightarrow \Diamond\neg p)$	(MP 9,10)
12. $\neg\Box p \rightarrow \Diamond\neg p$	(MP 3,11)

Cal destacar que la fórmula utilitzada en (8) és una instància de la tautologia

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p).$$

□

5.4 Regles derivades

En lògica modal i proposicional, les demostracions poden ser complexes i repetitives. Aplicar regles com (RK) o el modus ponens moltes vegades requereix passos intermedis innecessaris. Per simplificar-ho, és útil establir regles derivades que justifiquen els passos de manera concisa. En aquesta secció vorem uns conceptes sobre demostrabilitat per facilitar les demostracions.

Proposició 5.4.1. *Si $\mathbf{K} \vdash A_1, \dots, \mathbf{K} \vdash A_n$, i B es dedueix de $A_1, \dots, A_n$ per lògica proposicional, aleshores $\mathbf{K} \vdash B$.*

Demostració. Si B es dedueix de $A_1, \dots, A_n$ per lògica proposicional, aleshores

$$A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \dots (A_n \rightarrow B) \dots)$$

és una instància tautològica. Aplicant modus ponens n vegades obtenim una demostració de B . $\square$

Indicarem l'ús d'aquesta proposició amb PL.

Proposició 5.4.2. *Si $\mathbf{K} \vdash A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \dots (A_{n-1} \rightarrow A_n) \dots)$, aleshores*

$$\mathbf{K} \vdash \Box A_1 \rightarrow (\Box A_2 \rightarrow \dots (\Box A_{n-1} \rightarrow \Box A_n) \dots).$$

Demostració. Per inducció sobre n , com la demostració de la Proposició 5.1.1. $\square$

Com ja havíem vist en la Proposició 5.1.1, indicarem l'ús d'aquesta proposició amb (RK).

Proposició 5.4.3. $\mathbf{K} \vdash (\Box A \wedge \Box B) \rightarrow \Box(A \wedge B)$

Demostració. La demostració és la següent.

1. $\mathbf{K} \vdash A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$ (TAUT)
2. $\mathbf{K} \vdash \Box A \rightarrow (\Box B \rightarrow \Box(A \wedge B))$ (RK)
3. $\mathbf{K} \vdash (\Box A \wedge \Box B) \rightarrow \Box(A \wedge B)$ (PL, 2)

$\square$

Proposició 5.4.4. *Suposem que $\mathbf{K} \vdash A \leftrightarrow B$ i $\mathbf{K} \vdash C[A/q]$. Aleshores, $\mathbf{K} \vdash C[B/q]$.*

Demostració. Per inducció sobre la fórmula C .

Cas 1: $C \equiv \perp$. Notem que $C[A/q] = \perp = C[B/q]$. Per tant, com estem suposant que $\mathbf{K} \vdash C[A/q]$, aleshores també $\mathbf{K} \vdash C[B/q]$.

Cas 2: $C \equiv p$, amb $p \neq q$. Igual que en el primer cas, $C[A/q] = p = C[B/q]$, per tant, com suposem $\mathbf{K} \vdash C[A/q]$, aleshores també $\mathbf{K} \vdash C[B/q]$.

Cas 3: $C \equiv q$. Notem que $C[A/q] \equiv A$ i $C[B/q] \equiv B$. Així,

1. $\mathbf{K} \vdash A \leftrightarrow B$	(Hip)
2. $\mathbf{K} \vdash A$	(Hip)
3. $\mathbf{K} \vdash (A \leftrightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$	(TAUT)
4. $\mathbf{K} \vdash A \rightarrow B$	(MP 1,3)
5. $\mathbf{K} \vdash B$	(MP 2,4)

És a dir, es té $\mathbf{K} \vdash B = C[B/q]$.

Hipòtesi inductiva. Suposem l'enunciat cert per a les fórmules D i E . Demostrem-ho per als següents casos.

Cas 4: $C \equiv D \wedge E$. Notem que $C[A/q] \equiv D[A/q] \wedge E[A/q]$ i $C[B/q] \equiv D[B/q] \wedge E[B/q]$. Així,

1. $\mathbf{K} \vdash D[A/q] \wedge E[A/q]$	(Hip)
2. $\mathbf{K} \vdash D[A/q] \wedge E[A/q] \rightarrow D[A/q]$	(TAUT)
3. $\mathbf{K} \vdash D[A/q]$	(MP 1,2)
4. $\mathbf{K} \vdash D[B/q]$	(HI)

Anàlogament arribem a que $\mathbf{K} \vdash E[B/q]$. És a dir, es té $\mathbf{K} \vdash C[B/q]$.

Cas 5: $C \equiv D \vee E$. Notem que $C[A/q] \equiv D[A/q] \vee E[A/q]$ i $C[B/q] \equiv D[B/q] \vee E[B/q]$. Així,

1. $\mathbf{K} \vdash D[A/q] \vee E[A/q]$	(Hip)
2. $\mathbf{K} \vdash D[A/q] \vee E[A/q] \rightarrow D[A/q] \circ E[A/q]$	(Def)
3. $\mathbf{K} \vdash D[A/q] \circ E[A/q]$	(MP 1,2)
4. $\mathbf{K} \vdash D[B/q] \circ E[B/q]$	(HI)
5. $\mathbf{K} \vdash D[B/q] \vee E[B/q]$	(Def)

És a dir, es té $\mathbf{K} \vdash C[B/q]$.

Cas 6: $C \equiv D \rightarrow E$. Notem que $C[A/q] \equiv D[A/q] \rightarrow E[A/q]$ i $C[B/q] \equiv D[B/q] \rightarrow E[B/q]$. Així,

1. $\mathbf{K} \vdash D[A/q] \rightarrow E[A/q]$	(Hip)
2. $\mathbf{K} \not\vdash D[A/q] \circ \mathbf{K} \vdash E[A/q]$	(Def)
3. $\mathbf{K} \not\vdash D[B/q] \circ \mathbf{K} \vdash E[B/q]$	(HI)
4. $\mathbf{K} \vdash D[B/q] \rightarrow E[B/q]$	(Def)

És a dir, es té $\mathbf{K} \vdash C[B/q]$, com volíem.

Cas 7: $C \equiv \Box D$. Notem que $C[A/q] \equiv \Box D[A/q]$ i $C[B/q] \equiv \Box D[B/q]$. Així,

1. $\mathbf{K} \vdash \Box D[A/q]$ (Hip)
2. $\mathbf{K} \vdash A \leftrightarrow B$ (Hip)
3. $\mathbf{K} \vdash D[A/q] \leftrightarrow D[B/q]$ (HI)
4. $\mathbf{K} \vdash \Box D[A/q] \leftrightarrow \Box D[B/q]$ (RK, 3)
5. $\mathbf{K} \vdash \Box D[A/q] \rightarrow \Box D[B/q]$ (MP 1,4)

Cas 8: $C \equiv \Diamond D$. Notem que $C[A/q] \equiv \Diamond D[A/q]$ i $C[B/q] \equiv \Diamond D[B/q]$. Emprarem que en una lògica modal normal, es té $\Diamond A \equiv \neg \Box \neg A$ (DUAL).

1. $\mathbf{K} \vdash \Diamond D[A/q]$ (Hip)
2. $\mathbf{K} \vdash A \leftrightarrow B$ (Hip)
3. $\mathbf{K} \vdash D[A/q] \leftrightarrow D[B/q]$ (HI)
4. $\mathbf{K} \vdash \neg D[A/q] \leftrightarrow \neg D[B/q]$ (TAUT)
5. $\mathbf{K} \vdash \Box \neg D[A/q] \leftrightarrow \Box \neg D[B/q]$ (RK, 4)
6. $\mathbf{K} \vdash \neg \Box \neg D[A/q] \leftrightarrow \neg \Box \neg D[B/q]$ (TAUT)
7. $\mathbf{K} \vdash \Diamond D[A/q] \leftrightarrow \Diamond D[B/q]$ (DUAL)
8. $\mathbf{K} \vdash \Diamond D[A/q] \rightarrow \Diamond D[B/q]$ (MP 1,7)

Cal destacar que en les línies 4 i 6 hem emprat la tautologia

$$(A \leftrightarrow B) \rightarrow (\neg A \leftrightarrow \neg B).$$

Vejam que, efectivament, és una tautologia, mitjançant la següent taula de veritat.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \leftrightarrow B$	$\neg A \leftrightarrow \neg B$	$(A \leftrightarrow B) \rightarrow (\neg A \leftrightarrow \neg B)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

□

Aquesta proposició és útil per convertir $\Diamond$ en $\Box$ o viceversa, eliminar dobles negacions, i reescriure fórmules. D'ara endavant escriurem “A per B” per a abbreviar que

$$\begin{aligned} &\vdash C(A) \\ &\vdash A \leftrightarrow B \\ &\vdash C(B) \end{aligned}$$

Per exemple, vejам la següent proposició.

Proposició 5.4.5. $\mathbf{K} \vdash \neg \Box p \rightarrow \Diamond \neg p$.

