Treball Fi de Grau – Curs 2025/2026

Estudi categorial de la teoria de monoides

Autor: **Marco Ruiz Valderrama**

Tutor: ENRIC COSME LLÓPEZ

Facultat de Matemàtiques

Grau en Matemàtiques

Prefaci

Les ciències tenen una tendència natural a la diversificació i la especialització. En particular, les matemàtiques contemporànies consten de moltes branques que, a la seua vegada, no paren de créixer i diversificar-se. Tot i això, existixen característiques comunes en totes elles —idees, conceptes i construccions— que donen peu a la construcció d'una teoria general d'estructures.

Este treball no és més que una excusa per introduir-me a la teoria de categories com a estudiant en l'etapa final del grau i familiaritzar-me amb les seues nocions fonamentals. El meu objectiu amb la seua redacció és adquirir les ferramentes bàsiques necessàries per poder afrontar lectures més complexes i seguir formant-me en este camp, bé siga acadèmicament o de manera autodidacta. El meu interés per esta disciplina es remunta a un primer contacte amb la noció de functor en un curs de Topologia, ara fa dos anys, en estudiar el grup fonamental d'un espai topològic. La idea que ferramentes de la teoria de grups es podien aplicar per estudiar característiques pròpies de la topologia me paregué fascinant i és precisament esta capacitat unificadora i de transvasament d'informació d'un àmbit a un altre la que em va atraure cap a esta àrea.

Ara bé, l'alt nivell d'abstracció al què es desenvolupa la teoria de categories podria frustrar qualsevol intent d'aproximació inicial si no es disposa d'exemples i aplicacions que proporcionen un sòl estable que facilite la comprensió i interiorització dels conceptes. És per això que la primera part d'este treball es dedicarà a la introducció d'una sèrie de definicions i resultats bàsics de la teoria de monoides que s'aniran desenvolupant al llarg del text i exerciran una doble funció: serviran de motivació i, alhora, d'il·lustració dels distints conceptes categòrics que s'aborden. Un monoide és una estructura simple però no trivial que la fa idònia com a camp de prova, ja que permet no perdre's en detalls tècnics propis de l'àlgebra, a la vegada que aporta el contingut suficient per dotar d'interés l'anàlisi. La tria, a més, és natural ja que moltes situacions que trobem en la teoria de categories —inclosa la mateixa definició de categoria— es poden veure com una generalització de les construccions que trobem en monoides.

El present document ha estat concebut com un text autocontingut, on l'únic prerequisit per al lector és un coneixement bàsic de la teoria de conjunts; si bé és cert que disposar d'unes nocions generals bàsiques sobre estructures algebraiques també seria convenient perquè els exemples actuen com un suport intuïtiu en lloc de suposar un obstacle addicional. A pesar d'això, el rigor no es veu compromès: es donen proves completes i detallades de tots els resultats exposats, a excepció, ocasionalment, d'aquells que resulten trivials o que, per la seua naturalesa, se situen fora de l'objectiu d'este estudi.

Es presentarà gran part del catàleg bàsic estàndard de la teoria de categories: categories, functors, transformacions naturals, categories de functors, equivalències i adjuncions, però es deixen fora altres elements bàsics —com límits i colímits, representabilitat, el lema de Yoneda i les mònades— per evitar una extensió excessiva del text. Tot i això, el treball complix el seu objectiu introductori i oferix les nocions necessàries per a la correcta comprensió d'estos conceptes descartats i d'altres més complexos.

Vull dedicar unes línies per expressar la meua gratitud, en primer lloc, a tots els amics i familiars que tanta paciència han demostrat al llarg d'estos quatre anys; aquells que, en els moments difícils, han sabut ser comprensius i no s'han separat del meu costat encara que jo poguera oferir ben poc a canvi. Per altra banda, vull donar les gràcies als meus pares per l'esforç econòmic i domèstic que els ha suposat oferir-me l'oportunitat d'accedir a una carrera universitària i la llibertat de dedicar-me als estudis plenament. També vull donar les gràcies a tots els docents —universitaris i preuniversitaris— que han cregut en mi, m'han aconsellat i m'han ajudat a arribar fins ací. Especialment, vull destacar Elena Méndez, pel seu compromís dins i fora de l'institut, i perquè és gràcies a ella que hui em trobe a les portes de ser matemàtic; i Enric Cosme, per la seua guia i dedicació a la direcció d'este treball, el gran volum de temps invertit en correccions, el rigor de les seues aportacions i la seua disponibilitat constant.

