



VNIVERSITAT
DE VALÈNCIA

Treball Fi de Grau – Curs 2025/2026

Teoria de l'ordre

Autor: **Marta Marí Chanzá**

Tutor: ENRIC COSME LLÓPEZ

Índex

1	Introducció	1
2	Conjunts parcialment ordenats	3
2.1	Elements distingits	4
2.2	Elements distingits relatius a un subconjunt	4
2.3	Exemples de conjunts parcialment ordenats	5
3	Reticles	7
3.1	Equivalència entre les presentacions de reticle	9
3.2	Exemples de reticles	13
4	Reticles complets i algebraics	15
4.1	Reticles complets	15
4.2	Reticles algebraics	18
5	Els reticles algebraics de subàlgebres i congruències	19
5.1	Elements d'àlgebra universal	19
5.2	Conjunts tancats i subàlgebres	20
5.3	Congruències i àlgebres quocients	25
6	Conclusions	31

Capítol 1

Introducció

La teoria de l'ordre és una branca de les matemàtiques que estudia les relacions de comparació entre els elements d'un conjunt. Tot i la seua aparent senzillesa, proporciona un marc conceptual d'una riquesa i una versatilitat extraordinàries, amb connexions profundes amb la lògica matemàtica, la topologia, l'àlgebra universal i les ciències de la computació.

L'objecte central d'estudi d'aquest treball és la noció de **reticle**, una estructura que apareix de manera natural en contextos molt diversos: des dels conjunts de parts d'un conjunt, ordenats per inclusió, fins als conjunts de proposicions lògiques, ordenats per la implicació. Els reticles permeten formalitzar, sota un mateix paraigua algebraic, operacions tan dispars com el màxim comú divisor i el mínim comú múltiple en aritmètica, la intersecció i la unió en teoria de conjunts, o la conjunció i la disjunció en lògica proposicional.

Aquesta unitat no és casual. La noció de reticle es consolidà durant la primera meitat del segle XX, en bona mesura gràcies als treballs de Garrett Birkhoff, qui en la seua obra *Lattice Theory* [1] sistematitzà la disciplina i en mostrà l'abast com a llenguatge transversal de les matemàtiques. Les arrels del concepte, però, es remunten al segle XIX, amb les aportacions de Richard Dedekind a l'entorn de la teoria d'ideals i dels grups. D'aleshores ençà, els reticles han esdevingut una eina fonamental no sols en àlgebra, sinó també en àrees com l'anàlisi formal de conceptes o la semàntica de llenguatges de programació.

Una de les manifestacions més fèrtils d'aquesta ubiqüitat apareix en el context de l'àlgebra universal, on les estructures algebraiques es tracten de manera uniforme com a conjunts dotats d'operacions. En aquest marc, tant les subàlgebres com les congruències d'una àlgebra qualsevol s'organitzen de forma natural en reticles, i no en reticles arbitraris, sinó en reticles **algebraics**: una classe distingida que captura la interacció entre l'estructura d'ordre i la finitarietat de les operacions. Aquest és un dels resultats que vertebraren la part final del treball.

El treball s'estructura en quatre capítols de contingut, numerats del 2 al 5. En el **Capítol 2** presentem els fonaments de la teoria de l'ordre: les relacions de preordre i ordre parcial, la noció de conjunt parcialment ordenat o **poset**, i els elements distingits que hi

podem trobar, com ara mínims, màxims, ínfims i suprem. Tanquem el capítol amb una col·lecció d'exemples fonamentals que il·lustren la varietat de situacions en què apareixen aquestes estructures, i que reprendrem al llarg de tot el treball.

En el Capítol 3 introduïm la noció de reticle des de dues perspectives complementàries: com a conjunt parcialment ordenat en el qual tot parell d'elements té ínfim i suprem, i com a àlgebra dotada de dues operacions binàries que satisfan les lleis commutativa, associativa i d'absorció. El resultat principal del capítol és la demostració de l'equivalència entre ambdues presentacions, que ens permetrà transitar lliurement entre el punt de vista ordinal i l'àlgebraic.

El Capítol 4 es dedica als reticles complets, és a dir, aquells en els quals tot subconjunt té ínfim i suprem. Demostrem que tot reticle complet és fitat i establim un criteri especialment útil: n'hi ha prou amb la clausura per a ínfims arbitraris (o, equivalentment, per a suprem arbitraris) per a garantir la completitud. Tanquem el capítol amb la noció de reticle àlgebraic, bastida sobre els conceptes d'element compacte i de reticle compactament generat.

Finalment, el Capítol 5 estudia els reticles en el context de l'àlgebra universal. S'hi introduïxen les nocions de signatura àlgebraica, Σ -àlgebra, subàlgebra i congruència, juntament amb els operadors de subàlgebra i de congruència generades. Els teoremes principals demostren que tant el reticle de subàlgebres com el de congruències d'una Σ -àlgebra són reticles àlgebraics, la qual cosa il·lustra de manera concreta la ubiqüitat dels reticles que esmentàvem al començament.

Tanquem el treball amb un Capítol 6 de conclusions.

Les referències principals d'aquest treball han estat les obres clàssiques de Birkhoff [1], Davey i Priestley [3] i Grätzer [4], que constituïxen les fonts estàndard de la teoria de l'ordre i dels reticles. Per al tractament de l'àlgebra universal del Capítol 5 hem seguit principalment Burris i Sankappanavar [6] i Cosme Llópez et al. [2].

Capítol 2

Conjunts parcialment ordenats

En aquest capítol introduïrem els conceptes bàsics de teoria de l'ordre que necessitarem al llarg del treball. Comencem introduïnt les relacions de preordre i ordre parcial, així com els conjunts parcialment ordenats, també anomenats **posets** pel seu nom en anglés, **partially ordered sets**. En aquest capítol treballarem sobre un conjunt donat A . Recordem que una relació binària sobre A és qualsevol subconjunt \leq en $A \times A$. Si $a, b \in A$, escriurem $a \leq b$ per a denotar el fet que $(a, b) \in \leq$. En aquest cas direm que els elements a i b són **comparables**.

Definició 2.1. Una relació binària \leq en A s'anomena **preordre** si satisfà les següents propietats:

- Reflexiva Per a tot $a \in A$, $a \leq a$.
- Transitiva Per a tot $a, b, c \in A$, si $a \leq b$ i $b \leq c$, aleshores $a \leq c$.

Definició 2.2. Una relació binària \leq en A s'anomena **ordre parcial** si satisfà les següents propietats:

- \leq és un preordre;
- Antisimètrica Per a tot $a, b \in A$, si $a \leq b$ i $b \leq a$, aleshores $a = b$.

Definició 2.3. Anomenem **conjunt parcialment ordenat** o **poset** a la tupla (A, \leq) on A és conjunt i \leq és un ordre parcial en A .

Definició 2.4. Un ordre parcial \leq en A s'anomena **ordre total** o, simplement, **ordre** si satisfà la següent propietat.

- Totalitat Per a tot $a, b \in A$, $a \leq b$ o $b \leq a$.

2.1 Elements distingits

A continuació introduïm alguns elements distingits que podem trobar dins un conjunt parcialment ordenat, com ara les nocions de mínims, màxims, ínfims i suprem.

Definició 2.5. Siga (A, \leq) un conjunt parcialment ordenat i $a \in A$ un element. Direm que a és

- minimal per a \leq si, per a tot $x \in A$, es té que si $x \leq a$, aleshores $x = a$;
- maximal per a \leq si, per a tot $x \in A$, es té que si $a \leq x$, aleshores $x = a$;
- el menor element per a \leq si, per a tot $x \in A$ es té que $a \leq x$;
- el major element per a \leq si, per a tot $x \in A$ es té que $x \leq a$.

A continuació introduïm la noció de conjunt fitat.

Definició 2.6. Un conjunt parcialment ordenat (A, \leq) s'anomena fitat si té, al mateix temps, un menor element i un major element.

2.2 Elements distingits relatius a un subconjunt

Continuem amb les nocions de fita superior i fita inferior d'un subconjunt donat, així com les nocions relacionades de suprem i ínfim i de màxim i mínim.

Definició 2.7. Siga (A, \leq) un conjunt parcialment ordenat i $B \subseteq A$ un subconjunt. Direm que un element $a \in A$ és

- fita superior de B si, per a tot $b \in B$, es té que $b \leq a$.
- fita inferior de B si, per a tot $b \in B$, es té que $a \leq b$.
- suprem de B si a és la menor fita superior de B . És a dir,
 - a és fita superior de B ; i
 - Per a tot $c \in A$, si c és fita superior de B , aleshores $a \leq c$.
- ínfim de B si a és la major fita inferior de B . És a dir,
 - a és fita inferior de B ; i
 - Per a tot $c \in A$, si c és fita inferior de B , aleshores $c \leq a$.
- màxim de B si a és suprem de B i, a més, $a \in B$;
- mínim de B si a és ínfim de B i, a més, $a \in B$.

Corol·lari 2.1. *Notem que, en la definició anterior, quan $B = A$, màxims i mínims d' A són, respectivament, els majors i menors elements d' A .*

La següent proposició ens garanteix que els ínfims i suprems associats a un subconjunt, quan existeixen, són únics.

Proposició 2.1. *Siga (A, \leq) un conjunt parcialment ordenat, $B \subseteq A$ un subconjunt i a_1 i a_2 elements en A . Si a_1 i a_2 són suprems de B , aleshores $a_1 = a_2$. Recíprocament, si a_1 i a_2 són ínfims de B , aleshores $a_1 = a_2$.*

Demostració. Comencem amb la demostració per al suprem.

Siguen $a_1, a_2 \in A$ dos suprems per a B . Aleshores, per a tot $b \in B$, tenim que $b \leq a_1$ i $b \leq a_2$. És a dir, tant a_1 com a_2 són fites superiors de B .

Com a_2 és una fita superior de B , per la definició d' a_1 , tenim que $a_1 \leq a_2$. Per altra banda, com a_1 és una fita superior de B , per la definició d' a_2 , tenim que $a_2 \leq a_1$. Per la propietat antisimètrica de l'ordre parcial, concloem que $a_1 = a_2$.

La demostració per a l'ímfim és anàloga. □

Com a corol·lari de l'anterior proposició, obtenim que els màxims i mínims elements, quan existeixen, són únics.

Corol·lari 2.2. *Siga (A, \leq) un conjunt parcialment ordenat i a_1 i a_2 elements en A . Si a_1 i a_2 són màxims d' A , aleshores $a_1 = a_2$. Recíprocament, si a_1 i a_2 són mínims d' A , aleshores $a_1 = a_2$.*

2.3 Exemples de conjunts parcialment ordenats

A continuació presentem una sèrie d'exemples importants dins la teoria de l'ordre.

Exemple 2.1. 1. La tupla (\mathbb{N}, \leq) , on

$$n \leq m \quad \text{si, i només si,} \quad \text{existeix un } k \in \mathbb{N} \text{ tal que } m = n + k,$$

és un conjunt totalment ordenat però no fitat. Notem que (\mathbb{N}, \leq) és l'ordre habitual en els naturals. Notem que 0 és el menor natural, ja que per a tot $n \in \mathbb{N}$, es té que $0 \leq n$. Per altra banda, (\mathbb{N}, \leq) no té màxim, ja que per a tot $n \in \mathbb{N}$ es té que $n + 1 \in \mathbb{N}$ i $n < n + 1$.

2. La tupla $(\mathbb{N}, |)$, on

$$n | m \quad \text{si, i només si,} \quad \text{existeix un } k \in \mathbb{N} \text{ tal que } m = nk,$$

és un conjunt parcialment ordenat. En aquest cas estem ordenant \mathbb{N} per divisibilitat. Aquest ordre no és total, ja que, per als naturals $2, 3 \in \mathbb{N}$ no es té cap relació de divisibilitat, ni en un sentit ni en l'altre. Aquest ordre és fitat. Notem que, per a tot $n \in \mathbb{N}$ es té que $1|n$ i $n|0$. Així, 1 és el mínim i 0 el màxim per a $(\mathbb{N}, |)$.