Demostració. La prova és la següent.

1. $\mathbf{K} \vdash \Diamond \neg p \leftrightarrow \neg \Box \neg \neg p$ (DUAL)
2. $\mathbf{K} \vdash \neg \Box \neg \neg p \rightarrow \Diamond \neg p$ (PL, 1)
3. $\mathbf{K} \vdash \neg \Box p \rightarrow \Diamond \neg p$ (p per $\neg \neg p$)

□

Amb açò, notem que quan una fórmula conté una subfórmula $\neg \Box A$, podem substituir-la per $\Diamond \neg A$ mitjançant la Proposició 5.4.4, ja que $\mathbf{K} \vdash \neg \Box A \leftrightarrow \Diamond \neg A$. Per tant, com hem dit abans, indicarem aquesta i altres substitucions similars simplement dient “ $\Diamond \neg$ per $\neg \Box$.”

Proposició 5.4.6. *Si $\mathbf{K} \vdash B$, i A és una instància de substitució de B , aleshores $\mathbf{K} \vdash A$.*

Demostració. Notem que aquesta proposició és un corol·lari de la Proposició 3.5.16. És a dir, es demostra per inducció sobre la llargària de la demostració de B , ja que sabem que les instàncies per substitució d’instàncies tautològiques són elles mateixes instàncies tautològiques, les instàncies per substitució d’instàncies de (DUAL) i (K) són elles mateixes instàncies de (DUAL) i (K), i les aplicacions de (MP) i (NEC) continuen sent correctes quan se substitueixen fórmules per variables proposicionals tant en les premisses com en la conclusió. □

A continuació, demostrarem algunes de les fórmules vàlides de la primera columna de la Taula 3.1 que no havíem provat abans, però ara tenint en compte el que hem vist en la Proposició 5.4.4.

Proposició 5.4.7. $\mathbf{K} \vdash \Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Diamond A \rightarrow \Diamond B)$.

Demostració. La prova és la següent.

1. $\mathbf{K} \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ (TAUT)
2. $\mathbf{K} \vdash \Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box \neg B \rightarrow \Box \neg A)$ (RK, 1)
3. $\mathbf{K} \vdash (\Box \neg B \rightarrow \Box \neg A) \rightarrow (\neg \Box \neg A \rightarrow \neg \Box \neg B)$ (TAUT)
4. $\mathbf{K} \vdash \Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg \Box \neg A \rightarrow \neg \Box \neg B)$ (PL 2,3)
5. $\mathbf{K} \vdash \Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Diamond A \rightarrow \Diamond B)$ ($\Diamond$ per $\neg \Box \neg$)

□

Proposició 5.4.8. $\mathbf{K} \vdash (\Diamond A \vee \Diamond B) \rightarrow \Diamond(A \vee B)$.

Demostració. La prova és la següent.

1. $\mathbf{K} \vdash \neg(A \vee B) \rightarrow \neg A$ (TAUT)
2. $\mathbf{K} \vdash \Box \neg(A \vee B) \rightarrow \Box \neg A$ (RK, 1)
3. $\mathbf{K} \vdash \neg \Box \neg A \rightarrow \neg \Box \neg(A \vee B)$ (TAUT)
4. $\mathbf{K} \vdash \Diamond A \rightarrow \Diamond(A \vee B)$ ($\Diamond$ per $\neg \Box \neg$)
5. $\mathbf{K} \vdash \Diamond B \rightarrow \Diamond(A \vee B)$ (anàleg)
6. $\mathbf{K} \vdash (\Diamond A \vee \Diamond B) \rightarrow \Diamond(A \vee B)$ (PL, 4, 5)

□

Proposició 5.4.9. $\mathbf{K} \vdash \Diamond(A \vee B) \rightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B)$.

Demostració. La prova és la següent.

1. $\mathbf{K} \vdash \neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \vee B))$ (TAUT)
2. $\mathbf{K} \vdash \Box \neg A \rightarrow (\Box \neg B \rightarrow \Box \neg(A \vee B))$ (RK)
3. $\mathbf{K} \vdash \Box \neg A \rightarrow (\neg \Box \neg(A \vee B) \rightarrow \neg \Box \neg B)$ (PL, 2)
4. $\mathbf{K} \vdash \neg \Box \neg(A \vee B) \rightarrow (\Box \neg A \rightarrow \neg \Box \neg B)$ (PL, 3)
5. $\mathbf{K} \vdash \neg \Box \neg(A \vee B) \rightarrow (\neg \neg \Box \neg B \rightarrow \neg \Box \neg A)$ (PL, 4)
6. $\mathbf{K} \vdash \Diamond(A \vee B) \rightarrow (\neg \Diamond B \rightarrow \Diamond A)$ ($\Diamond$ per $\neg \Box \neg$)
7. $\mathbf{K} \vdash \Diamond(A \vee B) \rightarrow (\Diamond B \vee \Diamond A)$ (PL, 6)

□

Proposició 5.4.10. $\mathbf{K} \vdash \Box A \rightarrow (\Diamond(A \rightarrow B) \rightarrow \Diamond B)$.

Demostració. La prova és la següent.

1. $\mathbf{K} \vdash A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$ (TAUT)
2. $\mathbf{K} \vdash \Box A \rightarrow (\Box \neg B \rightarrow \Box \neg(A \rightarrow B))$ (RK, 1)
3. $\mathbf{K} \vdash \Box A \rightarrow (\neg \Box \neg(A \rightarrow B) \rightarrow \neg \Box \neg B)$ (PL, 2)
4. $\mathbf{K} \vdash \Box A \rightarrow (\Diamond(A \rightarrow B) \rightarrow \Diamond B)$ ($\Diamond$ per $\neg \Box \neg$)

□

5.5 Demostracions en sistemes modals

En aquesta secció farem algunes proves en altres sistemes modals diferents a $\mathbf{K}$.

Però abans, necessitem una definició prèvia per facilitar les demostracions. Recordem que les definicions de (D), (T), (B), (4) i (5) estan en la Taula 4.1.

Definició 5.5.1. Cada una de les fórmules (T), (B), (4) i (5) té un (DUAL), denotat amb un subíndex en forma de diamant, de la manera següent

$$\begin{array}{ll}
p \rightarrow \Diamond p & (T_{\Diamond}) \\
\Diamond \Box p \rightarrow p & (B_{\Diamond}) \\
\Diamond \Diamond p \rightarrow \Diamond p & (4_{\Diamond}) \\
\Diamond \Box p \rightarrow \Box p & (5_{\Diamond})
\end{array}$$

Proposició 5.5.1. *Es compleix $\mathbf{KT5} \vdash (B)$.*

Demostració. La prova és la següent.

1. $\mathbf{KT5} \vdash A \rightarrow \Diamond A$ $(T_{\Diamond})$
2. $\mathbf{KT5} \vdash \Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A$ (5)
3. $\mathbf{KT5} \vdash A \rightarrow \Box \Diamond A$ $(\text{PL } 1,2)$

Així, $\mathbf{KT5} \vdash A \rightarrow \Box \Diamond A (= B)$. □

Proposició 5.5.2. *Es compleix $\mathbf{KT5} \vdash (4)$.*

Demostració. La prova és la següent.

1. $\mathbf{KT5} \vdash \Box A \rightarrow \Diamond \Box A$ $(T_{\Diamond} \text{ amb } \Box A \text{ per } p)$
2. $\mathbf{KT5} \vdash \Diamond \Box A \rightarrow \Box \Diamond \Box A$ $(5 \text{ amb } \Box A \text{ per } p)$
3. $\mathbf{KT5} \vdash \Box A \rightarrow \Box \Diamond \Box A$ $(\text{PL } 1,2)$
4. $\mathbf{KT5} \vdash \Diamond \Box A \rightarrow \Box A$ $(5_{\Diamond})$
5. $\mathbf{KT5} \vdash \Box \Diamond \Box A \rightarrow \Box \Box A$ $(\text{RK}, 4)$
6. $\mathbf{KT5} \vdash \Box A \rightarrow \Box \Box A$ $(\text{PL } 3, 5)$

Així, $\mathbf{KT5} \vdash \Box A \rightarrow \Box \Box A (= 4)$. □

Proposició 5.5.3. *Es compleix $\mathbf{KDB4} \vdash (T)$.*

Demostració. La prova és la següent.

1. $\mathbf{KDB4} \vdash \Box \Box A \rightarrow \Diamond \Box A$ $(D \text{ amb } \Box A \text{ per } p)$
2. $\mathbf{KDB4} \vdash \Diamond \Box A \rightarrow A$ $(B_{\Diamond})$
3. $\mathbf{KDB4} \vdash \Box \Box A \rightarrow A$ $(\text{PL } 1,2)$
4. $\mathbf{KDB4} \vdash \Box A \rightarrow \Box \Box A$ (4)
5. $\mathbf{KDB4} \vdash \Box A \rightarrow A$ $(\text{PL } 3,4)$

Així, $\mathbf{KDB4} \vdash \Box A \rightarrow A (= T)$. □

Proposició 5.5.4. *Es compleix $\mathbf{KB4} \vdash (5)$.*

Demostració. La prova és la següent.