Per últim, vull aprofitar este espai per posar en valor el paper de l'educació pública en la construcció d'una societat millor i agrair l'oportunitat que m'ha brindat per poder formar-me. Voldria estendre este reconeixement també a totes les persones que, mitjançant el seu treball, han fet possible la meua formació: des del personal administratiu i de manteniment fins als treballadors del transport públic, passant per totes les persones que han lluitat pels sistemes públics que, hui, ens fan la vida un poquet millor a tots. Conseqüentment, vull traslladar tot el meu suport als docents que complixen ja un mes en vaga indefinida, sacrificant-se i lluitant per la qualitat de l'ensenyança de tots: sou l'orgull d'un poble.

Picassent, 6 de juny de 2026. MARCO RUIZ VALDERRAMA

Índex

Introducció

En essència, la teoria de categories és una teoria matemàtica general sobre estructures i sistemes d'estructures i, tot i ser un camp encara en desenvolupament, ja ha provat ser un marc conceptual molt potent. Des que fou introduïda per primera vegada a mitjan segle XX per Samuel Eilenberg i Saunders Mac Lane, ha passat a ocupar una posició central en la matemàtica contemporània, la informàtica teòrica i la física matemàtica i ha demostrat tindre rellevància també en camps com la lògica i la filosofia, on és, tant un objecte d'interés de propi estudi, com un llenguatge eficaç. La teoria oferix una visió global de les matemàtiques que permet concebre les distintes àrees de la disciplina com a illes de coneixement —les categories— i ens proporciona les ferramentes necessàries per a tendir ponts entre elles —els functors—.

La teoria de categories es coneix afectuosament com *absurditat abstracta* (abstract nonsense), un terme encunyat —suposadament— pel matemàtic Norman Steenrod. Esta denominació és precisa i no necessàriament despectiva: parla de coses absurdes en tant que se centra totalment en l'estructura, oblidant el significat d'allò que les categories representen. L'esperit de la disciplina no és tant l'estudi dels objectes en si, sinó de les relacions que s'establixen entre objectes; estudiar "coses i coses que van de coses a coses" sense la necessitat d'explicitar si estes coses són conjunts, grups, anells, espais vectorials, espais topològics o objectes molt més exòtics.

En este treball, explorarem els conceptes bàsics de la teoria de categories a través d'una revisió sistemàtica de la teoria de monoides, analitzant com les seues construccions s'integren i es redefinixen en el marc de les categories. El treball s'articula de la següent manera: el primer capítol es dedica a presentar la teoria de monoides des d'una perspectiva algebraica clàssica, establint les bases sobre les quals pivotarà la resta de l'estudi; el segon capítol introduïx una selecció de conceptes fonamentals de la teoria de categories que ens permetran realitzar una revisió categorial de les idees presentades en el primer capítol, i els dos últims capítols tenen com a finalitat establir relacions estructurals entre la categoria dels monoides i la categoria de les categories.

Convencions

Com assenyala Barry Mazur en el seu article *When is one thing equal to some other thing?* [17], una categoria és, intrínsecament, una noció relativa en tant que depèn de tindre una teoria de conjunts en ment. La teoria de categories no dicta quina teoria de conjunts s'ha d'utilitzar ni tampoc dona regles sobre què hauria de ser una teoria de conjunts. Un dels aspectes més bonics de la teoria de categories és que depén de l'usuari aportar una teoria de conjunts amb què treballar. Fins i tot es pot adoptar una posició més interessant i veure la teoria de conjunts base com una mena de variable lliure i, conseqüentment, no fer cap tria. Així, per exemple, la categoria de monoides seria un motlle que aplicar sobre qualsevol teoria de conjunts.

Nosaltres farem ús de **ZFC**, la teoria de conjunts de Zermelo-Fraenkel amb l'axioma d'elecció, i, per tal d'evitar paradoxes clàssiques, suposarem també l'existència d'un univers de Grothendieck $\mathbf{U}$ fixat. Els conjunts $\mathbf{U}$-xicotets seran aquells que siguen elements d'$\mathbf{U}$ mentre que els conjunts $\mathbf{U}$-grans seran aquells que siguen subconjunts d'$\mathbf{U}$. Per tant, encara que al llarg del treball de vegades parlem de *col·leccions* d'objectes o morfismes, sempre estarem pensant en conjunts dins d'este marc.