3. Siga A un conjunt, denotem per $\mathcal{P}(A)$ el conjunt de les parts d' A , és a dir,

$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$$

Per a la relació d'inclusió usual, el conjunt $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ és un conjunt parcialment ordenat. Notem que aquest ordre no és total si $|A| \geq 2$, ja que en aquest cas, si $a_1, a_2 \in A$ són dos elements diferents en A , aleshores els conjunts $\{a_1\}$ i $\{a_2\}$ no són comparables. Notem que $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ és fitat, ja que, per a tot $B \subseteq A$ es té que $\emptyset \subseteq B$ i $B \subseteq A$. Així, \emptyset i A són, respectivament, el menor i el major element en $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$.

4. Siga $\text{Prop}(V)$ el conjunt de totes les proposicions lògiques de primer ordre definides sobre un conjunt de variables proposicionals V . Sobre aquest conjunt definim la relació \rightarrow com segueix. Donades dues proposicions $P, Q \in \text{Prop}(V)$ diem que $P \rightarrow Q$ si aquesta proposició és una tautologia. Aleshores $(\text{Prop}(V), \rightarrow)$ és un conjunt parcialment ordenat fitat. Notem que aquest ordre no és total si $|V| \geq 2$, ja que en aquest cas, si $P, Q \in V$ són dues variables proposicionals diferents en V , aleshores les proposicions P i Q no són comparables, ja que ni $P \rightarrow Q$ ni $Q \rightarrow P$ tenen per què ser tautologies. Denotem per \perp i \top , respectivament, les proposicions de fals i vertader. Notem que, per a tota proposició P es té que $\perp \rightarrow P$ i $P \rightarrow \top$, on \perp i \top són, respectivament, els símbols proposicionals que denoten les proposicions de fals i vertader. Així, fals i vertader són, respectivament, el menor i el major element en $(\text{Prop}(V), \rightarrow)$.

Capítol 3

Reticles

En aquest capítol introduïm la noció de reticle. En primer lloc donarem dues definicions del mateix concepte. En la primera definició presentem el reticle com una estructura ordenada satisfent que tot parell d'elements té ínfim i suprem. Mentre que, en la segona definició, presentem el reticle com una àlgebra amb dues operacions, anomenades ínfim i suprem, que satisfan les lleis commutatives, associatives i d'absorció. A continuació demostrarem que aquestes dues presentacions són equivalents.

Comencem amb la primera presentació de reticle.

Definició 3.1. Una tupla (A, \leq) s'anomena reticle si

- (A, \leq) és un conjunt parcialment ordenat;
- Per a tot $a_1, a_2 \in A$ el subconjunt $\{a_1, a_2\} \subseteq A$ té ínfim i suprem.

Donem ara la segona presentació de reticle.

Definició 3.2. Una tupla (A, \wedge, \vee) s'anomena reticle si

- A és un conjunt;
- \wedge és una operació binària en A , $\wedge : A \times A \longrightarrow A$, anomenada ínfim;
- \vee és una operació binària en A , $\vee : A \times A \longrightarrow A$, anomenada suprem.

A més, se satisfan les següents lleis:

Commutativa per a l'ímfim i per al suprem: Per a tot $a_1, a_2 \in A$, es té que

$$a_1 \wedge a_2 = a_2 \wedge a_1, \quad a_1 \vee a_2 = a_2 \vee a_1;$$

Associativitat per a l'ímfim i per al suprem: Per a tot $a_1, a_2, a_3 \in A$, es té que

$$a_1 \wedge (a_2 \wedge a_3) = (a_1 \wedge a_2) \wedge a_3, \quad a_1 \vee (a_2 \vee a_3) = (a_1 \vee a_2) \vee a_3;$$

Absorció: Per a tot $a_1, a_2 \in A$, es té que

$$a_1 \vee (a_1 \wedge a_2) = a_1, \quad a_1 \wedge (a_1 \vee a_2) = a_1.$$

A continuació introduïm uns lemes auxiliars que ens seran d'utilitat més endavant. En primer lloc observem que la llei d'idempotència és una llei que se'n deriva directament de les lleis d'absorció que apareixen en la Definició 3.2.

Lema 3.1. *Siga (A, \wedge, \vee) un reticle segons la Definició 3.2. Aleshores (A, \wedge, \vee) satisfà la llei d'idempotència.*

Idempotència: Per a tot $a \in A$, es té que

$$a \vee a = a, \quad a \wedge a = a.$$

Demostració. Siga $a \in A$, aleshores es té que

$$\begin{aligned} a \vee a &= a \vee (a \wedge (a \vee a)) && \text{(absorció)} \\ &= a. && \text{(absorció)} \end{aligned}$$

Notem també que

$$\begin{aligned} a \wedge a &= a \wedge (a \vee (a \wedge a)) && \text{(absorció)} \\ &= a. && \text{(absorció)} \end{aligned}$$

□

El següent lema ens dóna una equivalència que ens serà d'utilitat més endavant.

Lema 3.2. *Siga (A, \wedge, \vee) un reticle segons la Definició 3.2. Siguen $a_1, a_2 \in A$. Aleshores*

$$a_1 \wedge a_2 = a_1 \quad \text{si, i només si} \quad a_1 \vee a_2 = a_2.$$

Demostració. Suposem que $a_1 \wedge a_2 = a_1$. Aleshores, es té que

$$\begin{aligned} a_1 \vee a_2 &= (a_1 \wedge a_2) \vee a_2 && (a_1 \wedge a_2 = a_1) \\ &= a_2 \vee (a_1 \wedge a_2) && \text{(commutativitat de } \vee) \\ &= a_2 \vee (a_2 \wedge a_1). && \text{(commutativitat de } \wedge) \end{aligned}$$

Suposem ara $a_1 \vee a_2 = a_2$. Aleshores, es té que

$$\begin{aligned} a_1 \wedge a_2 &= a_1 \wedge (a_1 \vee a_2) && (a_1 \vee a_2 = a_2) \\ &= a_1. && \text{(absorció)} \end{aligned}$$

□

3.1 Equivalència entre les presentacions de reticle

Estem en condició de comprovar que, efectivament, les dues presentacions de reticle que hem donat abans són equivalents.

Proposició 3.1. *La noció de reticle presentada en la Definició 3.1 i la presentada en la Definició 3.2 són equivalents.*

Demostració. (1 \rightarrow 2) Siga (A, \leq) un reticle d'acord amb la Definició 3.1. Anem a associar-li un reticle d'acord amb la Definició 3.2.

Considerem (A, \wedge, \vee) on:

- A és el mateix conjunt que ja tenim per la Definició 3.1;
- Definim l'aplicació $\wedge : A \times A \rightarrow A$ com segueix. Donats a_1, a_2 en A , aleshores

$$a_1 \wedge a_2 = \inf\{a_1, a_2\};$$

- Definim l'aplicació $\vee : A \times A \rightarrow A$ com segueix. Donats a_1, a_2 en A , aleshores

$$a_1 \vee a_2 = \sup\{a_1, a_2\}.$$

Notem que aquestes operacions binàries estan ben definides ja que per a tot $a_1, a_2 \in A$ el conjunt $\{a_1, a_2\}$ té ínfim i suprem per la definició de reticle donada en la Definició 3.1.

Vejam que l'estructura (A, \wedge, \vee) satisfà les lleis que apareixen en la Definició 3.2.

Commutativa per a l'ímfim i el suprem.

Vejam-ho primer per a l'ímfim. Siguen $a_1, a_2 \in A$ i definim $z_1 = \inf\{a_1, a_2\}$, $z_2 = \inf\{a_2, a_1\}$, volem vore que $z_1 = z_2$. Per a provar açò, és suficient vore que $z_1 \leq z_2$ i $z_2 \leq z_1$, per l'antisimètrica de \leq . Com $z_1 = \inf\{a_1, a_2\}$, per definició tenim que $z_1 \leq a_1$ i $z_1 \leq a_2$ (z_1 és fita inferior de a_1 i a_2). A més, per a tot $w \in A$, si $w \leq a_1$ i $w \leq a_2$, aleshores $w \leq z_1$ (z_1 és la major fita inferior). Com $z_2 = \inf\{a_2, a_1\}$, per definició tenim que $z_2 \leq a_2$ i $z_2 \leq a_1$ (z_2 és fita inferior). A més, per a tot $w \in A$, si $w \leq a_2$ i $w \leq a_1$, aleshores $w \leq z_2$ (z_2 és la major fita inferior).

Donat que $z_1 \leq a_2$, $z_1 \leq a_1$ i z_2 és la major de les fites inferiors per a $\{a_2, a_1\}$, aleshores $z_1 \leq z_2$. De forma anàloga, com $z_2 \leq a_1$ i $z_2 \leq a_2$ i z_1 és la major de les fites inferiors per a $\{a_2, a_1\}$, tenim $z_2 \leq z_1$. Per tant, queda provat per a l'ímfim.

Vejam-ho ara per al suprem. Siguen $a_1, a_2 \in A$ i definim $z_1 = \sup\{a_1, a_2\}$, $z_2 = \sup\{a_2, a_1\}$, volem vore que $z_1 = z_2$. Igual que en l'ímfim, és suficient vore que $z_1 \leq z_2$ i $z_2 \leq z_1$. Notem que com $z_1 = \sup\{a_1, a_2\}$, per definició tenim: $a_1 \leq z_1$ i $a_2 \leq z_1$ (z_1 és fita superior). A més, per a tot $\forall w \in A$, si $a_1 \leq w$ i $a_2 \leq w$, aleshores $z_1 \leq w$ (z_1 és la menor fita superior). Notem també que com $z_2 = \sup\{a_2, a_1\}$, per definició tenim que $a_2 \leq z_2$ i

$a_1 \leq z_2$ (z_2 és fita superior). A més, per a tot $w \in A$, si $a_1 \leq w$ i $a_2 \leq w$, aleshores $z_2 \leq w$ (z_2 és la menor fita superior)

Donat que $a_1 \leq z_1$, $a_2 \leq z_1$ i z_2 és la menor de les fites superiors per a $\{a_2, a_1\}$, aleshores tenim $z_2 \leq z_1$. De forma anàloga, com $a_2 \leq z_2$, $a_1 \leq z_2$ i z_1 és la menor de les fites superiors per a $\{a_1, a_2\}$, aleshores tenim $z_1 \leq z_2$.

Associativitat per a l'ímfim i el suprem.

Vejam-ho primer per a l'ímfim. Siguen $a_1, a_2, a_3 \in A$. Volem vore que

$$a_1 \wedge (a_2 \wedge a_3) = (a_1 \wedge a_2) \wedge a_3.$$

Per una banda tenim

$$a_1 \wedge (a_2 \wedge a_3) = \inf\{a_1, \inf\{a_2, a_3\}\}$$

i d'altra banda

$$(a_1 \wedge a_2) \wedge a_3 = \inf\{\inf\{a_1, a_2\}, a_3\}.$$

Anomenem $z_{23} = \inf\{a_2, a_3\}$, $z_1 = \inf\{a_1, z_{23}\}$, $z_{12} = \inf\{a_1, a_2\}$ i $z_3 = \inf\{z_{12}, a_3\}$. Hem de vore, com abans, que $z_1 \leq z_3$ i $z_3 \leq z_1$. Per a vore que $z_1 \leq z_3$, és suficient vore que $z_1 \leq z_{12}$ i $z_1 \leq a_3$. Notem que $z_1 = \inf\{a_1, z_{23}\}$. Per tant, $z_1 \leq a_1$ i $z_1 \leq z_{23} \leq a_3$, per definició de z_{23} . Per a vore que $z_1 \leq z_{12}$, és suficient vore que $z_1 \leq a_1$, que es compleix per definició, i que $z_1 \leq a_2$. Aquesta última desigualtat també es compleix ja que $z_1 \leq z_{23} \leq a_2$. Vejam ara que $z_3 \leq z_1$. És suficient vore que $z_3 \leq a_1$ i $z_3 \leq z_{23}$. Notem que $z_3 = \inf\{z_{12}, a_3\}$. Per tant, $z_3 \leq a_3$ i $z_3 \leq z_{12} \leq a_1$, per definició de z_{12} . Per a vore que $z_3 \leq z_{23}$, és suficient vore que $z_3 \leq a_3$, que es té per definició, i $z_3 \leq a_2$. Aquesta última desigualtat també es compleix ja que $z_3 \leq z_{12} \leq a_2$.