1. **KB4** $\vdash \Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A$ (B amb $\Diamond A$ per p)
2. **KB4** $\vdash \Diamond \Diamond A \rightarrow \Diamond A$ ($4_\Diamond$)
3. **KB4** $\vdash \Box \Diamond \Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A$ (RK, 2)
4. **KB4** $\vdash \Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A$ (PL 1,3)

Així, **KB4** $\vdash \Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A$ ($= 5$).

□

Proposició 5.5.5. *Es compleix **KB5** $\vdash (4)$.*

Demostració. La prova és la següent.

1. **KB5** $\vdash \Box A \rightarrow \Box \Diamond \Box A$ (B amb $\Box A$ per p)
2. **KB5** $\vdash \Diamond \Box A \rightarrow \Box A$ ($5_\Diamond$)
3. **KB5** $\vdash \Box \Diamond \Box A \rightarrow \Box \Box A$ (RK, 2)
4. **KB5** $\vdash \Box A \rightarrow \Box \Box A$ (PL 1,3)

Així, **KB5** $\vdash \Box A \rightarrow \Box \Box A$ ($= 4$).

□

Proposició 5.5.6. *Es compleix **KT** $\vdash (D)$.*

Demostració. La prova és la següent.

1. **KT** $\vdash \Box A \rightarrow A$ (T)
2. **KT** $\vdash A \rightarrow \Diamond A$ ($T_\Diamond$)
3. **KT** $\vdash \Box A \rightarrow \Diamond A$ (PL 1,2)

Així, **KT** $\vdash \Box A \rightarrow \Diamond A$ ($= D$).

□

5.6 Validesa

Un sistema de derivació es diu correcte si tot allò que es pot demostrar és vàlid. Quan considerem sistemes modals, és a dir, demostracions on a més de K podem utilitzar instàncies d'algunes fórmules $A_1, \dots, A_n$, volem que tota fórmula demostrable siga vertadera en qual-sevol model en què $A_1, \dots, A_n$ siguin vertaderes.

Teorema 5.6.1. *(Teorema de correcció). Si cada instància de $A_1, \dots, A_n$ és vàlida en les classes de models $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$, respectivament, aleshores $\mathbf{K}A_1 \dots A_n \vdash B$ implica que B és vàlida en la classe de models $\mathcal{C}_1 \cap \dots \cap \mathcal{C}_n$.*

Demostració. Fem aquesta prova per inducció sobre la longitud de les demostracions. Per facilitar la notació, posem

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cap \dots \cap \mathcal{C}_n.$$

Cas base: Si B té una demostració de longitud 1, aleshores ha de ser una instància tautològica, una instància de (K), o de (DUAL), o una instància d'alguna d' $A_1, \dots, A_n$.

Si B és una instància tautològica, aleshores B és vàlida en $\mathcal{C}$, ja que pel Corol·lari 3.4.1 sabem que les instàncies tautològiques són vàlides en qualsevol classe de models.

De manera similar, si B és una instància de (K) o de (DUAL), per la Proposició 3.5.1 i la Proposició 3.5.2, respectivament, també sabem que són vàlides en qualsevol classe de models.

Finalment, en cas que siga una instància d'alguna d' $A_1, \dots, A_n$, com que B és vàlida en $\mathcal{C}_i$ i $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_i$, tenim que B és vàlida en $\mathcal{C}$ també.

Hipòtesi inductiva: Suposem que B té una demostració de longitud $k > 1$, i ho provem per a una demostració de longitud $k + 1$.

Distingim casos: Si B és una instància tautològica o una instància d'alguna d' $A_1, \dots, A_n$, procedim com en el cas anterior.

Per tant, suposem primer que B s'obté per (MP) a partir de les fórmules anteriors $C \rightarrow B$ i C . Aleshores, $C \rightarrow B$ i C tenen proves de longitud menor que k , i per la hipòtesi inductiva són vàlides en $\mathcal{C}$. Així, per la Proposició 3.5.3, tenim que B també és vàlida en $\mathcal{C}$.

Finalment, suposem que B s'obté per (NEC) a partir de C , és a dir, $B = \Box C$. Per la hipòtesi inductiva, C és vàlida en $\mathcal{C}$, i per la Proposició 3.4.5 també ho és B .

Per tant, queda provat que per a qualsevol dels casos B és vàlida en $\mathcal{C}$, com volíem vore. $\square$

Abans de començar la següent secció introduïm un parell de definicions que ens seran útils.

Definició 5.6.1. (Fórmula demostrable en un sistema). Una fórmula A és demostrable en un sistema Σ a partir d'un conjunt de fórmules Γ , i s'escriu $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$, si, i només si, existeixen $B_1, \dots, B_n \in \Gamma$ tals que $\Sigma \vdash B_1 \rightarrow (B_2 \rightarrow \dots (B_n \rightarrow A) \dots)$.

Definició 5.6.2. (Conjunt deductivament tancat). Un conjunt Γ és deductivament tancat, o tancat per deducció, en un sistema Σ si, i només si, $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$ implica que $A \in \Gamma$.

5.7 Consistència

La consistència és una propietat clau dels conjunts de fórmules. Un conjunt és inconsistent si es pot obtenir una contradicció (per exemple, $\perp$), en cas contrari, és consistent. Si un conjunt és inconsistent, les seues fórmules no poden ser totes certes en un model.

Definició 5.7.1. (Consistent). Un conjunt Γ és consistent per a un sistema Σ si $\Gamma \not\vdash_{\Sigma} \perp$.

Exemple 5.7.1. El conjunt $\Gamma = \{\Box(p \rightarrow q), \Box p, \neg\Box q\}$ no és **K**-consistent. Anem a vore-ho.

1. $\Box(p \rightarrow q)$	$(\in \Gamma)$
2. $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$	(K)
3. $\Box p \rightarrow \Box q$	(MP 1,2)
4. $\Box p$	$(\in \Gamma)$
5. $\Box q$	(MP 3,4)
6. $\neg\Box q$	$(\in \Gamma)$
7. $\perp$	(per 5 i 6)

Abans d'enunciar la proposició de consistència, necessitem uns enunciats previs per poder demostrar-la posteriorment.

Teorema 5.7.1. $\Gamma \vdash_{\Sigma} A \rightarrow B$ si, i només si, $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\Sigma} B$.

Demostració. Sabem que $\Gamma \vdash_{\Sigma} A \rightarrow B$ si, i només si, $\vdash_{\Sigma} (A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow (A \rightarrow B)$ per a algú $\{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \Gamma$.

És a dir, $\vdash_{\Sigma} (A_1 \wedge \dots \wedge A_n \wedge A) \rightarrow B$ per a algú $\{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \Gamma$.

En altres paraules, $\vdash_{\Sigma} (A_1 \wedge \dots \wedge A_n \wedge A) \rightarrow B$ per a algú $\{A_1, \dots, A_n, A\} \subseteq \Gamma \cup \{A\}$, si, i només si, $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\Sigma} B$. $\square$

Nota 5.7.1. Suposem que $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$. Aleshores, per a tota fórmula B , es té que

$$\Gamma \vdash_{\Sigma} B \text{ si, i només si, } \Gamma \cup \{A\} \vdash_{\Sigma} B.$$

Anem a vore-ho. La implicació d'esquerra a dreta és clara. Per a l'altra implicació, suposem que $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\Sigma} B$. Pel Teorema 5.7.1, $\Gamma \vdash_{\Sigma} A \rightarrow B$. Com per hipòtesi es té $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$, per modus ponens es compleix que $\Gamma \vdash_{\Sigma} B$.

Proposició 5.7.1. Siga Γ un conjunt de fórmules. Aleshores

1. Γ és Σ -consistent si, i només si, existeix una fórmula A tal que $\Gamma \not\vdash_{\Sigma} A$.
2. $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$ si, i només si, $\Gamma \cup \{\neg A\}$ no és Σ -consistent.
3. Si Γ és Σ -consistent, aleshores per a tota fórmula A , $\Gamma \cup \{A\}$ és Σ -consistent o $\Gamma \cup \{\neg A\}$ és Σ -consistent.

Demostració. 1. Per una part, suposem que Γ és Σ -consistent. Aleshores per a $A \equiv \perp$ es té que $\Gamma \not\vdash_{\Sigma} \perp$. Provem l'altra implicació per contrarrecíproc. Suposem que Γ no és Σ -consistent. Aleshores, $\Gamma \vdash_{\Sigma} \perp$. Notem que, per a tota fórmula A , $\perp \rightarrow A$ és una tautologia, en ser $\perp$ fals. Aleshores $\Gamma \vdash_{\Sigma} \perp \rightarrow A$. Per tant, per modus ponens, $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$.