Farem ús també de la interpretació conjuntista dels números naturals, donada inductivament per

$$
\begin{aligned}
&0 = \emptyset, \\
&n + 1 = n \cup \{n\}.
\end{aligned}
$$

Així, el conjunt dels números naturals $\mathbb{N}$ es definix en este sistema com el menor conjunt que conté a 0 i que és tancat sota l'operació de successió definida com $S(n) = n + 1$.

Per altra banda, hem de parlar sobre diagrames. Un diagrama típic de conjunts i aplicacions entre ells és el següent:

$$
\begin{tikzcd}
& Y \arrow[dr, "g"] & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & Z
\end{tikzcd}
$$

Direm que el diagrama és commutatiu quan $h = g \circ f$, on $g \circ f$ la composició usual d'aplicacions $g \circ f \colon X \longrightarrow Z$ definida per $x \longmapsto g\big(f(x)\big)$. Si este és el cas, ho denotarem mitjançant una fletxa circular al centre del diagrama de la següent manera:

$$
\begin{tikzcd}
& Y \arrow[dr, "g"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & Z
\end{tikzcd}
$$

Estos mateixos diagrames apliquen també en altres contextos matemàtics. Per exemple, les lletres X, Y i Z poden representar monoides mentre que f, g i h denoten homomorfismes entre ells. En general, direm que un diagrama és commutatiu, i ho denotarem de la mateixa manera, quan les composicions de tots els camins dirigits que compartixen punt de partida i d'arribada coincidixen. Al llarg d'este treball farem un ús freqüent d'este tipus de diagrames, que jugaran un paper fonamental en el desenvolupament del discurs.

Capítol 1

Introducció a teoria de monoides

L'estructura de monoide constituïx un dels pilars més simples i, alhora, més presents en àlgebra abstracta. Partint de la idea bàsica d'un conjunt dotat d'una operació, el monoide sorgix quan imposem les dues condicions mínimes per a garantir un comportament algebraic estable: tindre una operació binària associativa i disposar d'un element neutre que actue com a unitat.

En este capítol es presenten els conceptes elementals de la teoria de monoides, incloent el monoide lliure i les accions de monoides sobre conjunts.

1.1 Monoides

Definició 1.1 (Monoide)**.** Un monoide és una tupla $(M, \bullet, e)$ on:

1. M és un conjunt no buit.
2. $\bullet\colon M \times M \longrightarrow M$ és una operació binària sobre M associativa a la que anomenarem producte.
3. $e \in M$ és un element anomenat unitat que fa de neutre per a $\bullet$, i.e.,
$$m \bullet e = e \bullet m = m,$$
per a tot $m \in M$.

Denotarem per $\mathbf{M}$ a la tupla $(M, \bullet, e)$. Si l'operació $\bullet$ és commutativa, direm que $\mathbf{M}$ és **abelià**. Si tot element en M té un invers per al producte direm que $\mathbf{M}$ és un **grup**.

Exemple 1.1. Són monoides els números naturals, i els enters, amb la suma i el zero $(\mathbb{N}, +, 0)$, $(\mathbb{Z}, +, 0)$.

Exemple 1.2. El monoide més senzill és l'anomenat *monoide trivial*, que consistix en un conjunt amb un sol element $\{e\}$ dotat amb l'operació $e \bullet e = e$.

Proposició 1.1. *Tot conjunt dona lloc a un monoide.*

Demostració. Siga X un conjunt i considerem el conjunt d'aplicacions d'X en X

$$\mathrm{End}_{\mathsf{Set}}(X) := \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(X, X) = \{f : X \longrightarrow X \mid f \text{ aplicació}\}.$$

Notem que $\mathrm{End}_{\mathsf{Set}}(X)$ té estructura de monoide amb la composició d'aplicacions i id_X com a neutre. □

En endavant denotarem per $\mathbf{End}_{\mathsf{Set}}(\boldsymbol{X})$ el monoide definit sobre el conjunt d'aplicacions $\mathrm{End}_{\mathsf{Set}}(X)$ i l'anomenarem *monoide d'endomorfismes* generat pel conjunt X.