Vejam-ho ara per al suprem. Volem vore que

$$a_1 \vee (a_2 \vee a_3) = (a_1 \vee a_2) \vee a_3.$$

Tenim, per una banda que

$$a_1 \vee (a_2 \vee a_3) = \sup\{a_1, \sup\{a_2, a_3\}\},$$

i per altra banda que

$$(a_1 \vee a_2) \vee a_3 = \sup\{\sup\{a_1, a_2\}, a_3\}.$$

Anomenem $z_{23} = \sup\{a_2, a_3\}$, $z_1 = \sup\{a_1, z_{23}\}$, $z_{12} = \sup\{a_1, a_2\}$, $z_3 = \sup\{z_{12}, a_3\}$. Hem de vore que $z_1 \leq z_3$ i $z_3 \leq z_1$. Per a vore que $z_1 \leq z_3$, és suficient vore que $a_1 \leq z_3$ i $z_{23} \leq z_3$. Notem que $z_3 = \sup\{z_{12}, a_3\}$. Per tant, $a_3 \leq z_3$ i $a_1 \leq z_{12} \leq z_3$, per definició de z_{12} . Per a vore que $z_{23} \leq z_3$, és suficient vore que $a_3 \leq z_3$, per definició, i $a_2 \leq z_3$. Aquesta última desigualtat també es compleix ja que $a_2 \leq z_{12} \leq z_3$. Vejam ara que $z_3 \leq z_1$. És suficient vore que $a_3 \leq z_1$ i $z_{12} \leq z_1$. Notem que $z_1 = \sup\{a_1, z_{23}\}$. Per tant, $a_1 \leq z_1$ i

$a_3 \leq z_{23} \leq z_1$, per definició de z_{23} . Per a vore que $z_{12} \leq z_1$, és suficient vore que $a_1 \leq z_1$, que es té per definició, i $a_2 \leq z_1$. Aquesta última desigualtat també es compleix ja que $a_2 \leq z_{23} \leq z_1$.

Absorció.

Siguen $a_1, a_2 \in A$. Vejam primer que es compleix la igualtat

$$a_1 \vee (a_1 \wedge a_2) = a_1,$$

és a dir, que

$$\sup\{a_1, \inf\{a_1, a_2\}\} = a_1.$$

Anomenem $z = \inf\{a_1, a_2\}$ i $w = \sup\{a_1, z\}$ i vejam que $w = a_1$. Per la definició de suprem, tenim que $a_1 \leq w$. Per tant, només queda vore que $w \leq a_1$. Per a provar açò, és suficient vore que $a_1 \leq a_1$, que ja es compleix, i que $z \leq a_1$, que també es compleix per la definició d'ínfim, ja que $z = \inf\{a_1, a_2\}$.

Vejam ara que es compleix la igualtat

$$a_1 \wedge (a_1 \vee a_2) = a_1,$$

és a dir, que

$$\inf\{a_1, \sup\{a_1, a_2\}\} = a_1.$$

Anomenem $w = \sup\{a_1, a_2\}$ i $z = \inf\{a_1, w\}$ i vejam que $z = a_1$. Per la definició d'ínfim, tenim que $z \leq a_1$. Per tant, només queda vore que $a_1 \leq z$. Per a provar açò, és suficient vore que $a_1 \leq a_1$, que ja es compleix, i que $a_1 \leq w$, que també es té per la definició de suprem, ja que $w = \sup\{a_1, a_2\}$.

Queda demostrat que (A, \wedge, \vee) és un reticle seguint la Definició 3.2.

(2 \rightarrow 1) Siga ara (A, \wedge, \vee) un reticle d'acord a la Definció 3.2 . Anem a associar-li un reticle d'acord amb la Definició 3.1. Considerem A el mateix conjunt del reticle donat per la Definció 3.2 i definim la relació \leq com segueix.

Direm que $a_1, a_2 \in A$ satisfan que $a_1 \leq a_2$ si, i només si

$$a_1 \wedge a_2 = a_1.$$

Recordem, pel Lema 3.2 que l'equació $a_1 \wedge a_2 = a_1$ es té si, i només si, l'equació $a_1 \vee a_2 = a_2$ també es té.

En primer lloc comprovarem que \leq és d'ordre.

Reflexiva.

Siga $a \in A$. Notem que la desigualtat $a \leq a$ es té si, i només si, es té que $a \wedge a = a$. Notem que la següent cadena d'igualtats es té

$$\begin{aligned} a \wedge a &= a \wedge (a \vee (a \wedge a)) && \text{(absorció)} \\ &= a. && \text{(absorció)} \end{aligned}$$

Transitiva.

Siguen $a, b, c \in A$. Suposem que $a \leq b$ i $b \leq c$, o el que és el mateix, $a \wedge b = a$ i $b \wedge c = b$. Volem vore $a \leq c$, que és equivalent a vore que $a \wedge c = a$. Notem que la següent cadena d'igualtats es té

$$\begin{aligned} a \wedge c &= (a \wedge b) \wedge c && (a \wedge b = a) \\ &= a \wedge (b \wedge c) && (\text{associativitat}) \\ &= a \wedge b && (b \wedge c = b) \\ &= a. && (a \wedge b = a) \end{aligned}$$

Antisimètrica.

Siguen $a, b \in A$ tals que $a \leq b$ i $b \leq a$. Volem vore que $a = b$. Per definició, tenim que $a \wedge b = a$ i $b \wedge a = b$. Notem que la següent cadena d'igualtats es té

$$\begin{aligned} a &= a \wedge b && (a \wedge b = a) \\ &= b \wedge a && (\text{commutativitat de } \wedge) \\ &= b. && (b \wedge a = b) \end{aligned}$$

Concloem que (A, \leq) és un conjunt parcialment ordenat. Vejam ara que es compleix la segona condició de la Definició 3.1, és a dir, que tot parell d'elements admet ífim i suprem.

Tot parell admet ífim.

Siguen $a_1, a_2 \in A$, volem vore que el conjunt $\{a_1, a_2\}$ té ífim. De fet, demostrarem que $\inf\{a_1, a_2\} = a_1 \wedge a_2$. És a dir, demostrarem que $a_1 \wedge a_2$ és la major fita inferior de $\{a_1, a_2\}$. Primer, vejam que $a_1 \wedge a_2 \leq a_1$, o, equivalentment, que $(a_1 \wedge a_2) \wedge a_1 = a_1 \wedge a_2$. Notem que la següent cadena d'igualtats es té

$$\begin{aligned} (a_1 \wedge a_2) \wedge a_1 &= a_1 \wedge (a_1 \wedge a_2) && (\text{commutativitat de } \wedge) \\ &= (a_1 \wedge a_1) \wedge a_2 && (\text{associativitat de } \wedge) \\ &= a_1 \wedge a_2. && (\text{idempotència de } \wedge) \end{aligned}$$

De forma anàloga, també obtenim que $a_1 \wedge a_2 \leq a_2$. En efecte,

$$\begin{aligned} (a_1 \wedge a_2) \wedge a_2 &= a_1 \wedge (a_2 \wedge a_2) && (\text{associativitat de } \wedge) \\ &= a_1 \wedge a_2. && (\text{idempotència de } \wedge) \end{aligned}$$

Siga ara $w \in A$ tal que $w \leq a_1$ i $w \leq a_2$, és a dir, una fita inferior de $\{a_1, a_2\}$. Volem vore que $w \leq a_1 \wedge a_2$. Com $w \leq a_1$ i $w \leq a_2$, tenim que

$$w \wedge a_1 = w \quad \text{i} \quad w \wedge a_2 = w.$$

Aleshores, trobem que

$$\begin{aligned} w \wedge (a_1 \wedge a_2) &= (w \wedge a_1) \wedge a_2 && \text{(associativitat de } \wedge) \\ &= w \wedge a_2 && \text{(} w \wedge a_1 = w) \\ &= w. && \text{(} w \wedge a_2 = w) \end{aligned}$$

Per tant, $w \leq a_1 \wedge a_2$, i així $\inf\{a_1, a_2\} = a_1 \wedge a_2$.

Tot parell admet suprem

Siguen $a_1, a_2 \in A$, volem vore que el conjunt $\{a_1, a_2\}$ té suprem. De fet, demostrarem que $\sup\{a_1, a_2\} = a_1 \vee a_2$. És a dir, demostrarem que $a_1 \vee a_2$ és la menor fita superior de $\{a_1, a_2\}$. Primer, vejam que $a_1 \leq a_1 \vee a_2$, o, equivalentment, que $a_1 \wedge (a_1 \vee a_2) = a_1$. Açò es té directament per absorció.

De forma anàloga, també obtenim que $a_2 \leq a_1 \vee a_2$. En efecte,

$$\begin{aligned} a_2 \wedge (a_1 \vee a_2) &= a_2 \wedge (a_2 \vee a_1) && \text{(commutativitat de } \vee) \\ &= a_2. && \text{(absorció)} \end{aligned}$$

Siga ara $w \in A$ tal que $a_1 \leq w$ i $a_2 \leq w$, és a dir, una fita superior de $\{a_1, a_2\}$. Volem vore que $a_1 \vee a_2 \leq w$. Com $a_1 \leq w$ i $a_2 \leq w$, tenim que

$$a_1 \wedge w = a_1 \quad \text{i} \quad a_2 \wedge w = a_2.$$

Recordem, pel Lema 3.2, que les igualtats equivalents següents també es tenen.

$$a_1 \vee w = w \quad \text{i} \quad a_2 \vee w = w.$$

Aleshores, trobem que

$$\begin{aligned} (a_1 \vee a_2) \vee w &= a_1 \vee (a_2 \vee w) && \text{(associativitat de } \vee) \\ &= a_1 \vee w && \text{(} a_2 \vee w = w) \\ &= w. && \text{(} a_1 \vee w = w) \end{aligned}$$

Per tant, una altra vegada emprant el Lema 3.2, trobem que $a_1 \vee a_2 \leq w$, i així $\sup\{a_1, a_2\} = a_1 \vee a_2$.

Queda demostrat que (A, \leq) és un reticle seguint la Definició 3.1. \square

3.2 Exemples de reticles

A continuació vorem que tots els exemples presentats en l'Exemple 2.1 són reticles.

Exemple 3.1. 1. El conjunt totalment ordenat (\mathbb{N}, \leq) és un reticle. Si $m, n \in \mathbb{N}$, aleshores es té que

$$\inf\{n, m\} = \min(n, m); \quad \sup\{n, m\} = \max(n, m).$$

2. El conjunt parcialment ordenat $(\mathbb{N}, |)$ és un reticle. Si $m, n \in \mathbb{N}$, aleshores es té que

$$\inf\{n, m\} = \text{mcd}(n, m); \quad \sup\{n, m\} = \text{mcm}(n, m).$$

3. Siga A un conjunt. El conjunt parcialment ordenat $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ és un reticle. Siguen $B, C \subseteq A$, aleshores es té que

$$\inf\{B, C\} = B \cap C; \quad \sup\{B, C\} = B \cup C.$$

4. Siga V un conjunt de variables proposicionals. El conjunt $(\text{Prop}(V), \rightarrow)$ és un reticle. Siguen $P, Q \in \text{Prop}(V)$, aleshores es té que

$$\inf\{P, Q\} = P \wedge Q; \quad \sup\{P, Q\} = P \vee Q.$$

Capítol 4

Reticles complets i algebraics

En aquest capítol introduïm les nocions de reticles complets i reticles algebraics.