2. Supposem primer que $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$, volem demostrar que $\Gamma \cup \{\neg A\}$ no és consistent. Com $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$, aleshores $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash_{\Sigma} A$. A més, $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash_{\Sigma} \neg A$. Per modus ponens, tenint en compte que $\neg A$ és equivalent a $(A \rightarrow \perp)$, arribem a que $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash_{\Sigma} \perp$. Supposem ara que $\Gamma \cup \{\neg A\}$ és inconsistent, és a dir, $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash_{\Sigma} \perp$. Pel Teorema 5.7.1, $\Gamma \vdash_{\Sigma} \neg A \rightarrow \perp \equiv \neg \neg A \equiv A$.
3. Supposem que Γ és Σ -consistent. Siga A una fórmula. Supposem que $\Gamma \cup \{\neg A\}$ no és Σ -consistent. Per 2, tenim que $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$. Anem a demostrar que $\Gamma \cup \{A\}$ és Σ -consistent. Per la Nota 5.7.1, com tenim $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$, sabem que $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\Sigma} \perp$ si, i només si, $\Gamma \vdash_{\Sigma} \perp$. Per tant, $\Gamma \cup \{A\} \nvdash_{\Sigma} \perp$ si, i només si, $\Gamma \nvdash_{\Sigma} \perp$. Així, com Γ és Σ -consistent, $\Gamma \nvdash_{\Sigma} \perp$, i per tant, $\Gamma \cup \{A\} \nvdash_{\Sigma} \perp$. És a dir, $\Gamma \cup \{A\}$ és Σ -consistent, com volíem vore. □

Capítol 6

Completesa i models canònics

El teorema de correcció, com vam veure en el capítol anterior, estableix que si una fórmula A és demostrable en un sistema modal Σ , aleshores A és vàlida en tots els models en què totes les fórmules de Σ són vàlides.

La completesa és la implicació inversa de la correcció: un sistema modal Σ és complet si tota fórmula vàlida en els models del sistema és demostrable. Demostrar la correcció és relativament senzill, però la completesa és més complexa i requereix la construcció d'un model molt específic.

Per demostrar la completesa, s'adopta una estratègia basada en la construcció de contramodels: si una fórmula A no és demostrable, aleshores ha d'existir un model en què A siga falsa. Això es formalitza a través del concepte de Σ -consistència, que garanteix l'existència d'un model per a tota fórmula A que siga Σ -consistent.

El pas clau en la construcció del model és considerar conjunts Σ -consistents complets, que contenen totes les fórmules necessàries per definir correctament la relació d'accessibilitat entre mons. El resultat final és el model canònic, un model general que garanteix que tota fórmula Σ -consistent és certa en algun món. Això prova la completesa del sistema Σ , assegurant que qualsevol fórmula vàlida en els models és també demostrable dins del sistema modal.

6.1 Conjunts Σ -consistents complets

En les següents seccions construirem un “model canònic” on cada món correspon a un conjunt Σ -consistent particular. No només ha de ser Σ -consistent, sinó també complet, de manera que per a qualsevol fórmula modal A , el conjunt ha d'incloure A o la seua negació $\neg A$, assegurant així que per a cada fórmula modal es determina si és vertadera o falsa.

Definició 6.1.1. Un conjunt Γ és Σ -consistent complet si

1. Γ és Σ -consistent.

2. Per a tota fórmula A es té que $A \in \Gamma$ o $\neg A \in \Gamma$.

Els conjunts Σ -consistents complets tenen diverses propietats útils, que introduïm a continuació, ja que seran importants quan definim el model canònic.

Proposició 6.1.1. *Si Γ és Σ -consistent complet, aleshores*

1. Γ és tancat per a deduccions en Σ (és a dir, si $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$, aleshores $A \in \Gamma$).
2. $\Sigma \in \Gamma$.
3. $\perp \notin \Gamma$.
4. $\neg A \in \Gamma$ si, i només si, $A \notin \Gamma$.
5. $A \wedge B \in \Gamma$ si, i només si, $A \in \Gamma$ i $B \in \Gamma$.
6. $A \vee B \in \Gamma$ si, i només si, $A \in \Gamma$ o $B \in \Gamma$.
7. $A \rightarrow B \in \Gamma$ si, i només si, $A \notin \Gamma$ o $B \in \Gamma$.

Demostració. 1. Suposem que $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$. Com Γ és complet, $A \in \Gamma$ o $\neg A \in \Gamma$. Si $\neg A \in \Gamma$, aleshores $\Gamma \vdash_{\Sigma} \perp$, que és una contradicció perquè Γ és Σ -consistent. Per tant, $A \in \Gamma$.

2. Siga $A \in \Sigma$, es té que $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$. Per 1, $A \in \Gamma$. Per tant, $\Sigma \in \Gamma$.

3. Suposem per reducció a l'absurd que $\perp \in \Gamma$. Aleshores $\Gamma \vdash_{\Sigma} \perp$.

4. Suposem que $\neg A \in \Gamma$. Si suposem que $A \in \Gamma$, aleshores $\Gamma \vdash_{\Sigma} \perp$, que és una contradicció perquè Γ és Σ -consistent. Per tant, $A \notin \Gamma$.

Suposem ara que $A \notin \Gamma$. Com Γ és complet, tindrem $A \in \Gamma$ o $\neg A \in \Gamma$. Però com $A \notin \Gamma$, tenim $\neg A \in \Gamma$.

5. Suposem que $A \wedge B \in \Gamma$. Anem a veure que $A \wedge B \rightarrow A$ és una tautologia. Ho vegem en la següent taula de veritat:

A	B	$A \wedge B$	$A \wedge B \rightarrow A$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Per tant,

$$\frac{\frac{A \wedge B \quad (\in \Gamma)}{A \wedge B \rightarrow A \quad (\text{TAUT})}}{A \quad (\text{MP})}$$

Aleshores, $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$. Per tant, per 1 tenim $A \in \Gamma$.

Anàlogament, arribem a que $B \in \Gamma$.

Suposem ara que $A, B \in \Gamma$. Anem a vore que $A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$ és una tautologia. Ho vegem en la següent taula de veritat:

A	B	$A \wedge B$	$B \rightarrow A \wedge B$	$A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$
0	0	0	1	1
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Per tant,

$$\frac{\frac{\frac{A \quad (\in \Gamma)}{A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B) \quad (\text{TAUT})}}{B \rightarrow A \wedge B \quad (\text{MP})}}{B \quad (\in \Gamma)} \quad (\text{MP})$$

Aleshores, $\Gamma \vdash_{\Sigma} A \wedge B$. Per tant, per 1 tenim $A \wedge B \in \Gamma$.

6. Suposem que $A \vee B \in \Gamma$. Suposem sense pèrdua de generalitat que $A \notin \Gamma$, aleshores, per 4 $\neg A \in \Gamma$. Anem a vore que $\neg A \rightarrow (A \vee B \rightarrow B)$ és una tautologia. Ho vegem en la següent taula de veritat:

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	$A \vee B \rightarrow B$	$\neg A \rightarrow (A \vee B \rightarrow B)$
0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1
1	1	0	1	1	1

Per tant,

$$\begin{array}{c}
\neg A \quad (\in \Gamma) \\
\neg A \rightarrow (A \vee B \rightarrow B) \quad (\text{TAUT}) \\
\hline
(A \vee B \rightarrow B) \quad (\text{MP}) \\
A \vee B \quad (\in \Gamma) \\
\hline
B \quad (\text{MP})
\end{array}$$

Aleshores, $\Gamma \vdash_{\Sigma} B$. Per tant, per 1 tenim $B \in \Gamma$.

Suposem ara que $A \in \Gamma$ o $B \in \Gamma$. Distingim dos casos.

- (a) Si $A \in \Gamma$. Anem a vore que $A \rightarrow (A \vee B)$ és una tautologia.

A	B	$A \vee B$	$A \rightarrow A \vee B$
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Per tant,

$$\begin{array}{c}
A \quad (\in \Gamma) \\
A \rightarrow (A \vee B) \quad (\text{TAUT}) \\
\hline
A \vee B \quad (\text{MP})
\end{array}$$

Aleshores, $\Gamma \vdash_{\Sigma} A \vee B$. Per tant, per 1 tenim $A \vee B \in \Gamma$.

- (b) Si $B \in \Gamma$. De manera anàloga, $A \vee B \in \Gamma$.

7. Suposem que $A \rightarrow B \in \Gamma$. Suposem que $A \in \Gamma$. Volem vore que $B \in \Gamma$. Tenim

$$\begin{array}{c}
A \quad (\in \Gamma) \\
A \rightarrow B \quad (\in \Gamma) \\
\hline
B \quad (\text{MP})
\end{array}$$

Aleshores, $\Gamma \vdash_{\Sigma} B$. Per tant, per 1 tenim $B \in \Gamma$.

Suposem ara que $A \notin \Gamma$ o $B \in \Gamma$. Distingim dos casos.