Proposició 1.2. *Tot monoide té un únic element neutre.*

Demostració. Suposem que $e, e^* \in M$ són elements neutres, aleshores

$$e^* = e^* \bullet e = e.$$

En l'anterior seqüència d'igualtats, la primera igualtat es té pel fet que e és neutre, mentre que la segona es té pel fet que e^* també ho és. □

Una vegada fixada la noció de monoide, convé analitzar com podem obtenir-ne de nous a partir dels ja coneguts. Presentem a continuació dues construccions senzilles:

Definició 1.2 (Monoide oposat)**.** Donat un monoide $\mathbf{M} = (M, \bullet, e)$, definim el seu monoide oposat com el monoide $\mathbf{M}^{\mathrm{op}} = (M, \bullet^{\mathrm{op}}, e)$, on

$$m_1 \bullet^{\mathrm{op}} m_2 := m_2 \bullet m_1.$$

Definició 1.3 (Monoide producte)**.** Donats dos monoides $\mathbf{M} = (M, \bullet_{\mathbf{M}}, e_{\mathbf{M}})$ i $\mathbf{N} = (N, \bullet_{\mathbf{N}}, e_{\mathbf{N}})$, definim el producte de $\mathbf{M}$ i $\mathbf{N}$, i el denotem per $\mathbf{M} \times \mathbf{N}$, com el monoide $\big(M \times N, \bullet_{\mathbf{M}\times\mathbf{N}}, (e_{\mathbf{M}}, e_{\mathbf{N}})\big)$, on

$$(m_1, n_1) \bullet_{\mathbf{M}\times\mathbf{N}} (m_2, n_2) := (m_1 \bullet_{\mathbf{M}} m_2, n_1 \bullet_{\mathbf{N}} n_2).$$

És senzill comprovar que estes construccions verifiquen la definició de monoide.

També podem obtenir nous monoides identificant subconjunts que mantenen l'estructura original —submonoides— i agrupant elements sota una congruència per a generar estructures més simples —monoides quocient—. Definim estos conceptes a continuació.

Definició 1.4. Siga $\mathbf{M} = (M, \bullet, e)$ un monoide i $N \subseteq M$. Direm que $\mathbf{N} = (N, \bullet, e)$ és un **submonoide** de $\mathbf{M}$ si:

1. $e \in N$,
2. per a tot $n_1, n_2 \in N$ es té que $n_1 \bullet n_2 \in N$.

En este cas escriurem $\mathbf{N} \leq \mathbf{M}$. Denotem per $\mathrm{Sub}(\mathbf{M})$ al conjunt de tots els submonoides de $\mathbf{M}$.

Definició 1.5. Siga $\mathbf{M} = (M, \bullet, e)$ un monoide i $R \subseteq M \times M$ una relació d'equivalència en M. Direm que R és una congruència per a M si per a tot $m_1, m_2, n_1, n_2 \in M$ amb $(m_1, m_2), (n_1, n_2) \in R$, aleshores,

$$(m_1 \bullet n_1, m_2 \bullet n_2) \in R.$$

Denotem per $\mathrm{Con}(\mathbf{M})$ el conjunt de totes les congruències sobre M. Notem que una relació d'equivalència $R \subseteq M \times M$ és una congruència si, i només si,

$$\big(R, \bullet_{\mathbf{M}\times\mathbf{M}}, (e, e)\big) \leq \mathbf{M} \times \mathbf{M}.$$

Definició 1.6. Siga $\mathbf{M} = (M, \bullet, e)$ un monoide i R una congruència en $\mathbf{M}$. Definim $\mathbf{M}/R = (M/R, \star, [e]_R)$, on:

1. M/R és el quocient de M per R,
2. $\star\colon M/R \times M/R \longrightarrow M/R$
   $([m]_R, [n]_R) \longmapsto [m \bullet n]_R$,
3. $[e]_R \in M/R$.

Anomenarem a $\mathbf{M}/R$ **monoide quocient** de $\mathbf{M}$ respecte de R. L'operació $\star$ està ben definida en haver exigit que $R \in \mathrm{Con}(\mathbf{M})$.