4.1 Reticles complets

Comencem amb la noció de reticle complet.

Definició 4.1. Siga (A, \leq) un conjunt parcialment ordenat. Direm que A és un reticle complet si

- Tot subconjunt $B \subseteq A$ té ínfim i suprem.

Com a conseqüència de la definició, tot reticle complet és, en particular, un reticle.

Nota 4.1. Siga (A, \leq) un reticle complet i $B \subseteq A$. Recordem que, d'acord a la Proposició 2.1, si un subconjunt té suprem o ínfim, aquests són únics. Llavors, denotarem per $\bigwedge B$ a l'ímfim de B i $\bigvee B$ al suprem de B .

La següent proposició ens garanteix que tot reticle complet és fitat.

Proposició 4.1. *Si (A, \leq) és un reticle complet, aleshores (A, \leq) és un reticle fitat.*

Demostració. Notem que tant \emptyset com A són subconjunts d' A . Com que (A, \leq) és un reticle complet, els següents quatre elements han d'existir:

$$\bigwedge \emptyset, \quad \bigvee \emptyset, \quad \bigwedge A, \quad \bigvee A.$$

Anem ara a veure que $\bigwedge \emptyset$ (o, equivalentment, $\bigvee A$) és l'element màxim d' A i que $\bigvee \emptyset$ (o, equivalentment, $\bigwedge A$) és l'element mínim d' (A, \leq) . Passem a estudiar en primer lloc el cas dels màxims.

$\bigwedge \emptyset$ és l'element màxim.

Notem que l'element $\bigwedge \emptyset$ satisfà les següents propietats.

- Per a tot $z \in \emptyset$, $\bigwedge \emptyset \leq z$, és a dir, $\bigwedge \emptyset$ és fita inferior d' \emptyset .
- Per a tot $a \in A$ satisfent que, per a tot $z \in \emptyset$, $a \leq z$, aleshores $a \leq \bigwedge \emptyset$, és a dir, $\bigwedge \emptyset$ és la major fita inferior d' \emptyset .

Com que el conjunt \emptyset no conté elements, tot element $a \in A$, és fita inferior d' \emptyset . Així, necessàriament, per a tot $a \in A$, es té que $a \leq \bigwedge \emptyset$ o, el que és el mateix, $\bigwedge \emptyset$ és l'element màxim d' (A, \leq) .

$\bigvee A$ és l'element màxim.

Notem que l'element $\bigvee A$ satisfà les següents propietats.

- Per a tot $a \in A$, $a \leq \bigvee A$, és a dir, $\bigvee A$ és fita superior d' A .
- Per a tot $z \in A$ satisfent que, per a tot $a \in A$, $a \leq z$, aleshores $\bigvee A \leq z$, és a dir, $\bigvee A$ és la menor fita superior d' A .

La primera condició ja estableix que, per a tot $a \in A$, $a \leq \bigvee A$ o, el que és el mateix, $\bigvee A$ és l'element màxim d' (A, \leq) .

Com a conseqüència del Corol·lari 2.2, trobem que

$$\bigwedge \emptyset = \bigvee A.$$

Passem ara a estudiar el cas dels mínims.

$\bigvee \emptyset$ és l'element mínim.

Notem que l'element $\bigvee \emptyset$ satisfà les següents propietats.

- Per a tot $z \in \emptyset$, $z \leq \bigvee \emptyset$, és a dir, $\bigvee \emptyset$ és fita superior d' \emptyset .
- Per a tot $a \in A$ satisfent que, per a tot $z \in \emptyset$, $z \leq a$, aleshores $\bigvee \emptyset \leq a$, és a dir, $\bigvee \emptyset$ és la menor fita superior d' \emptyset .

Com que el conjunt \emptyset no conté elements, tot element $a \in A$, és fita superior d' \emptyset . Així, necessàriament, per a tot $a \in A$, es té que $\bigvee \emptyset \leq a$ o, el que és el mateix, $\bigvee \emptyset$ és l'element mínim d' (A, \leq) .

$\bigwedge A$ és l'element mínim.

Notem que l'element $\bigwedge A$ satisfà les següents propietats.

- Per a tot $a \in A$, $\bigwedge A \leq a$, és a dir, $\bigwedge A$ és fita inferior d' A .
- Per a tot $z \in A$ satisfent que, per a tot $a \in A$, $z \leq a$, aleshores $z \leq \bigwedge A$, és a dir, $\bigwedge A$ és la major fita inferior d' A .

La primera condició ja estableix que, per a tot $a \in A$, $\bigwedge A \leq a$ o, el que és el mateix, $\bigwedge A$ és l'element mínim d'(A, \leq).

Com a conseqüència del Corol·lari 2.2, trobem que

$$\bigvee \emptyset = \bigwedge A.$$

Concloem que (A, \leq) és un reticle fitat. □

La següent proposició ens diu que, en la Definició 4.1, la definició de reticle complet, és suficient demanar únicament que tot subconjunt admet ínfim i no les dues condicions alhora.

Proposició 4.2. *Siga (A, \leq) un conjunt parcialment ordenat tal que A està tancat per a la formació d'ínfims arbitraris, és a dir,*

- *Tot subconjunt $B \subseteq A$ té ínfim o, el que és el mateix, $\bigwedge B$ existeix.*

Aleshores, (A, \leq) és un reticle complet.

Demostració. Com que ja és té per hipòtesi l'existència d'ínfims arbitraris, és suficient vore que A està tancat per a la formació de suprem arbitraris. Sigui $B \subseteq A$. Per a cada $b \in B$, definim $\uparrow b$, el conjunt de fites superiors de b , és a dir,

$$\uparrow b = \{a \in A \mid b \leq a\}.$$

A continuació definim la intersecció de totes aquestes fites superiors, és a dir, considerem el conjunt $\bigcap_{b \in B} \uparrow b$. Com que (A, \leq) està tancat per a la formació d'ínfims arbitraris, el següent element ha d'existir en A

$$\bigwedge (\bigcap_{b \in B} \uparrow b).$$

Anem a demostrar que aquest element és, precisament, el suprem de B .

$\bigwedge (\bigcap_{b \in B} \uparrow b)$ és el suprem de B .

Demostrem en primer lloc que $\bigwedge (\bigcap_{b \in B} \uparrow b)$ és una fita superior de B .

Sigui $b \in B$ i sigui $z \in \bigcap_{b \in B} \uparrow b$, aleshores $b \leq z$. Per tant, per a tot $z \in \bigcap_{b \in B} \uparrow b$ trobem que $b \leq z$. És a dir, tot element $b \in B$ és una fita inferior del conjunt $\bigcap_{b \in B} \uparrow b$. Aleshores, per la definició de $\bigwedge (\bigcap_{b \in B} \uparrow b)$, trobem que

$$b \leq \bigwedge (\bigcap_{b \in B} \uparrow b).$$

Així, $\bigwedge (\bigcap_{b \in B} \uparrow b)$ és una fita superior de B .

Demostrem en segon lloc que $\bigwedge (\bigcap_{b \in B} \uparrow b)$ és la menor fita superior de B .

Siga $w \in A$ una fita superior de B . Així, per a tot $b \in B$, es té que $b \leq w$. Notem que, per definició, $w \in \bigcap_{b \in B} \uparrow b$. També per definició,

$$\bigwedge (\bigcap_{b \in B} \uparrow b) \leq w.$$

Concloem que $\bigwedge (\bigcap_{b \in B} \uparrow b)$ és el suprem de B , és a dir,

$$\bigvee B = \bigwedge (\bigcap_{b \in B} \uparrow b).$$

Per tant, (A, \leq) és un reticle complet. □

La següent proposició (i la seua demostració) és anàloga a la Proposició 4.2 per al cas del suprem.

Proposició 4.3. *Siga (A, \leq) un conjunt parcialment ordenat tal que A està tancat per a la formació de suprem arbitraris, és a dir,*

- *Tot subconjunt $B \subseteq A$ té suprem o, el que és el mateix, $\bigvee B$ existeix.*

Aleshores, (A, \leq) és un reticle complet.

4.2 Reticles algebraics

Tanquem aquest capítol introduïnt la noció de reticle algebraic. Amb aquest objectiu introduïm les noció relacionades d'element compacte i de reticle compactament generat.

Definició 4.2. Siga (A, \leq) un reticle. Un element $a \in A$ s'anomena **compacte** si, per a tot $B \subseteq A$, si $\bigvee B$ existeix i $a \leq \bigvee B$, aleshores existeix un subconjunt finit $F \subseteq B$ tal que

$$a \leq \bigvee F.$$

Direm que (A, \leq) és **compactament generat** si tot element d' A es pot escriure com el suprem d'un conjunt d'elements compactes.

Direm que el reticle (A, \leq) és **algebraic** si és un reticle complet i compactament generat.

Capítol 5

Els reticles algebraics de subàlgebres i congruències

En aquest capítol donarem dos exemples canònics de reticles algebraics, el reticle de subàlgebres i el reticle de congruències d'una àlgebra donada. En aquest capítol entenem les àlgebres com els objectes d'estudi de l'àlgebra universal, és a dir, conjunts amb operacions. El que farem en primer lloc és donar les definicions bàsiques d'àlgebra universal necessàries per al desenvolupament del capítol. En aquest capítol hem seguit principalment Cosme Llópez, Ruiz Mora i Tamarit [2] i Sankappanavar i Burris [6].

5.1 Elements d'àlgebra universal

Introduïm en primer lloc la noció de signatura algebraica.

Definició 5.1. Una signatura algebraica és un parell $\Sigma = (\Sigma, \text{ar})$, on Σ és un conjunt de símbols d'operació i ar , la aritat, és una aplicació $\text{ar}: \Sigma \rightarrow \mathbb{N}$. Si $\sigma \in \Sigma$ i $\text{ar}(\sigma) = n$, direm que σ és una operació n -ària. Per a tot $n \in \mathbb{N}$, denotarem per Σ_n el conjunt de tots els símbols d'operació n -aris en Σ . Específicament, si $n = 0$, $n = 1$ o $n = 2$, parlarem d'operacions nul·làries, unàries o binàries, respectivament.

Exemple 5.1. Sigui $\Sigma = \{+, \cdot, 0, 1\}$ i sigui $\text{ar}: \Sigma \rightarrow \mathbb{N}$ l'aplicació definida per

$$\text{ar}(+) = \text{ar}(\cdot) = 2, \quad \text{ar}(0) = \text{ar}(1) = 0.$$

Aleshores, (Σ, ar) és una signatura algebraica.

A més, $\Sigma_2 = \{+, \cdot\}$, $\Sigma_0 = \{0, 1\}$, i $\Sigma_n = \emptyset$, per a tot $n \neq 0, 2$.

Introduïm ara la definició d'àlgebra.

Definició 5.2. Una Σ -àlgebra és un parell $\mathbf{A} = (A, F)$, on A és un conjunt i

$$F: \Sigma \longrightarrow \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \text{Hom}(A^{\text{ar}(\sigma)}, A)$$

és una aplicació tal que, per a cada $\sigma \in \Sigma$, $F(\sigma)$ és una aplicació d' $A^{\text{ar}(\sigma)}$ en A . Direm que $F(\sigma)$ és l'interpretació de σ com a operació $\text{ar}(\sigma)$ -ària en A . Per simplicitat, emprarem $\sigma^{\mathbf{A}}$ per a denotar $F(\sigma)$. A més, per a una operació nul·lària tenim que $A^0 = 1$, així que denotarem per $\sigma^{\mathbf{A}}$ el valor de $F(\sigma): 1 \longrightarrow A$ en l'únic element d'1.