- (a) Si $A \notin \Gamma$, per 4 sabem que $\neg A \in \Gamma$. Així, vejam que $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ és una tautologia.

A	B	$\neg A$	$A \rightarrow B$	$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

Per tant,

$$\frac{\begin{array}{c} \neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \quad (\text{TAUT}) \\ \neg A \quad (\in \Gamma) \end{array}}{A \rightarrow B} \quad (\text{MP})$$

Aleshores, $\Gamma \vdash_{\Sigma} A \rightarrow B$. Per tant, per 1 tenim $A \rightarrow B \in \Gamma$.

(b) Si $B \in \Gamma$, vejam que $B \rightarrow (A \rightarrow B)$ és una tautologia.

A	B	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow (A \rightarrow B)$
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Per tant,

$$\frac{\begin{array}{c} B \rightarrow (A \rightarrow B) \quad (\text{TAUT}) \\ B \quad (\in \Gamma) \end{array}}{A \rightarrow B} \quad (\text{MP})$$

Aleshores, $\Gamma \vdash_{\Sigma} A \rightarrow B$. Per tant, per 1 tenim $A \rightarrow B \in \Gamma$.

□

El Lema de Lindenbaum, que vorem a continuació, garanteix que qualsevol conjunt Σ -consistent de fórmules està contingut en almenys un conjunt Σ -consistent complet. Això ens assegura que en el model canònic hi haurà un món on cada conjunt Σ -consistent siga cert, garantint així la completesa del sistema. Com vorem, la demostració del Lema de Lindenbaum requereix el Lema de Zorn-Kuratowski.

Lema 6.1.1. (*Lema de Lindenbaum*). *Si Γ és Σ -consistent, existeix un conjunt Σ -consistent complet Δ tal que $\Gamma \subseteq \Delta$.*

Demostració. Considerem el conjunt

$$\text{Ext}(\Gamma) = \{\Omega \subseteq \text{Form} : \Gamma \subseteq \Omega \text{ i } \Omega \text{ és } \Sigma\text{-consistent}\}.$$

Notem que $\text{Ext}(\Gamma) \neq \emptyset$ ja que $\Gamma \in \text{Ext}(\Gamma)$. Ordenem $\text{Ext}(\Gamma)$ per inclusió. Tenim que $(\text{Ext}(\Gamma), \subseteq)$ és un conjunt parcialment ordenat no buit.

Demostrem primer que tota cadena no buida en $(\text{Ext}(\Gamma), \subseteq)$ té suprem. Siga $\mathcal{C}$ una cadena no buida en $\text{Ext}(\Gamma)$. Suposem que $\mathcal{C}$ és de la forma $\mathcal{C} = \{\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_p, \dots\}$.

Anem a vore que $\mathcal{C}$ té suprem. Considerem l'element

$$\bigcup \mathcal{C} = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C.$$

Per una part, vejam que $\bigcup \mathcal{C} \in \text{Ext}(\Gamma)$. Primer notem que com $\mathcal{C}$ no és buida, existeix un Ω en $\mathcal{C}$. A més, $\Omega \subseteq \bigcup \mathcal{C}$. Com $\Omega \in \text{Ext}(\Gamma)$, aleshores $\Gamma \subseteq \Omega$. Així,

$$\Gamma \subseteq \bigcup \mathcal{C}.$$

Ara anem a demostrar que $\bigcup \mathcal{C}$ és Σ -consistent. Suposem, per reducció a l'absurd, que $\bigcup \mathcal{C} \vdash_{\Sigma} \perp$. Aleshores existeix una demostració amb un nombre finit de passos que permet arribar a $\perp$. En cadascun dels passos podem utilitzar *Modus Ponens*, tautologies, o elements que estiguen en algun $\Omega_i \in \mathcal{C}$. Per als passos en què es gaste que la fórmula prové d'un $\Omega_i \in \mathcal{C}$, com tenim que $\mathcal{C}$ és una cadena, sabem que totes les vegades que una fórmula provinga dels axiomes, tots estos estaran en un Ω_p concret. Així, la demostració de que $\bigcup \mathcal{C} \vdash_{\Sigma} \perp$ duu a que $\Omega_p \vdash_{\Sigma} \perp$. Però com $\Omega_p \in \text{Ext}(\Gamma)$, aleshores Ω_p és Σ -consistent, cosa que contradiu a $\Omega_p \vdash_{\Sigma} \perp$. Per tant, $\bigcup \mathcal{C} \not\vdash_{\Sigma} \perp$ i tenim que és Σ -consistent. Amb açò, ja tenim que

$$\bigcup \mathcal{C} \in \text{Ext}(\Gamma).$$

Per altra part, tenim que $\bigcup \mathcal{C}$ és suprem de $\mathcal{C}$. Notem que si $\Omega \in \mathcal{C}$, com $\bigcup \mathcal{C}$ és fita superior de $\mathcal{C}$, aleshores $\Omega \subseteq \bigcup \mathcal{C}$. Ara, si suposem que Θ és fita superior de $\mathcal{C}$, tenim que $\Omega \subseteq \Theta$ per a tot $\Omega \in \mathcal{C}$. Aleshores

$$\bigcup \mathcal{C} \subseteq \Theta.$$

Pel lema de Zorn-Kuratowski, $\text{Ext}(\Gamma)$ té un element maximal, anomenem-lo Δ . Així, $\Gamma \subseteq \Delta$ i Δ és Σ -consistent.

Per últim, anem a vore que Δ és complet. Siga A una fórmula. Suposem que $\neg A \notin \Delta$. Aleshores $\Delta \cup \{\neg A\}$ és un superconjunt estricte de Δ . Per la maximalitat de Δ , $\Delta \cup \{\neg A\}$ no pot ser consistent. Per tant, per la Proposició 5.7.1, $\Delta \vdash_{\Sigma} A$.

Considerem el conjunt $\Delta \cup \{A\}$. Per una part, tenim que $\Gamma \subseteq \Delta \subseteq \Delta \cup \{A\}$. Així, $\Delta \cup \{A\}$ és extensió de Γ .

Per altra part, tenim que $\Delta \cup \{A\}$ és Σ -consistent. Suposem per reducció a l'absurd que no ho fóra. Tindriem $\Delta \cup \{A\} \vdash_{\Sigma} \perp$. Així, existeix una seqüència de fórmules $A_1, \dots, A_n$

en $\Delta \cup \{A\}$ per a les què $\Delta \vdash_{\Sigma} (A_1 \wedge \dots \wedge A_n)$. Com hem vist abans, $\Delta \vdash_{\Sigma} A$, per tant, si A estiguera en aquesta seqüència sempre es podria reemplaçar per la demostració en Δ de A . Així, podem pensar que totes les fórmules venen de Δ . És a dir, $\Delta \vdash_{\Sigma} \perp$, que és una contradicció en ser Δ Σ -consistent.

Per últim, com A és maximal, aleshores

$$\Delta \subseteq \Delta \cup \{A\} \subseteq \Delta,$$

és a dir, $\Delta = \Delta \cup \{A\}$. Per tant, $\neg A \in \Delta$. Així, Δ és complet. $\square$

Corol·lari 6.1.1. $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$ si, i només si, $A \in \Delta$ per a cada conjunt Σ -consistent complet Δ que extén a Γ (incloent el cas en què $\Gamma = \emptyset$, amb la qual cosa obtenim una altra caracterització del sistema modal Σ).

Demostració. Suposem primer que

$$\Gamma \vdash_{\Sigma} A \text{ i } \Gamma \subseteq \Delta,$$

on Δ és Σ -consistent completa. Aleshores per monotonia es té que $\Delta \vdash A$. A més, com Δ és tancat per deducció, tenim que $A \in \Delta$.

Suposem ara que

$$A \in \Delta,$$

per a tota extensió Δ Σ -consistent completa de Γ . Per reducció a l'absurd, suposem que $\Gamma \not\vdash_{\Sigma} A$. Per la Proposició 5.7.1 sabem que $\Gamma \cup \{\neg A\}$ és Σ -consistent.

Ara, pel Lema de Lindenbaum considerem una extensió completa Σ -consistent de $\Gamma \cup \{\neg A\}$, i anomenem-la Θ . Notem que $\neg A \in \Theta$. També es té que Θ és una extensió completa Σ -consistent de Γ . Per hipòtesi, $A \in \Theta$. Així,

$$A \in \Theta \text{ i } \neg A \in \Theta.$$

Aleshores, arribem a que Θ no és consistent, que es una contradicció. Per tant, $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$, com volíem. $\square$

6.2 Modalitats i conjunts complets consistents

En aquesta secció, analitzarem diverses propietats d'operacions sobre conjunts de fórmules en lògica modal, com ara $\Box$ i $\Diamond$ aplicades a un conjunt de fórmules Γ , així com les seues versions inverses. Es presentaran resultats sobre la demostració de fórmules a partir d'aquests conjunts i es discutiran les relacions entre consistència, completesa i les operacions modals en sistemes lògics.

Primerament introduïrem un poc de notació que emprarem més endavant.