Proposició 1.3. $\mathbf{M}/R$ *és un monoide.*

Demostració. Podem comprovar fàcilment que el monoide quocient és, efectivament, un monoide. Per a això comprovem que M/R és tancat sota $\star$, l'associativitat de $\star$ i que $[e]_R$ és el neutre:

1. Trivial atenent a que M és tancat sota $\bullet$ i a la definició de M/R.
2. Siguen $[a]_R, [b]_R, [c]_R \in M/R$. Es complix que

$$\begin{aligned}
([a]_R \star [b]_R) \star [c]_R &= ([a \bullet b]_R) \star [c]_R \\
&= ([(a \bullet b) \bullet c]_R \\
&= [a \bullet (b \bullet c)]_R \\
&= [a]_R \star [b \bullet c]_R \\
&= [a]_R \star ([b]_R \star [c]_R).
\end{aligned}$$

   En l'anterior seqüència d'igualtats només hem utilitzat la definició de $\star$ i l'associativitat de $\bullet$.

3. Siga $[m]_R \in M/R$ un element qualsevol. Aleshores,

$$[m]_R \star [e]_R = [m \bullet e]_R = [m]_R = [e \bullet m]_R = [e]_R \star [m]_R.$$

   L'anterior seqüència d'igualtats s'obté del fet que e és el neutre per a $\bullet$.

$\square$

1.2 Homomorfismes de monoides

Una vegada definida l'estructura interna d'un monoide, el següent pas natural és establir com podem comparar monoides entre si. Esta comparació es fa amb aplicacions que conserven l'estructura definida; en el nostre cas, la forma en què es combinen els elements i la naturalesa de la unitat. En esta secció introduïm els homomorfismes de monoides i les seues propietats bàsiques.

Definició 1.7 (Homomorfisme)**.** Siguen $\mathbf{M} = (M, \bullet, e_{\mathbf{M}})$ i $\mathbf{N} = (N, *, e_{\mathbf{N}})$ dos monoides. Una aplicació $f\colon M \longrightarrow N$ s'anomena homomorfisme de monoides si satisfà

1. $f(e_{\mathbf{M}}) = e_{\mathbf{N}}$,
2. $f(m_1 \bullet m_2) = f(m_1) * f(m_2)$.

En este cas, escriurem $f\colon \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{N}$. Denotem per $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Mon}}(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ al conjunt de tots els homomorfismes de $\mathbf{M}$ a $\mathbf{N}$. Direm que $\mathbf{M}$ és isomorf a $\mathbf{N}$ si existix un homomorfisme bijectiu, i.e., un isomorfisme de monoides, de $\mathbf{M}$ a $\mathbf{N}$. Si és així, escriurem $\mathbf{M} \cong \mathbf{N}$.

Proposició 1.4.

1. *La composició d'homomorfismes és homomorfisme.*
2. *L'aplicació identitat és homomorfisme.*

Demostració. Pel que fa al primer enunciat: Siguen $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ i $\mathbf{P}$ monoides. Si $f\colon \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{N}$ i $g\colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{P}$ són homomorfismes volem veure que

$$g \circ f\colon \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{P}$$

també ho és:

1. Comprovem que la composició preserva el neutre

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(e_{\mathbf{M}}) &= g\big(f(e_{\mathbf{M}})\big) && \text{(Def. de composició)}\\
&= g(e_{\mathbf{N}}) && \text{(f homomorfisme)}\\
&= e_{\mathbf{P}}. && \text{(g homomorfisme)}
\end{aligned}$$

2. Comprovem que la composició preserva el producte. Siguen $m_1, m_2 \in M$.

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(m_1 \bullet_{\mathbf{M}} m_2) &= g\big(f(m_1 \bullet_{\mathbf{M}} m_2)\big) && \text{(Def. de composició)}\\
&= g\big(f(m_1) \bullet_{\mathbf{N}} f(m_2)\big) && \text{(f homomorfisme)}\\
&= g\big(f(m_1)\big) \bullet_{\mathbf{P}} g\big(f(m_2)\big) && \text{(g homomorfisme)}\\
&= (g \circ f)(m_1) \bullet_{\mathbf{P}} (g \circ f)(m_2). && \text{(Def. de composició)}
\end{aligned}$$

Pel que fa al segon enunciat: Siga $\mathbf{M}$ un monoide. Volem veure que

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_{\mathbf{M}}\colon \mathbf{M} &\longrightarrow \mathbf{M} \\ m &\longmapsto m \end{aligned}$$

és homomorfisme.