Exemple 5.2. Considerem el conjunt $A = \{p, i\}$, de nombres parells i imparells. Per a la signatura $\Sigma = \{+, \cdot, 0, 1\}$ introduïda a l'Exemple 5.1, definim l'estructura de Σ -àlgebra $\mathbf{A} = (A, +^{\mathbf{A}}, \cdot^{\mathbf{A}}, 0^{\mathbf{A}}, 1^{\mathbf{A}})$ sobre A com segueix

$$\begin{array}{ll} +^{\mathbf{A}}: & A \times A \longrightarrow A \\ & (p, p) \mapsto p \\ & (p, i) \mapsto i \\ & (i, p) \mapsto i \\ & (i, i) \mapsto p \\ \\ 0^{\mathbf{A}}: & 1 \longrightarrow A \\ & 0 \mapsto p \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \cdot^{\mathbf{A}}: & A \times A \longrightarrow A \\ & (p, p) \mapsto p \\ & (p, i) \mapsto p \\ & (i, p) \mapsto p \\ & (i, i) \mapsto i \\ \\ 1^{\mathbf{A}}: & 1 \longrightarrow A \\ & 0 \mapsto i \end{array}$$

Notem que $+^{\mathbf{A}}$ i $\cdot^{\mathbf{A}}$ són operacions binàries en A i $0^{\mathbf{A}}$ i $1^{\mathbf{A}}$ operacions nul·làries en A , és a dir, constants.

A continuació introduïm la noció d'homomorfisme entre àlgebres per a la mateixa signatura i el concepte relacionat d'àlgebres isomorfes.

Definició 5.3. Siguen \mathbf{A} i \mathbf{B} dues Σ -àlgebres. Un Σ -homomorfisme d' \mathbf{A} en \mathbf{B} , denotat per $f: \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, és una aplicació $f: A \longrightarrow B$ de forma que, per a tot $n \in \mathbb{N}$, tot símbol d'operació $\sigma \in \Sigma_n$ i tota família $(a_i)_{i \in n} \in A^n$, la següent igualtat es té

$$f(\sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i \in n})) = \sigma^{\mathbf{B}}((f(a_i))_{i \in n}).$$

Direm que \mathbf{A} és isomorfa a \mathbf{B} si existeix un Σ -homomorfisme bijectiu d' \mathbf{A} en \mathbf{B} . Denotarem aquest fet per $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$.

5.2 Conjunts tancats i subàlgebres

A continuació introduïm la noció de conjunts tancats i el concepte associat de subàlgebra. Com a conseqüència obtenim la existència d'un homomorfisme injectiu, donat per l'aplicació inclusió, de qualsevol subàlgebra a l'àlgebra que la conté.

Definició 5.4. Siga \mathbf{A} una Σ -àlgebra i $\sigma \in \Sigma_n$ un símbol d'operació n -ari. Direm que $X \subseteq A$ és tancat per a σ si, per a cada $(x_i)_{i \in n} \in X^n$, tenim que $\sigma^{\mathbf{A}}((x_i)_{i \in n}) \in X$. Direm que $X \subseteq A$ és un subconjunt tancat d' \mathbf{A} si, per a cada símbol d'operació $\sigma \in \Sigma$, X està tancat per a σ .

Si $X \subseteq A$ és un subconjunt tancat podem dotar-lo d'estructura de Σ -àlgebra, denotada per \mathbf{X} , on, per a cada símbol d'operació n -ari $\sigma \in \Sigma_n$ i tota família d'elements $(x_i)_{i \in n} \in X^n$, definim l'interpretació de l'operació σ com

$$\sigma^{\mathbf{X}}((x_i)_{i \in n}) = \sigma^{\mathbf{A}}((x_i)_{i \in n}).$$

La definició de conjunt tancat ens permet concloure que aquestes operacions estan ben definides i que \mathbf{X} és una Σ -àlgebra, que anomenarem subàlgebra d' \mathbf{A} en X .

Proposició 5.1. Siga \mathbf{A} una Σ -àlgebra i \mathbf{X} una subàlgebra d' \mathbf{A} . Aleshores l'aplicació inclusió, d' X en A , que assigna a cada $x \in X$ l'element $x \in A$, és un Σ -homomorfisme injectiu $\text{in}_X: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{A}$.

A continuació vegem com obtindre un reticle algebraic associat al conjunt de subàlgebres d'una àlgebra donada.

Definició 5.5. Siga \mathbf{A} una Σ -àlgebra. Denotem per $\text{Sub}(\mathbf{A})$ el conjunt de tots els subconjunts tancats d' \mathbf{A} , és a dir,

$$\text{Sub}(\mathbf{A}) = \{X \subseteq A \mid X \text{ està tancat per a } \mathbf{A}\}.$$

Considerem $(\text{Sub}(\mathbf{A}), \subseteq)$, el conjunt de subconjunts tancats per a \mathbf{A} ordenat parcialment per inclusió.

Vorem, en primer lloc, que $(\text{Sub}(\mathbf{A}), \subseteq)$ és un reticle complet.

Teorema 5.1. Siga Σ una signatura i siga \mathbf{A} una Σ -àlgebra. Aleshores $(\text{Sub}(\mathbf{A}), \subseteq)$ és un reticle complet.

Demostració. És fàcil comprovar que $(\text{Sub}(\mathbf{A}), \subseteq)$ és un conjunt parcialment ordenat. Utilitzarem la Proposició 4.2 per a demostrar que $(\text{Sub}(\mathbf{A}), \subseteq)$ és un reticle complet, és a dir, cal comprovar que tot subconjunt en $\text{Sub}(\mathbf{A})$ té ínfim.

Siga $\{X_j \mid j \in J\}$ una família arbitrària de subconjunts tancats en \mathbf{A} . Anem a demostrar que $\bigcap_{j \in J} X_j$ torna a ser un subconjunt tancat.

Siga $\sigma \in \Sigma$ un símbol d'operació n -ari i siga $(x_i)_{i \in n}$ una família en $(\bigcap_{j \in J} X_j)^n$. Volem vore que $\sigma^{\mathbf{A}}((x_i)_{i \in n}) \in \bigcap_{j \in J} X_j$. Siga $j \in J$. Com que $(x_i)_{i \in n}$ pertany a $(\bigcap_{j \in J} X_j)^n$, tenim que $(x_i)_{i \in n}$ és un element en X_j^n . Com X_j és un subconjunt tancat d' \mathbf{A} , aleshores $\sigma^{\mathbf{A}}((x_i)_{i \in n}) \in X_j$. Com que açò es té per a tot $j \in J$, concloem que $\sigma^{\mathbf{A}}((x_i)_{i \in n}) \in \bigcap_{j \in J} X_j$. És a dir, $\bigcap_{j \in J} X_j$ és un subconjunt tancat d' \mathbf{A} .

Anem ara a demostrar que $\bigcap_{j \in J} X_j$ és l'ímfim per a la família de subconjunts tancats $\{X_j \mid j \in J\}$. És a dir, anem a demostrar que

$$\bigwedge_{j \in J} X_j = \bigcap_{j \in J} X_j.$$

Notem que, per a tot $j \in J$, es té que $\bigcap_{j \in J} X_j \subseteq X_j$. Així, $\bigcap_{j \in J} X_j$ és una fita inferior per a $\{X_j \mid j \in J\}$. Només quedarà comprovar que $\bigcap_{j \in J} X_j$ és la major de les fites inferiors per a $\{X_j \mid j \in J\}$. Siga $Z \in \text{Sub}(\mathbf{A})$ una fita inferior per a $\{X_j \mid j \in J\}$. Així, per a tot $j \in J$, es té que $Z \subseteq X_j$. Per la qual cosa, podem deduir que $Z \subseteq \bigcap_{j \in J} X_j$, que és el que volíem demostrar.

Concloem, per tant, que $\bigcap_{j \in J} X_j$ és l'ímfim per a $\{X_j \mid j \in J\}$.

Seguint la Proposició 4.2, concloem que $(\text{Sub}(\mathbf{A}), \subseteq)$ és un reticle complet. \square

De la Proposició 4.1 se segueix que $(\text{Sub}(\mathbf{A}), \subseteq)$ és un reticle fitat. Donem a continuació el màxim d'aquest conjunt parcialment ordenat.

Nota 5.1. Siga \mathbf{A} una Σ -àlgebra. És fàcil adonar-se que A és un subconjunt tancat d' \mathbf{A} . De fet A és el màxim subconjunt tancat en $(\text{Sub}(\mathbf{A}), \subseteq)$.

Abans de demostrar que $(\text{Sub}(\mathbf{A}), \subseteq)$ és un reticle algebraic, necessitem entendre com es comporta el suprem en aquest reticle. A diferència de l'ímfim, que coincideix amb la intersecció (Teorema 5.1), la unió de subconjunts tancats no és, en general, un subconjunt tancat. Açò ens porta a introduir l'operador de subàlgebra generada.

Definició 5.6. Siga \mathbf{A} una Σ -àlgebra i $Y \subseteq A$ un subconjunt qualsevol. Definim la subàlgebra generada per Y , denotada per $\text{Sg}_{\mathbf{A}}(Y)$, com la intersecció de tots els subconjunts tancats d' \mathbf{A} que contenen Y , és a dir,

$$\text{Sg}_{\mathbf{A}}(Y) = \bigcap \{X \in \text{Sub}(\mathbf{A}) \mid Y \subseteq X\}.$$

Notem que aquesta definició té sentit, ja que $A \in \text{Sub}(\mathbf{A})$ i $Y \subseteq A$, de manera que la família sobre la qual fem la intersecció no és buida. A més, pel Teorema 5.1, $\text{Sg}_{\mathbf{A}}(Y)$ és, efectivament, un subconjunt tancat d' \mathbf{A} , i és el menor subconjunt tancat que conté Y .

La següent proposició ens caracteritza el suprem en $(\text{Sub}(\mathbf{A}), \subseteq)$ en termes de l'operador de subàlgebra generada.

Proposició 5.2. Siga \mathbf{A} una Σ -àlgebra i $\{X_j \mid j \in J\}$ una família de subconjunts tancats d' \mathbf{A} . Aleshores

$$\bigvee_{j \in J} X_j = \text{Sg}_{\mathbf{A}}\left(\bigcup_{j \in J} X_j\right).$$

Demostració. Anomenem $S = \text{Sg}_{\mathbf{A}}\left(\bigcup_{j \in J} X_j\right)$. Hem de comprovar que S és la menor fita superior de $\{X_j \mid j \in J\}$ en $(\text{Sub}(\mathbf{A}), \subseteq)$.

En primer lloc, S és una fita superior. En efecte, per a tot $j \in J$ es té que

$$X_j \subseteq \bigcup_{j \in J} X_j \subseteq \text{Sg}_{\mathbf{A}} \left(\bigcup_{j \in J} X_j \right) = S,$$

on la darrera inclusió es té per la Definició 5.6.

En segon lloc, S és la menor fita superior. Siga $Z \in \text{Sub}(\mathbf{A})$ una fita superior de $\{X_j \mid j \in J\}$, és a dir, $X_j \subseteq Z$ per a tot $j \in J$. Aleshores $\bigcup_{j \in J} X_j \subseteq Z$. Com que Z és un subconjunt tancat que conté $\bigcup_{j \in J} X_j$ i $\text{Sg}_{\mathbf{A}} \left(\bigcup_{j \in J} X_j \right)$ és el menor subconjunt tancat amb aquesta propietat, concloem que $S \subseteq Z$.

Per tant, $S = \bigvee_{j \in J} X_j$. □

El següent lema és la peça clau i recull la finitarietat de les operacions: com que tota operació té aritat finita, qualsevol element de la subàlgebra generada per X ja apareix en la subàlgebra generada per algun subconjunt finit de X .

Lema 5.1. *Siga \mathbf{A} una Σ -àlgebra i $Y \subseteq A$. Aleshores*

$$\text{Sg}_{\mathbf{A}}(Y) = \bigcup \{ \text{Sg}_{\mathbf{A}}(F) \mid F \subseteq Y, F \text{ finit} \}.$$

Demostració. Anomenem $U = \bigcup \{ \text{Sg}_{\mathbf{A}}(F) \mid F \subseteq Y, F \text{ finit} \}$.