Definició 6.2.1. Siga Γ un conjunt de fórmules. Definim

$$\begin{aligned}\Box\Gamma &= \{\Box B : B \in \Gamma\} & \Diamond\Gamma &= \{\Diamond B : B \in \Gamma\} \\ \Box^{-1}\Gamma &= \{B : \Box B \in \Gamma\} & \Diamond^{-1}\Gamma &= \{B : \Diamond B \in \Gamma\}\end{aligned}$$

Nota 6.2.1. Cal notar que $\Box\Box^{-1}\Gamma \subseteq \Gamma$, ja que $\Box\Box^{-1}\Gamma = \{\Box B : \Box B \in \Gamma\}$.

Els següents lemes ens seran d'utilitat per a la construcció del model canònic.

Lema 6.2.1. Si $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$, aleshores $\Box\Gamma \vdash_{\Sigma} \Box A$.

Demostració. Siga A una fórmula. Suposem que $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$, aleshores existeixen fórmules $B_1, \dots, B_k \in \Gamma$ tals que $\Sigma \vdash B_1 \rightarrow (B_2 \rightarrow \dots (B_n \rightarrow A) \dots)$. Ara, com Σ és normal, per la regla (RK) es té que

$$\Sigma \vdash \Box B_1 \rightarrow (\Box B_2 \rightarrow \dots (\Box B_n \rightarrow \Box A) \dots),$$

on $\Box B_1, \dots, \Box B_k \in \Box\Gamma$. Per tant, per definició es té

$$\Box\Gamma \vdash_{\Sigma} \Box A,$$

com volíem demostrar. □

Lema 6.2.2. Si $\Box^{-1}\Gamma \vdash_{\Sigma} A$, aleshores $\Gamma \vdash_{\Sigma} \Box A$.

Demostració. Siga A una fórmula. Suposem que $\Box^{-1}\Gamma \vdash_{\Sigma} A$. Aleshores pel Lema 6.2.1, es té

$$\Box\Box^{-1}\Gamma \vdash_{\Sigma} \Box A.$$

Per altra part, per la Nota 6.2.1 sabem que

$$\Box\Box^{-1}\Gamma \subseteq \Gamma.$$

Així, per monotonía es té $\Gamma \vdash_{\Sigma} \Box A$, com volíem. □

Proposició 6.2.1. Si Γ és Σ -consistent complet, aleshores $\Box A \in \Gamma$ si, i només si, per a tot conjunt Σ -consistent complet Δ tal que $\Box^{-1}\Gamma \subseteq \Delta$, es té que $A \in \Delta$.

Demostració. Suposem primer que

$$\Box A \in \Gamma.$$

Siga Δ un conjunt Σ -consistent complet tal que $\Box^{-1}\Gamma \subseteq \Delta$. Com $\Box A \in \Gamma$, aleshores $A \in \Box^{-1}\Gamma \subseteq \Delta$. És a dir, $A \in \Delta$, com volíem.

Demostrem l'altra implicació per contrarrecíproc. Suposem que

$$\Box A \notin \Gamma.$$

Volem arribar a que $A \notin \Delta$. Com Γ és complet, és deductivament tancat. Per tant, com $\Box A \notin \Gamma$, deduïm que $\Gamma \not\vdash_{\Sigma} \Box A$. Ara, pel Lema 6.2.2 es té que $\Box^{-1}\Gamma \not\vdash_{\Sigma} A$. A més, per la Proposició 5.7.1 sabem que $\Box^{-1}\Gamma \cup \{\neg A\}$ és Σ -consistent. Per últim, pel Lema de Lindenbaum podem afirmar que existeix un conjunt Σ -consistent complet Δ extenent $\Box^{-1}\Gamma \cup \{\neg A\}$. Aleshores, $\Box^{-1}\Gamma \cup \{\neg A\} \subseteq \Delta$, i per consistència concloem que $A \notin \Delta$, com volíem veure. $\square$

Lema 6.2.3. *Suposem que Γ i Δ són complets i Σ -consistents. Aleshores, $\Box^{-1}\Gamma \subseteq \Delta$ si, i només si, $\Diamond\Delta \subseteq \Gamma$.*

Demostració. Suposem primer que

$$\Box^{-1}\Gamma \subseteq \Delta.$$

Considerem $\Diamond A \in \Diamond\Delta$ per a algun $A \in \Delta$. Per a demostrar que $\Diamond A \in \Gamma$ és suficient demostrar que

$$\Box\neg A \notin \Gamma,$$

per completesa (tenint en compte (DUAL) i $\neg\neg A \equiv A$).

Suposem per reducció a l'absurd que $\Box\neg A \in \Gamma$. Així, $\neg A \in \Box^{-1}\Gamma \subseteq \Delta$. Per tant, $A \in \Delta$ i $\neg A \in \Delta$, que és una contradicció perquè Δ és Σ -consistent. Aleshores, $\Box\neg A \notin \Gamma$, com volíem vore.

Suposem ara que

$$\Diamond\Delta \subseteq \Gamma.$$

Volem vore que $\Box^{-1}\Gamma \subseteq \Delta$. Ho provem per contrarrecíproc. Siga A una fórmula tal que $A \notin \Delta$. Volem demostrar que $A \notin \Box^{-1}\Gamma$, o el que és el mateix,

$$\Box A \notin \Gamma.$$

Si $A \notin \Delta$, per maximalitat, $\neg A \in \Delta$. Com $\Diamond\Delta \subseteq \Gamma$, es té que $\Diamond\neg A \in \Gamma$. Ara, en una lògica modal normal, $\Diamond\neg A$ és equivalent a $\neg\Box A$, per (DUAL). Així, $\neg\Box A \in \Gamma$. Finalment, per consistència de Γ , obtenim que $\Box A \notin \Gamma$, com volíem. $\square$

Proposició 6.2.2. *Si Γ és complet i Σ -consistent, aleshores $\Diamond A \in \Gamma$ si, i només si, per a algun conjunt complet Σ -consistent Δ tal que $\Diamond\Delta \subseteq \Gamma$, es té que $A \in \Delta$.*

Demostració. Suposem que Γ és complet i Σ -consistent i $\Diamond A \in \Gamma$. Aleshores, es té que $\neg\Box\neg A \in \Gamma$ per (DUAL) i per estar tancat per deducció.

Per la Proposició 6.1.1, apartat 4, es té que $\Box\neg A \notin \Gamma$. I per la Proposició 6.2.1 açò es té si, i només si, existeix algun conjunt complet Σ -consistent Δ amb $\Box^{-1}\Gamma \subseteq \Delta$ tal que $\neg A \notin \Delta$.

Siga Δ un d'aquests conjunts, és a dir, Δ és Σ -consistent complet. Pel Lema 6.2.3 sabem que $\Box^{-1}\Gamma \subseteq \Delta$ si, i només si, $\Diamond\Delta \subseteq \Gamma$. A més, per la Proposició 6.1.1, es té que

$$\neg A \notin \Delta \text{ si, i només si, } A \in \Delta,$$

com volíem demostrar.

Emprant els mateixos arguments en sentit contrari es té l'altra implicació.

Per tant, hem provat que $\Diamond A \in \Gamma$ si, i només si, existeix un conjunt complet Σ -consistent Δ tal que $\Diamond \Delta \subseteq \Gamma$ i $A \in \Delta$. $\square$

6.3 El model canònic i el Lema de Veritat

El model canònic per a un sistema modal Σ és un model específic M^Σ en el qual els mons són tots els conjunts Σ -consistents complets. La seua relació d'accessibilitat R^Σ i la seua valoració V^Σ es defineixen de manera que garantisquen que les fórmules vertaderes en un món Δ són exactament les fórmules que conformen Δ . A continuació definim aquest concepte de manera rigorosa.

Definició 6.3.1. (Model canònic). Siga Σ una lògica modal normal. El model canònic per a Σ es defineix com

$$M^\Sigma = (W^\Sigma, R^\Sigma, V^\Sigma),$$

on

- $W^\Sigma = \{\Delta : \Delta \text{ és complet i } \Sigma\text{-consistent}\}$
- $(\Delta, \Delta') \in R^\Sigma$ si, i només si, $\Box^{-1}\Delta \subseteq \Delta'$.
- $V^\Sigma(p) = \{\Delta : p \in \Delta\}$.

El següent resultat, conegut com a Lema de Veritat, ens assegura que en el model canònic la veritat d'una fórmula en un món coincideix exactament amb la seua pertinença al conjunt que representa eixe món.

Proposició 6.3.1. (Lema de Veritat). Per a tota fórmula A , es té que $M^\Sigma, \Delta \Vdash A$ si, i només si, $A \in \Delta$.

Demostració. Per inducció sobre la fórmula A .

Cas 1: $A \equiv \perp$.

Per la Definició 3.4.1, sabem que

$$M^\Sigma, \Delta \not\Vdash \perp,$$

i per la Proposició 6.1.1 (apartat 3), es té

$$\perp \notin \Delta.$$

Per tant, aquest primer cas ja està provat.