L'inclusió $U \subseteq \text{Sg}_{\mathbf{A}}(Y)$ és immediata: per a tot subconjunt finit $F \subseteq Y$ es té que $F \subseteq Y$, d'on $\text{Sg}_{\mathbf{A}}(F) \subseteq \text{Sg}_{\mathbf{A}}(Y)$ per la monotonia de $\text{Sg}_{\mathbf{A}}$ (conseqüència directa de la Definició 5.6). Per tant, la unió de tots aquests conjunts està continguda en $\text{Sg}_{\mathbf{A}}(Y)$.

Per a l'inclusió contrària, vejam primer que U és un subconjunt tancat d' \mathbf{A} . Siga $\sigma \in \Sigma_n$ un símbol d'operació n -ari i siga $(y_i)_{i \in n} \in U^n$. Per a cada $i \in n$ existeix un subconjunt finit $F_i \subseteq Y$ tal que $y_i \in \text{Sg}_{\mathbf{A}}(F_i)$. Considerem $F = \bigcup_{i \in n} F_i$. Com que n és finit i cada F_i és finit, F és un subconjunt finit d' Y . A més, per la monotonia de $\text{Sg}_{\mathbf{A}}$, es té que $\text{Sg}_{\mathbf{A}}(F_i) \subseteq \text{Sg}_{\mathbf{A}}(F)$ per a tot $i \in n$, de manera que $(y_i)_{i \in n} \in \text{Sg}_{\mathbf{A}}(F)^n$. Com que $\text{Sg}_{\mathbf{A}}(F)$ és un subconjunt tancat, tenim que $\sigma^{\mathbf{A}}((y_i)_{i \in n}) \in \text{Sg}_{\mathbf{A}}(F) \subseteq U$. Per tant, U és tancat per a σ , i com que σ era arbitrari, U és un subconjunt tancat d' \mathbf{A} .

Finalment, per a tot $y \in Y$ es té que $\{y\}$ és un subconjunt finit d' Y i $y \in \text{Sg}_{\mathbf{A}}(\{y\}) \subseteq U$, d'on $Y \subseteq U$. Com que U és un subconjunt tancat que conté Y i $\text{Sg}_{\mathbf{A}}(Y)$ és el menor amb aquesta propietat, concloem que $\text{Sg}_{\mathbf{A}}(Y) \subseteq U$.

Per tant, $\text{Sg}_{\mathbf{A}}(Y) = U$. □

Amb aquests resultats podem caracteritzar els elements compactes de $(\text{Sub}(\mathbf{A}), \subseteq)$.

Proposició 5.3. *Siga \mathbf{A} una Σ -àlgebra i $X \in \text{Sub}(\mathbf{A})$. Si X és finitament generada, és a dir, si existeix un subconjunt finit $F \subseteq A$ tal que $X = \text{Sg}_{\mathbf{A}}(F)$, aleshores X és un element compacte de $(\text{Sub}(\mathbf{A}), \subseteq)$.*

Demostració. Suposem que $X = \text{Sg}_{\mathbf{A}}(F)$ amb $F = \{a_1, \dots, a_m\} \subseteq A$ finit. Siga $\{X_j \mid j \in J\}$ una família de subconjunts tancats tal que $X \subseteq \bigvee_{j \in J} X_j$. Hem de trobar un subconjunt finit $J_0 \subseteq J$ tal que $X \subseteq \bigvee_{j \in J_0} X_j$.

Per la Proposició 5.2, $\bigvee_{j \in J} X_j = \text{Sg}_{\mathbf{A}}\left(\bigcup_{j \in J} X_j\right)$. Com que $F \subseteq X \subseteq \text{Sg}_{\mathbf{A}}\left(\bigcup_{j \in J} X_j\right)$, pel Lema 5.1 cada $a_k \in F$ pertany a $\text{Sg}_{\mathbf{A}}(G_k)$ per a algun subconjunt finit $G_k \subseteq \bigcup_{j \in J} X_j$. Anomenem $G = \bigcup_{k=1}^m G_k$, que és un subconjunt finit de $\bigcup_{j \in J} X_j$. Cada element de G pertany a algun X_j , de manera que, prenent un índex per a cada element de G , existeix un subconjunt finit $J_0 \subseteq J$ tal que $G \subseteq \bigcup_{j \in J_0} X_j$.

Aleshores, per a tot $k \in \{1, \dots, m\}$, es té que

$$a_k \in \text{Sg}_{\mathbf{A}}(G_k) \subseteq \text{Sg}_{\mathbf{A}}(G) \subseteq \text{Sg}_{\mathbf{A}}\left(\bigcup_{j \in J_0} X_j\right) = \bigvee_{j \in J_0} X_j,$$

on hem emprat la monotonia de $\text{Sg}_{\mathbf{A}}$ i de nou la Proposició 5.2. Així, $F \subseteq \bigvee_{j \in J_0} X_j$ i, com que aquest darrer és un subconjunt tancat, $X = \text{Sg}_{\mathbf{A}}(F) \subseteq \bigvee_{j \in J_0} X_j$.

Per tant, X és compacte. □

Finalitzarem la secció comprovant que $(\text{Sub}(\mathbf{A}), \subseteq)$ és un reticle algebraic.

Teorema 5.2. *Siga Σ una signatura i siga \mathbf{A} una Σ -àlgebra. Aleshores $(\text{Sub}(\mathbf{A}), \subseteq)$ és un reticle algebraic.*

Demostració. Seguint la Definició 4.2 i el Teorema 5.1, queda comprovar que $(\text{Sub}(\mathbf{A}), \subseteq)$ és compactament generat.

Siga $X \in \text{Sub}(\mathbf{A})$ un subconjunt tancat. Per a cada $x \in X$, considerem $\text{Sg}_{\mathbf{A}}(\{x\})$, la subàlgebra generada per l'element x . Per la Proposició 5.3, com que $\{x\}$ és finit, cada $\text{Sg}_{\mathbf{A}}(\{x\})$ és un element compacte de $(\text{Sub}(\mathbf{A}), \subseteq)$.

Anem a demostrar que

$$X = \bigvee_{x \in X} \text{Sg}_{\mathbf{A}}(\{x\}).$$

Per la Proposició 5.2, tenim que

$$\bigvee_{x \in X} \text{Sg}_{\mathbf{A}}(\{x\}) = \text{Sg}_{\mathbf{A}}\left(\bigcup_{x \in X} \text{Sg}_{\mathbf{A}}(\{x\})\right).$$

D'una banda, per a tot $x \in X$ es té que $x \in \text{Sg}_{\mathbf{A}}(\{x\})$, d'on $X \subseteq \bigcup_{x \in X} \text{Sg}_{\mathbf{A}}(\{x\})$ i, per monotonia de $\text{Sg}_{\mathbf{A}}$, $X = \text{Sg}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \text{Sg}_{\mathbf{A}}\left(\bigcup_{x \in X} \text{Sg}_{\mathbf{A}}(\{x\})\right)$, on hem emprat que X és tancat i, per tant, $\text{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = X$. D'altra banda, per a tot $x \in X$ es té que $\text{Sg}_{\mathbf{A}}(\{x\}) \subseteq X$, ja que X és un subconjunt tancat que conté x i $\text{Sg}_{\mathbf{A}}(\{x\})$ és el menor amb aquesta propietat. Per tant, $\bigcup_{x \in X} \text{Sg}_{\mathbf{A}}(\{x\}) \subseteq X$ i, de nou per monotonia, $\text{Sg}_{\mathbf{A}}\left(\bigcup_{x \in X} \text{Sg}_{\mathbf{A}}(\{x\})\right) \subseteq \text{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = X$.

Concloem que $X = \bigvee_{x \in X} \text{Sg}_{\mathbf{A}}(\{x\})$, és a dir, X és el suprem d'una família d'elements compactes. Com que X era arbitrari, $(\text{Sub}(\mathbf{A}), \subseteq)$ és compactament generat.

Concloem que $(\text{Sub}(\mathbf{A}), \subseteq)$ és un reticle algebraic. □

5.3 Congruències i àlgebres quocients

A continuació introduïm la noció de congruència i el concepte associat d'àlgebra quocient. Com a conseqüència tenim l'existència d'un homomorfisme sobrejectiu d'una àlgebra a l'àlgebra quocient donada per la projecció d'un element a la seua classe.

Definició 5.7. Siga \mathbf{A} una Σ -àlgebra i Φ una relació d'equivalència en A . Direm que Φ és una congruència en \mathbf{A} si, per a cada $n \in \mathbb{N}$, tota operació $\sigma \in \Sigma_n$ i tot parell de famílies $(a_i)_{i \in n}, (b_i)_{i \in n} \in A^n$ satisfent que, per a cada $i \in n$, $(a_i, b_i) \in \Phi$, es té que

$$(\sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i \in n}), \sigma^{\mathbf{A}}((b_i)_{i \in n})) \in \Phi.$$

Si Φ és una congruència en \mathbf{A} podem dotar el conjunt quocient A/Φ amb una estructura de Σ -àlgebra, denotada per \mathbf{A}/Φ , on, per a cada símbol d'operació n -ari $\sigma \in \Sigma_n$ i tota família de classes $([a_i]_{\Phi})_{i \in n} \in (A/\Phi)^n$, l'interpretació de l'operació σ ve donada per

$$\sigma^{\mathbf{A}/\Phi}(([a_i]_{\Phi})_{i \in n}) = [\sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i \in n})]_{\Phi}.$$

La definició de congruència permet concloure que totes aquestes operacions estan ben definides i que \mathbf{A}/Φ és una Σ -àlgebra, que anomenarem l'àlgebra quocient d' \mathbf{A} per Φ .

Proposició 5.4. Siga \mathbf{A} una Σ -àlgebra i Φ una congruència en \mathbf{A} . Aleshores l'aplicació projecció respecte Φ , d' A en A/Φ , que assigna a cada element $a \in A$ la seua classe $[a]_{\Phi} \in A/\Phi$, és un Σ -homomorfisme sobrejectiu $\text{pr}_{\Phi}: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}/\Phi$.

A continuació vegem com obtindre un reticle algebraic associat al conjunt d'àlgebres quocients d'una àlgebra donada.

Definició 5.8. Siga \mathbf{A} una Σ -àlgebra. Denotem per $\text{Con}(\mathbf{A})$ el conjunt de totes les congruències d' \mathbf{A} , és a dir,

$$\text{Con}(\mathbf{A}) = \{ \Phi \subseteq A \times A \mid \Phi \text{ és congruència en } \mathbf{A} \}.$$

Considerem $(\text{Con}(\mathbf{A}), \subseteq)$, el conjunt de congruències en \mathbf{A} ordenat parcialment per inclusió.

Vorem, en primer lloc, que $(\text{Con}(\mathbf{A}), \subseteq)$ és un reticle complet.

Teorema 5.3. Siga Σ una signatura i siga \mathbf{A} una Σ -àlgebra. Aleshores $(\text{Con}(\mathbf{A}), \subseteq)$ és un reticle complet.

Demostració. És fàcil comprovar que $(\text{Con}(\mathbf{A}), \subseteq)$ és un conjunt parcialment ordenat. Utilitzarem la Proposició 4.2 per a demostrar que $(\text{Con}(\mathbf{A}), \subseteq)$ és un reticle complet, és a dir, cal comprovar que tot subconjunt en $\text{Con}(\mathbf{A})$ té ínfim.

Siga $\{\Phi_j \mid j \in J\}$ una família arbitrària de congruències en \mathbf{A} . Anem a demostrar que $\bigcap_{j \in J} \Phi_j$ torna a ser una congruència. És a dir, una relació d'equivalència compatible amb les operacions de Σ .

Reflexiva. Siga $a \in A$. Com, per a tot $j \in J$, Φ_j és una congruència en \mathbf{A} aleshores, en particular, Φ_j és una relació reflexiva, és a dir, $(a, a) \in \Phi_j$. Com açò és cert per a tot $j \in J$, concloem que $(a, a) \in \bigcap_{j \in J} \Phi_j$. És a dir $\bigcap_{j \in J} \Phi_j$ és una relació reflexiva.

Simètrica. Siguen $a, b \in A$. Suposem que $(a, b) \in \bigcap_{j \in J} \Phi_j$. Volem vore que $(b, a) \in \bigcap_{j \in J} \Phi_j$. Com que $(a, b) \in \bigcap_{j \in J} \Phi_j$ aleshores, per a tot $j \in J$ es té que $(a, b) \in \Phi_j$. Com, per a tot $j \in J$, Φ_j és una congruència en \mathbf{A} aleshores, en particular, Φ_j és una relació simètrica, és a dir, $(b, a) \in \Phi_j$. Com açò és cert per a tot $j \in J$, concloem que $(b, a) \in \bigcap_{j \in J} \Phi_j$. És a dir $\bigcap_{j \in J} \Phi_j$ és una relació simètrica.

Transitiva. Siguen $a, b, c \in A$. Suposem que $(a, b), (b, c) \in \bigcap_{j \in J} \Phi_j$. Volem vore que $(a, c) \in \bigcap_{j \in J} \Phi_j$. Com que $(a, b), (b, c) \in \bigcap_{j \in J} \Phi_j$ aleshores, per a tot $j \in J$ es té que $(a, b), (b, c) \in \Phi_j$. Com, per a tot $j \in J$, Φ_j és una congruència en \mathbf{A} aleshores, en particular, Φ_j és una relació transitiva, és a dir, $(a, c) \in \Phi_j$. Com açò és cert per a tot $j \in J$, concloem que $(a, c) \in \bigcap_{j \in J} \Phi_j$. És a dir $\bigcap_{j \in J} \Phi_j$ és una relació transitiva.

Compatible amb les operacions. Siga $\sigma \in \Sigma$ un símbol d'operació n -ari i siguen $(a_i)_{i \in n}$ i $(b_i)_{i \in n}$ dues famílies en A^n satisfent que, per a cada $i \in n$, $(a_i, b_i) \in \bigcap_{j \in J} \Phi_j$. Volem vore que

$$(\sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i \in n}), \sigma^{\mathbf{A}}((b_i)_{i \in n})) \in \bigcap_{j \in J} \Phi_j.$$

Com que, per a tot $i \in n$, $(a_i, b_i) \in \bigcap_{j \in J} \Phi_j$ aleshores, per a tot $i \in n$ i per a tot $j \in J$ es té que $(a_i, b_i) \in \Phi_j$. Com, per a tot $j \in J$, Φ_j és una congruència en \mathbf{A} aleshores, en particular, Φ_j és compatible amb les operacions, és a dir,

$$(\sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i \in n}), \sigma^{\mathbf{A}}((b_i)_{i \in n})) \in \Phi_j.$$

Com açò és cert per a tot $j \in J$, concloem que $(\sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i \in n}), \sigma^{\mathbf{A}}((b_i)_{i \in n})) \in \bigcap_{j \in J} \Phi_j$. És a dir $\bigcap_{j \in J} \Phi_j$ és compatible amb les operacions.

Concloem finalment que $\bigcap_{j \in J} \Phi_j$ és una congruència en \mathbf{A} .

Anem ara a demostrar que $\bigcap_{j \in J} \Phi_j$ és l'ímfim per a la família de congruències $\{\Phi_j \mid j \in J\}$. És a dir, anem a demostrar que

$$\bigwedge_{j \in J} \Phi_j = \bigcap_{j \in J} \Phi_j.$$

Notem que, per a tot $j \in J$, es té que $\bigcap_{j \in J} \Phi_j \subseteq \Phi_j$. Així, $\bigcap_{j \in J} \Phi_j$ és una fita inferior per a $\{\Phi_j \mid j \in J\}$. Només quedarà comprovar que $\bigcap_{j \in J} \Phi_j$ és la major de les fites inferiors per a $\{\Phi_j \mid j \in J\}$. Siga $\Theta \in \text{Con}(\mathbf{A})$ una fita inferior per a $\{\Phi_j \mid j \in J\}$. Així, per a tot $j \in J$, es té que $\Theta \subseteq \Phi_j$. Per la qual cosa, podem deduir que $\Theta \subseteq \bigcap_{j \in J} \Phi_j$, que és el que volíem demostrar.

Concloem, per tant, que $\bigcap_{j \in J} \Phi_j$ és l'ímfim per a $\{\Phi_j \mid j \in J\}$.

Seguint la Proposició 4.2, concloem que $(\text{Con}(\mathbf{A}), \subseteq)$ és un reticle complet. \square

De la Proposició 4.1 se segueix que $(\text{Con}(\mathbf{A}), \subseteq)$ és un reticle fitat. Donem a continuació el màxim i el mínim d'aquest conjunt parcialment ordenat.

Nota 5.2. Siga \mathbf{A} una Σ -àlgebra. És fàcil adonar-se que la relació diagonal

$$\Delta_A = \{(a, b) \in A \times A \mid a = b\}$$

i la relació codiagonal $\nabla_A = A \times A$ són congruències d' \mathbf{A} . De fet Δ_A i ∇_A són, respectivament, la mínima i la màxima congruència en $(\text{Con}(\mathbf{A}), \subseteq)$.

Abans de demostrar que $(\text{Con}(\mathbf{A}), \subseteq)$ és un reticle algebraic, necessitem entendre com es comporta el suprem en aquest reticle. Per a les congruències trobem que l'ímfim coincideix amb la intersecció (Teorema 5.3) però la unió de congruències no és, en general, una congruència (ni tan sols és transitiva). Açò ens porta a introduir l'operador de congruència generada, anàleg a l'operador de subàlgebra generada de la Definició 5.6.

Definició 5.9. Siga \mathbf{A} una Σ -àlgebra i $\phi \subseteq A \times A$ una relació qualsevol. Definim la congruència generada per ϕ , denotada per $\text{Cg}_{\mathbf{A}}(\phi)$, com la intersecció de totes les congruències d' \mathbf{A} que contenen ϕ , és a dir,

$$\text{Cg}_{\mathbf{A}}(\phi) = \bigcap \{\Phi \in \text{Con}(\mathbf{A}) \mid \phi \subseteq \Phi\}.$$

Notem que aquesta definició té sentit, ja que $\nabla_A \in \text{Con}(\mathbf{A})$ i $\phi \subseteq A \times A$, de manera que la família sobre la qual fem la intersecció no és buida. A més, pel Teorema 5.3, $\text{Cg}_{\mathbf{A}}(\phi)$ és, efectivament, una congruència d' \mathbf{A} , i és la menor congruència que conté ϕ .

La següent proposició ens caracteritza el suprem en $(\text{Con}(\mathbf{A}), \subseteq)$ en termes de l'operador de congruència generada.

Proposició 5.5. Siga \mathbf{A} una Σ -àlgebra i $\{\Phi_j \mid j \in J\}$ una família de congruències d' \mathbf{A} . Aleshores

$$\bigvee_{j \in J} \Phi_j = \text{Cg}_{\mathbf{A}} \left(\bigcup_{j \in J} \Phi_j \right).$$

Demostració. Anomenem $S = \text{Cg}_{\mathbf{A}} \left(\bigcup_{j \in J} \Phi_j \right)$. Hem de comprovar que S és la menor fita superior de $\{\Phi_j \mid j \in J\}$ en $(\text{Con}(\mathbf{A}), \subseteq)$.

En primer lloc, S és una fita superior. En efecte, per a tot $j \in J$ es té que

$$\Phi_j \subseteq \bigcup_{j \in J} \Phi_j \subseteq \text{Cg}_{\mathbf{A}} \left(\bigcup_{j \in J} \Phi_j \right) = S,$$

on la darrera inclusió es té per la Definició 5.9.

En segon lloc, S és la menor fita superior. Siga $\Theta \in \text{Con}(\mathbf{A})$ una fita superior de $\{\Phi_j \mid j \in J\}$, és a dir, $\Phi_j \subseteq \Theta$ per a tot $j \in J$. Aleshores $\bigcup_{j \in J} \Phi_j \subseteq \Theta$. Com que Θ és una congruència que conté $\bigcup_{j \in J} \Phi_j$ i $\text{Cg}_{\mathbf{A}} \left(\bigcup_{j \in J} \Phi_j \right)$ és la menor congruència amb aquesta propietat, concloem que $S \subseteq \Theta$.

Per tant, $S = \bigvee_{j \in J} \Phi_j$. □

El següent lema és la peça clau i recull la finitarietat de la noció de congruència: com que les condicions que defineixen una congruència involucren cada vegada un nombre finit d'elements, qualsevol parell de la congruència generada per ϕ ja apareix en la congruència generada per algun subconjunt finit de ϕ .

Lema 5.2. *Siga \mathbf{A} una Σ -àlgebra i $\phi \subseteq A \times A$. Aleshores*

$$\text{Cg}_{\mathbf{A}}(\phi) = \bigcup \{ \text{Cg}_{\mathbf{A}}(F) \mid F \subseteq \phi, F \text{ finit} \}.$$

Demostració. Anomenem $U = \bigcup \{ \text{Cg}_{\mathbf{A}}(F) \mid F \subseteq \phi, F \text{ finit} \}$.

L'inclusió $U \subseteq \text{Cg}_{\mathbf{A}}(\phi)$ és immediata: per a tot subconjunt finit $F \subseteq \phi$ es té que $F \subseteq \phi$, d'on $\text{Cg}_{\mathbf{A}}(F) \subseteq \text{Cg}_{\mathbf{A}}(\phi)$ per la monotonia de $\text{Cg}_{\mathbf{A}}$ (conseqüència directa de la Definició 5.9). Per tant, la unió de tots aquests conjunts està continguda en $\text{Cg}_{\mathbf{A}}(\phi)$.

Per a l'inclusió contrària, vejam primer que U és una congruència d' \mathbf{A} .

Reflexiva. Siga $a \in A$. Notem que $\emptyset \subseteq \phi$ és finit i $(a, a) \in \text{Cg}_{\mathbf{A}}(\emptyset)$, ja que $\text{Cg}_{\mathbf{A}}(\emptyset)$ és una congruència i, per tant, reflexiva. Així $(a, a) \in U$.

Simètrica. Siguen $a, b \in A$ tals que $(a, b) \in U$. Aleshores existeix un subconjunt finit $F \subseteq \phi$ amb $(a, b) \in \text{Cg}_{\mathbf{A}}(F)$. Com que $\text{Cg}_{\mathbf{A}}(F)$ és una congruència, és simètrica, d'on $(b, a) \in \text{Cg}_{\mathbf{A}}(F) \subseteq U$.

Transitiva. Siguen $a, b, c \in A$ tals que $(a, b), (b, c) \in U$. Aleshores existeixen subconjunts finits $F_1, F_2 \subseteq \phi$ amb $(a, b) \in \text{Cg}_{\mathbf{A}}(F_1)$ i $(b, c) \in \text{Cg}_{\mathbf{A}}(F_2)$. Considerem $F = F_1 \cup F_2$, que és un subconjunt finit de ϕ . Per la monotonia de $\text{Cg}_{\mathbf{A}}$, tenim que $(a, b), (b, c) \in \text{Cg}_{\mathbf{A}}(F)$, i com que $\text{Cg}_{\mathbf{A}}(F)$ és una congruència, és transitiva, d'on $(a, c) \in \text{Cg}_{\mathbf{A}}(F) \subseteq U$.