Cas 2: $A \equiv p$.

Per la Definició 3.4.1, sabem que

$$M^\Sigma, \Delta \Vdash p \text{ si, i només si, } \Delta \in V^\Sigma(p),$$

i la Definició 6.3.1 ens diu que

$$\Delta \in V^\Sigma(p) \text{ si, i només si, } p \in \Delta,$$

com volíem veure.

Hipòtesi inductiva: Suposem l'enunciat cert per a les fórmules B i C . Demostrem-ho per als següents casos.

Cas 3: $A \equiv \neg B$.

Per la Definició 3.4.1, sabem que

$$M^\Sigma, \Delta \Vdash A \text{ si, i només si, } M^\Sigma, \Delta \nVdash B.$$

Ara, per hipòtesi inductiva tenim

$$M^\Sigma, \Delta \nVdash B \text{ si, i només si, } B \notin \Delta.$$

Finalment, per la Proposició 6.1.1 (apartat 4), es té

$$B \notin \Delta \text{ si, i només si, } \neg B \in \Delta.$$

És a dir, hem provat $M^\Sigma, \Delta \Vdash A$ si, i només si, $A \in \Delta$, com volíem.

Cas 4: $A \equiv B \wedge C$.

Per la Definició 3.4.1, sabem que

$$M^\Sigma, \Delta \Vdash A \text{ si, i només si, } M^\Sigma, \Delta \Vdash B \text{ i } M^\Sigma, \Delta \Vdash C.$$

Ara, per hipòtesi inductiva tenim

$$M^\Sigma, \Delta \Vdash B \text{ i } M^\Sigma, \Delta \Vdash C \text{ si, i només si, } B \in \Delta \text{ i } C \in \Delta.$$

Finalment, per la Proposició 6.1.1 (apartat 5), es té

$$B \in \Delta \text{ i } C \in \Delta \text{ si, i només si, } B \wedge C \in \Delta.$$

És a dir, hem provat $M^\Sigma, \Delta \Vdash A$ si, i només si, $A \in \Delta$, com volíem.

Cas 5: $A \equiv B \vee C$.

Per la Definició 3.4.1, sabem que

$$M^\Sigma, \Delta \Vdash A \text{ si, i només si, } M^\Sigma, \Delta \Vdash B \text{ o } M^\Sigma, \Delta \Vdash C.$$

Ara, per hipòtesi inductiva tenim

$$M^\Sigma, \Delta \Vdash B \text{ o } M^\Sigma, \Delta \Vdash C \text{ si, i només si, } B \in \Delta \text{ o } C \in \Delta.$$

Finalment, per la Proposició 6.1.1 (apartat 6), es té

$$B \in \Delta \text{ o } C \in \Delta \text{ si, i només si, } B \vee C \in \Delta.$$

És a dir, hem provat $M^\Sigma, \Delta \Vdash A$ si, i només si, $A \in \Delta$, com volíem.

Cas 6: $A \equiv B \rightarrow C$.

Per la Definició 3.4.1, sabem que

$$M^\Sigma, \Delta \Vdash A \text{ si, i només si, } M^\Sigma, \Delta \nVdash B \text{ o } M^\Sigma, \Delta \Vdash C.$$

Ara, per hipòtesi inductiva tenim

$$M^\Sigma, \Delta \nVdash B \text{ o } M^\Sigma, \Delta \Vdash C \text{ si, i només si, } B \notin \Delta \text{ o } C \in \Delta.$$

Finalment, per la Proposició 6.1.1 (apartat 7), es té

$$B \notin \Delta \text{ o } C \in \Delta \text{ si, i només si, } B \rightarrow C \in \Delta.$$

És a dir, hem provat $M^\Sigma, \Delta \Vdash A$ si, i només si, $A \in \Delta$, com volíem.

Cas 7: $A \equiv \Box B$.

Per la Definició 3.4.1, sabem que

$$M^\Sigma, \Delta \Vdash A \text{ si, i només si, per a tot } \Delta' \in M^\Sigma \text{ amb } (\Delta, \Delta') \in R^\Sigma \text{ es té que } M^\Sigma, \Delta' \Vdash B.$$

Ara, per hipòtesi inductiva, sabem que açò es té si, i només si,

$$\text{per a tot } \Delta' \in M^\Sigma \text{ amb } (\Delta, \Delta') \in R^\Sigma \text{ es compleix que } B \in \Delta'.$$

A més, per la Definició 6.3.1, tenim que

$$(\Delta, \Delta') \in R^\Sigma \text{ si, i només si, } \Box^{-1}\Delta \subseteq \Delta'.$$

Per tant, tenim que per a tot $\Delta' \in M^\Sigma$ amb $\Box^{-1}\Delta \subseteq \Delta'$ es compleix que $B \in \Delta'$.

I finalment, per la Proposició 6.2.1 açò es té si, i només si, $\Box B \in \Delta$.

És a dir, hem provat $M^\Sigma, \Delta \Vdash A$ si, i només si, $A \in \Delta$, com volíem.

Cas 8: $A \equiv \Diamond B$.

Per la Definició 3.4.1, sabem que

$$M^\Sigma, \Delta \Vdash A \text{ si, i només si, existeix un } \Delta' \in M^\Sigma \text{ amb } (\Delta, \Delta') \in R^\Sigma \text{ tal que } M^\Sigma, \Delta' \Vdash B.$$

Ara, per hipòtesi inductiva, sabem que açò es té si, i només si,

$$\text{existeix } \Delta' \in M^\Sigma \text{ amb } (\Delta, \Delta') \in R^\Sigma \text{ tal que } B \in \Delta'.$$

A més, per la Definició 6.3.1, tenim que

$$(\Delta, \Delta') \in R^\Sigma \text{ si, i només si, } \Box^{-1}\Delta \subseteq \Delta'.$$

Per tant, tenim que existeix un $\Delta' \in M^\Sigma$ per al què $\Box^{-1}\Delta \subseteq \Delta'$ i tal que $B \in \Delta'$.

Per altra part, pel Lema 6.2.3 sabem que

$$\Box^{-1}\Delta \subseteq \Delta' \text{ si, i només si, } \Diamond\Delta' \subseteq \Delta.$$

Finalment, per la Proposició 6.2.2 concloem que $\Diamond B \in \Delta$.

És a dir, hem provat $M^\Sigma, \Delta \Vdash A$ si, i només si, $A \in \Delta$, com volíem. □

6.4 Determinació i completesa per a $\mathbf{K}$

Ara ja estem preparats per a establir la completesa utilitzant el model canònic. Aquesta se segueix del fet que les fórmules vertaderes en el model canònic per a Σ són exactament aquelles demostrables a partir de Σ . Es diu que els models amb aquesta propietat determinen Σ , definició que vegem a continuació.

Definició 6.4.1. Un model M determina una lògica modal normal Σ quan, per a tota fórmula A , es té $M \Vdash A$ si, i només si, $\Sigma \vdash A$.

Teorema 6.4.1. (*Determinació*). $M^\Sigma \Vdash A$ si, i només si, $\Sigma \vdash A$.

Demostració. Suposem primer que $M^\Sigma \Vdash A$, aleshores per a tot $\Delta \in M^\Sigma$ (Σ -consistent complet), tenim que $M^\Sigma, \Delta \Vdash A$. Per tant, pel Lema de Veritat, $A \in \Delta$ per a tot $\Delta \in M^\Sigma$ (Σ -consistent complet). Així, pel Corol·lari 6.1.1, (amb $\Gamma = \emptyset$), es té $\Sigma \vdash A$.

Suposem ara que $\Sigma \vdash A$. Aleshores, segons la Proposició 6.1.1 (apartat 1), tota Δ Σ -consistent completa conté a A . Per tant, pel Lema de Veritat, $M^\Sigma, \Delta \Vdash A$ per a tot $\Delta \in W^\Sigma$, és a dir, $M^\Sigma \Vdash A$, com volíem provar. $\square$

Corol·lari 6.4.1. La lògica modal bàsica $\mathbf{K}$ és completa respecte la classe de tots els models. És a dir, si $\models A$, aleshores $\mathbf{K} \vdash A$.

Demostració. La fem per contrarrecíproc. Suposem que $\mathbf{K} \not\vdash A$. Aleshores, pel Teorema 6.4.1, tenim que $M^\mathbf{K} \not\vdash A$. Per tant, $\not\models A$. $\square$

6.5 Completesa respecte al marc

Per acabar, vorem que el teorema de completesa per a $\mathbf{K}$ es pot estendre a altres sistemes modals, una vegada demostrarem que el model canònic per a una lògica donada té la propietat corresponent del marc.

Teorema 6.5.1. Si una lògica modal normal Σ conté alguna de les fórmules de l'esquerra de la Taula 6.1, aleshores el model canònic per a Σ té la propietat corresponent de la dreta.