Compatible amb les operacions. Siga $\sigma \in \Sigma_n$ un símbol d'operació n -ari i siguen $(a_i)_{i \in n}$ i $(b_i)_{i \in n}$ dues famílies en A^n satisfent que, per a cada $i \in n$, $(a_i, b_i) \in U$. Per a cada $i \in n$ existeix un subconjunt finit $F_i \subseteq \phi$ tal que $(a_i, b_i) \in \text{Cg}_{\mathbf{A}}(F_i)$. Considerem $F = \bigcup_{i \in n} F_i$. Com que n és finit i cada F_i és finit, F és un subconjunt finit de ϕ . A més, per la monotonia de $\text{Cg}_{\mathbf{A}}$, es té que $(a_i, b_i) \in \text{Cg}_{\mathbf{A}}(F)$ per a tot $i \in n$. Com que $\text{Cg}_{\mathbf{A}}(F)$ és una congruència, és compatible amb les operacions, d'on

$$(\sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i \in n}), \sigma^{\mathbf{A}}((b_i)_{i \in n})) \in \text{Cg}_{\mathbf{A}}(F) \subseteq U.$$

Per tant, U és una congruència d' \mathbf{A} .

Finalment, per a tot $(a, b) \in \phi$ es té que $\{(a, b)\}$ és un subconjunt finit de ϕ i $(a, b) \in \text{Cg}_{\mathbf{A}}(\{(a, b)\}) \subseteq U$, d'on $\phi \subseteq U$. Com que U és una congruència que conté ϕ i $\text{Cg}_{\mathbf{A}}(\phi)$ és la menor amb aquesta propietat, concloem que $\text{Cg}_{\mathbf{A}}(\phi) \subseteq U$.

Per tant, $\text{Cg}_{\mathbf{A}}(\phi) = U$. □

Amb aquests resultats podem caracteritzar els elements compactes de $(\text{Con}(\mathbf{A}), \subseteq)$.

Proposició 5.6. *Siga \mathbf{A} una Σ -àlgebra i $\Phi \in \text{Con}(\mathbf{A})$. Si Φ és finitament generada, és a dir, si existeix un subconjunt finit $\phi \subseteq A \times A$ tal que $\Phi = \text{Cg}_{\mathbf{A}}(\phi)$, aleshores Φ és un element compacte de $(\text{Con}(\mathbf{A}), \subseteq)$.*

Demostració. Suposem que $\Phi = \text{Cg}_{\mathbf{A}}(\phi)$ amb $\phi = \{(a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m)\} \subseteq A \times A$ finit. Siga $\{\Phi_j \mid j \in J\}$ una família de congruències tal que $\Phi \subseteq \bigvee_{j \in J} \Phi_j$. Hem de trobar un subconjunt finit $J_0 \subseteq J$ tal que $\Phi \subseteq \bigvee_{j \in J_0} \Phi_j$.

Per la Proposició 5.5, $\bigvee_{j \in J} \Phi_j = \text{Cg}_{\mathbf{A}}\left(\bigcup_{j \in J} \Phi_j\right)$. Com que $\phi \subseteq \Phi \subseteq \text{Cg}_{\mathbf{A}}\left(\bigcup_{j \in J} \Phi_j\right)$, pel Lema 5.2 cada $(a_k, b_k) \in \phi$ pertany a $\text{Cg}_{\mathbf{A}}(G_k)$ per a algun subconjunt finit $G_k \subseteq \bigcup_{j \in J} \Phi_j$. Anomenem $G = \bigcup_{k=1}^m G_k$, que és un subconjunt finit d' $\bigcup_{j \in J} \Phi_j$. Cada element de G pertany a algun Φ_j , de manera que, prenent un índex per a cada element de G , existeix un subconjunt finit $J_0 \subseteq J$ tal que $G \subseteq \bigcup_{j \in J_0} \Phi_j$.

Aleshores, per a tot $k \in \{1, \dots, m\}$, es té que

$$(a_k, b_k) \in \text{Cg}_{\mathbf{A}}(G_k) \subseteq \text{Cg}_{\mathbf{A}}(G) \subseteq \text{Cg}_{\mathbf{A}}\left(\bigcup_{j \in J_0} \Phi_j\right) = \bigvee_{j \in J_0} \Phi_j,$$

on hem emprat la monotonia de $\text{Cg}_{\mathbf{A}}$ i de nou la Proposició 5.5. Així, $\phi \subseteq \bigvee_{j \in J_0} \Phi_j$ i, com que aquest darrer és una congruència, $\Phi = \text{Cg}_{\mathbf{A}}(\phi) \subseteq \bigvee_{j \in J_0} \Phi_j$.

Per tant, Φ és compacte. □

Finalitzarem la secció comprovant que $(\text{Con}(\mathbf{A}), \subseteq)$ és un reticle algebraic.

Teorema 5.4. *Siga Σ una signatura i siga \mathbf{A} una Σ -àlgebra. Aleshores $(\text{Con}(\mathbf{A}), \subseteq)$ és un reticle algebraic.*

Demostració. Seguint la Definició 4.2 i el Teorema 5.3, queda vore que $(\text{Con}(\mathbf{A}), \subseteq)$ és compactament generat, és a dir, que tota congruència és el suprem d'un conjunt d'elements compactes.

Siga $\Phi \in \text{Con}(\mathbf{A})$ una congruència. Per a cada $(a, b) \in \Phi$, considerem $\text{Cg}_{\mathbf{A}}(\{(a, b)\})$, la congruència generada pel parell (a, b) . Per la Proposició 5.6, com que $\{(a, b)\}$ és finit, cada $\text{Cg}_{\mathbf{A}}(\{(a, b)\})$ és un element compacte de $(\text{Con}(\mathbf{A}), \subseteq)$.

Anem a demostrar que

$$\Phi = \bigvee_{(a,b) \in \Phi} \text{Cg}_{\mathbf{A}}(\{(a, b)\}).$$

Per la Proposició 5.5, tenim que

$$\bigvee_{(a,b) \in \Phi} \text{Cg}_{\mathbf{A}}(\{(a, b)\}) = \text{Cg}_{\mathbf{A}}\left(\bigcup_{(a,b) \in \Phi} \text{Cg}_{\mathbf{A}}(\{(a, b)\})\right).$$

D'una banda, per a tot $(a, b) \in \Phi$ es té que $(a, b) \in \text{Cg}_{\mathbf{A}}(\{(a, b)\})$, d'on

$$\Phi \subseteq \bigcup_{(a,b) \in \Phi} \text{Cg}_{\mathbf{A}}(\{(a, b)\})$$

i, per monotonia de $\text{Cg}_{\mathbf{A}}$, $\Phi = \text{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi) \subseteq \text{Cg}_{\mathbf{A}}\left(\bigcup_{(a,b) \in \Phi} \text{Cg}_{\mathbf{A}}(\{(a, b)\})\right)$, on hem emprat que Φ és una congruència i, per tant, $\text{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi) = \Phi$.

D'altra banda, per a tot $(a, b) \in \Phi$ es té que $\text{Cg}_{\mathbf{A}}(\{(a, b)\}) \subseteq \Phi$, ja que Φ és una congruència que conté (a, b) i $\text{Cg}_{\mathbf{A}}(\{(a, b)\})$ és la menor amb aquesta propietat. Per tant, $\bigcup_{(a,b) \in \Phi} \text{Cg}_{\mathbf{A}}(\{(a, b)\}) \subseteq \Phi$ i, de nou per monotonia,

$$\text{Cg}_{\mathbf{A}}\left(\bigcup_{(a,b) \in \Phi} \text{Cg}_{\mathbf{A}}(\{(a, b)\})\right) \subseteq \text{Cg}_{\mathbf{A}}(\Phi) = \Phi.$$

Concloem que $\Phi = \bigvee_{(a,b) \in \Phi} \text{Cg}_{\mathbf{A}}(\{(a, b)\})$, és a dir, Φ és el suprem d'una família d'elements compactes. Com que Φ era arbitrària, $(\text{Con}(\mathbf{A}), \subseteq)$ és compactament generat.

Concloem que $(\text{Con}(\mathbf{A}), \subseteq)$ és un reticle algebraic. \square

Capítol 6

Conclusions

Al llarg d'aquest treball hem recorregut la teoria de l'ordre des dels seus fonaments fins a una de les seues manifestacions més riques en el context de l'àlgebra universal. El fil conductor ha estat la noció de reticle i, molt especialment, el diàleg constant entre dues maneres de mirar-la: la perspectiva ordinal, basada en la relació de comparació, i la perspectiva algebraica, basada en les operacions d'ímfim i suprem.

Partint de les nocions bàsiques de preordre, ordre parcial i conjunt parcialment ordenat, hem introduït els elements distingits que poblen aquestes estructures —mínims, màxims, ínfims i suprem— i hem comprovat, mitjançant una col·lecció d'exemples canònics, que apareixen de manera natural en àmbits tan diversos com l'aritmètica, la teoria de conjunts o la lògica proposicional. Aquests exemples, lluny de ser meres il·lustracions, han actuat com un fil que hem représ al llarg de tot el treball, mostrant com un mateix objecte adquireix significats distints segons el context.

El nucli conceptual ha estat la demostració de l'equivalència entre les dues presentacions de reticle: la que el descriu com un conjunt parcialment ordenat en què tot parell d'elements té ímfim i suprem, i la que el descriu com una àlgebra amb dues operacions binàries subjectes a les lleis commutativa, associativa i d'absorció. Aquesta equivalència no és només un resultat tècnic; és precisament el pont que ens ha permès transitar lliurement entre l'ordre i l'àlgebra, i que dóna sentit a tot el desenvolupament posterior.

Sobre aquesta base hem abordat els reticles complets, on tot subconjunt admet ímfim i suprem. Hem demostrat que tota completitud comporta la fitació i, sobretot, hem establert un criteri d'economia notable: la clausura per a ínfims arbitraris (o, simètricament, per a suprem arbitraris) ja és suficient per a garantir la completitud. Aquest resultat, aparentment modest, ha resultat ser l'eina decisiva en l'últim capítol, ja que sovint és molt més senzill verificar l'existència d'ínfims que no la de suprem.

Finalment, en el context de l'àlgebra universal hem vist culminar tot el desenvolupament anterior amb dos exemples canònics i paral·lels: el reticle de subàlgebres i el reticle de congruències d'una Σ -àlgebra. En tots dos casos hem demostrat que es tracta de reticles

algebraics. La simetria entre ambdues construccions —l'operador de subàlgebra generada i el de congruència generada, el paper de la finitarietat de les operacions, la caracterització dels elements compactes— posa de manifest que no estem davant de dos resultats aïllats, sinó davant d'un mateix patró estructural que la teoria de l'ordre permet capturar i unificar.

En conjunt, el treball il·lustra una de les virtuts més característiques de les matemàtiques: la capacitat d'un llenguatge abstracte per a revelar l'estructura comuna que subjau a fenòmens en aparença inconnexos. Els reticles ofereixen aquest llenguatge per a l'ordre, amb la seua presència recurrent en l'àlgebra.

El recorregut realitzat deixa obertes diverses línies que en serien continuacions naturals. Entre les més immediates, l'estudi dels reticles distributius i modulars, amb el teorema de representació de Birkhoff per als reticles distributius finits com a fita destacada; la teoria de reticles complets des de l'òptica de les connexions de Galois i els operadors de clausura; o l'aprofundiment en la connexió entre reticles complets i topologia que insinua la teoria dels frames i la topologia sense punts. Cadascuna d'aquestes direccions confirmaria, des d'un angle nou, la centralitat que la teoria de l'ordre ocupa en l'edifici de les matemàtiques.

Bibliografia

- [1] G. Birkhoff. *Lattice theory*. Vol. 25. American Mathematical Soc., 1940.
- [2] E. Cosme Llópez, R. Ruiz Mora i N. Tamarit. «A comic page for the first isomorphism theorem». A: *Journal of Mathematics and the Arts* 16.1-2 (2022), pàg. 29-56.
- [3] B. A. Davey i H. A. Priestley. *Introduction to Lattices and Order*. 2a ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [4] G. Grätzer. *Lattice Theory: Foundation*. Basel: Birkhäuser, 2011.
- [5] S. Roman. *Lattices and Ordered Sets*. New York: Springer, 2008.
- [6] H. P. Sankappanavar i S. Burris. *A Course in Universal Algebra*. Disponible lliurement en línia. New York: Springer, 1981.