Si Σ conté...,	aleshores el model canònic per a Σ és:
(D): $\Box A \rightarrow \Diamond A$	serial
(T): $\Box A \rightarrow A$	reflexiu
(B): $A \rightarrow \Box \Diamond A$	simètric
(4): $\Box A \rightarrow \Box \Box A$	transitiu
(5): $\Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A$	euclidià

Taula 6.1: Correspondències bàsiques.

Demostració. Ho demostrem cas a cas. Siga el model canònic $M^\Sigma = (W^\Sigma, R^\Sigma, V^\Sigma)$.

1. Suposem que Σ conté (D). Siga $\Delta \in W^\Sigma$, volem demostrar que R^Σ és serial, és a dir, que existeix un Δ' tal que $(\Delta, \Delta') \in R^\Sigma$.

És suficient demostrar que $\Box^{-1}\Delta$ és Σ -consistent, perquè aleshores, pel Lema de Lindenbaum podem afirmar que existeix un conjunt Σ -consistent complet tal que $\Delta' \supseteq \Box^{-1}\Delta$, i per definició de R^Σ tenim que $(\Delta, \Delta') \in R^\Sigma$.

Anem a provar-ho. Suposem per reducció a l'absurd que $\Box^{-1}\Delta$ no és Σ -consistent, és a dir, $\Box^{-1}\Delta \vdash_\Sigma \perp$. Pel Lema 6.2.2, sabem que $\Delta \vdash_\Sigma \Box\perp$. Ara, com Σ conté D, també tenim que

$$\Delta \vdash_\Sigma \Diamond\perp.$$

Però com Σ és una lògica modal normal, per la Proposició 5.1.2 es té $\Sigma \vdash \neg\Diamond\perp$. Per tant es té

$$\Delta \vdash_\Sigma \neg\Diamond\perp,$$

fet que contradiu que Δ és Σ -consistent. Per tant, concloem que $\Box^{-1}\Delta$ és Σ -consistent.

2. Suposem que Σ conté (T). Siga $\Delta \in W^\Sigma$, volem demostrar que R^Σ és reflexiva, és a dir, que $(\Delta, \Delta) \in R^\Sigma$. En altres paraules, volem vore que

$$\Box^{-1}\Delta \subseteq \Delta.$$

Així, si $\Box A \in \Delta$, aleshores per (T) també es té $A \in \Delta$, per tant tenim $\Box^{-1}\Delta \subseteq \Delta$, com volíem.

3. Suposem que Σ conté (B). Siga $\Delta \in W^\Sigma$, suposem que $(\Delta, \Delta') \in R^\Sigma$, amb $\Delta' \in W^\Sigma$. Volem demostrar que R^Σ és simètrica, és a dir, que $(\Delta', \Delta) \in R^\Sigma$. En altres paraules, volem vore que $\Box^{-1}\Delta' \subseteq \Delta$. Pel Lema 6.2.3, açò és equivalent a vore

$$\Diamond\Delta \subseteq \Delta'.$$

Siga $A \in \Delta$. Per (B) també tenim que $\Box\Diamond A \in \Delta$. Però per hipòtesi, com $(\Delta, \Delta') \in R^\Sigma$, tenim $\Diamond A \in \Delta'$, per tant $\Diamond\Delta \subseteq \Delta'$, com volíem vore.

4. Suposem ara que Σ conté (4). Siguen $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \in W^\Sigma$, suposem que $(\Delta_1, \Delta_2) \in R^\Sigma$ i $(\Delta_2, \Delta_3) \in R^\Sigma$. Volem demostrar que R^Σ és transitiva, és a dir, que $(\Delta_1, \Delta_3) \in R^\Sigma$.

Per definició de R^Σ , tenim tant $\Box^{-1}\Delta_1 \subseteq \Delta_2$ com $\Box^{-1}\Delta_2 \subseteq \Delta_3$. A més, per a demostrar que $(\Delta_1, \Delta_3) \in R^\Sigma$, és suficient vore que

$$\Box^{-1}\Delta_1 \subseteq \Delta_3.$$

Siga $B \in \Box^{-1}\Delta_1$, és a dir, $\Box B \in \Delta_1$. Volem vore que $B \in \Delta_3$. Com $\Box B \in \Delta_1$, per (4) també es té que $\Box\Box B \in \Delta_1$. Per últim, com $(\Delta_1, \Delta_2) \in R^\Sigma$, es té $\Box B \in \Delta_2$, i com $(\Delta_2, \Delta_3) \in R^\Sigma$, aleshores $B \in \Delta_3$, com volíem provar.

5. Finalment, suposem que Σ conté (5). Siguen $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \in W^\Sigma$, suposem que $(\Delta_1, \Delta_2) \in R^\Sigma$ i $(\Delta_1, \Delta_3) \in R^\Sigma$. Volem demostrar que R^Σ és euclidiana, és a dir, que $(\Delta_2, \Delta_3) \in R^\Sigma$.

Per definició de R^Σ , tenim que $\square^{-1}\Delta_1 \subseteq \Delta_2$, i pel Lema 6.2.3, com tenim $\square^{-1}\Delta_1 \subseteq \Delta_1$, aleshores $\diamond\Delta_3 \subseteq \Delta_1$. Així, per a provar que $(\Delta_2, \Delta_3) \in R^\Sigma$, pel Lema 6.2.3 és suficient provar que $\diamond\Delta_3 \subseteq \Delta_2$.

Siga $\diamond A \in \diamond\Delta_3$, és a dir, $A \in \Delta_3$. Volem vore que $\diamond A \in \Delta_2$. Com $(\Delta_1, \Delta_3) \in R^\Sigma$, aleshores $\diamond A \in \Delta_1$, i per (5), també tenim que $\square\diamond A \in \Delta_1$. Finalment, com $(\Delta_1, \Delta_2) \in R^\Sigma$, aleshores $\diamond A \in \Delta_2$, com volíem vore.

□

Capítol 7

Conclusions

Aquest treball ha proporcionat una introducció detallada a la lògica modal, una extensió de la lògica proposicional clàssica que permet formalitzar conceptes com la necessitat i la possibilitat. Al llarg d'aquest, s'han introduït i desenvolupat els fonaments sintàctics, semàntics i deductius de la lògica modal. S'ha partit d'un estudi preliminar de la lògica proposicional clàssica i de conceptes fonamentals com el Lema de Zorn-Kuratowski, essencial per establir resultats claus en l'àmbit de la demostració formal.

Des del punt de vista sintàctic, s'han definit els operadors modals, $\Box$ i $\Diamond$, les regles de construcció de fórmules, i el concepte d'instància de substitució, que permet generar noves fórmules modals a partir de tautologies clàssiques. Aquestes eines han sigut fonamentals per analitzar la validesa de diverses formes lògiques en diferents sistemes modals.

En l'àmbit semàntic, s'ha desenvolupat el concepte de model com una estructura formal que combina mons, relacions d'accessibilitat i valoracions. Açò ha fet possible definir amb precisió els conceptes de veritat en un món, veritat en un model i validesa absoluta, així com estudiar el comportament de les fórmules modals en relació amb la relació d'accessibilitat.

Posteriorment, s'ha abordat la part deductiva amb la construcció de sistemes modals, la definició formal de la lògica modal normal i les seues regles derivades. En aquest context, s'han analitzat demostracions sintàctiques dins del sistema **K** i d'altres sistemes modals.

Finalment, s'ha arribat als resultats fonamentals de la correcció i la completesa, que asseguren que tot el que és demostrable és també vàlid (correcció) i que tot el que és vàlid és demostrable (completesa). És a dir, aquests teoremes estableixen l'equivalència entre el que és demostrable i el que és vertader. La demostració d'aquests resultats, mitjançant la construcció de models canònics, ha sigut un dels punts culminants del treball, ja que confirma que la lògica modal estudiada constitueix un sistema formal coherent i robust.

En definitiva, aquest treball ha mostrat com la lògica modal pot ser formalitzada amb gran precisió i estudiada mitjançant tècniques sistemàtiques. Això permet no només entendre el seu funcionament intern, sinó també establir ponts amb altres disciplines formals que en fan ús, com la informàtica o la filosofia.

Bibliografia

- [1] J. Climent Vidal, *Teoría de conjuntos*, Universitat de València.
- [2] B. Gimeno Arlandis, *Lógica proposicional*, Treball Fi de Grau, Universitat de València, 2022.
- [3] S. Kripke, *Semantical Considerations on Modal Logic*, Acta Philosophica Fennica, 1963.
- [4] J. McCance, *A Brief Introduction to Modal Logic*, Kenyon College, 2022.
- [5] V. Pons Llopis, *Verificació formal de formes equivalents de l'axioma d'elecció*, Treball Fi de Grau, Universitat de València, 2024.
- [6] M. Sergot, *Deducibility, Consistency, Maxi-consistent sets*, Department of Computing, Imperial College, London, 2008.
- [7] R. Zach, *Boxes and Diamonds. An Open Introduction to Modal Logic*, University of Calgary, 2019.