1. Preserva el neutre
$$\mathrm{id}_{\mathbf{M}}(e_{\mathbf{M}}) = e_{\mathbf{M}},$$
2. Preserva el producte
$$\mathrm{id}_{\mathbf{M}}(m_1 \bullet m_2) = m_1 \bullet m_2 = \mathrm{id}_{\mathbf{M}}(m_1) \bullet \mathrm{id}_{\mathbf{M}}(m_2).$$

□

Exemple 1.3. En $(\mathbb{Z}, +, 0)$ definim la relació congruència mòdul m, és a dir

$$a \equiv b \bmod m \text{ si, i només si, } m \mid a - b.$$

La congruència mòdul m és una relació d'equivalència:

1. **Reflexiva**: Si $a \in \mathbb{Z}$, tenim que $m \mid 0 = a - a$ si, i només si, $a \equiv a \bmod m$.
2. **Simètrica**: Si $a, b \in \mathbb{Z}$ són tals que $a \equiv b \bmod m$ si, i només si, $m \mid a - b$ si, i només si, $a - b = km$, aleshores $-(a - b) = -km$ si, i només si, $b - a = (-k)m$ si, i només si, $m \mid b - a$ si, i només si, $b \equiv a \bmod m$.
3. **Transitiva**: Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$ són tals que $a \equiv b \bmod m$, $b \equiv c \bmod m$ si, i només si, $m \mid a - b$, $m \mid b - c$, aleshores $m \mid (a - b) + (b - c) = a + (-b + b) - c = a - c$ si, i només si, $a \equiv c \bmod m$.

Denotem el quocient de $\mathbb{Z}$ per esta relació com $\mathbb{Z}_m$. Fàcilment es comprova que la congruència mòdul m és una congruència. Siguen $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tals que $a \equiv b \bmod m$, $c \equiv d \bmod m$ si, i només si, $m \mid a - b$, $m \mid c - d$. Aleshores es complix que

$$m \mid (a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d) \text{ si, i només si, } (a + c) \equiv (b + d) \bmod m.$$

A més,

$$\begin{aligned} \pi\colon \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}_m \\ a &\longmapsto [a] \end{aligned}$$

és un homomorfisme de monoides.

Nota 1.1. En general, si $\mathbf{M}$ és un monoide i $\mathbf{N} \leq \mathbf{M}$ és un submonoide, aleshores l'aplicació inclusió $\iota_{\mathbf{N}}\colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{M}$ és un homomorfisme injectiu i, si R és congruència en $\mathbf{M}$, aleshores, $\pi_R\colon \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{M}/R$, la projecció canònica definida per $\pi_R(m) = [m]_R$, és un homomorfisme sobrejectiu.

En la següent proposició introduirem les nocions d'**imatge** i **nucli** d'un homomorfisme de monoides. Mentre que la imatge es comporta de forma anàloga a altres estructures algebraiques, és important notar que el nucli no es pot definir com un "subconjunt d'elements que s'envien al neutre" perquè l'absència d'inversos no permetria recuperar quins són els elements que tenen la mateixa imatge, que és el que realment es busca definint-lo. Per este motiu, definirem el nucli com una congruència que captura, precisament, esta relació.

Proposició 1.5. *Siguen* $\mathbf{M} = (M, \bullet, e_{\mathbf{M}})$ *i* $\mathbf{N} = (N, *, e_{\mathbf{N}})$ *dos monoides i siga* $f\colon \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{N}$ *un homomorfisme de monoides. Aleshores*

1. $\mathbf{Im}(\boldsymbol{f}) := \big(f[M], *, e_{\mathbf{N}}\big)$ *és un submonoide de* $\mathbf{N}$*,*
2. $\operatorname{Ker}(f) := \{(m_1, m_2) \in M \times M \mid f(m_1) = f(m_2)\}$ *és una congruència en* $\mathbf{M}$*.*

Demostració. Pel que fa al primer enunciat: Evidentment, $f[M] \subseteq \mathbf{N}$. A més, com $f(e_{\mathbf{M}}) = e_{\mathbf{N}}$ tenim que $e_{\mathbf{N}} \in f[M]$. En ser f homomorfisme tenim que

$$f(m) * f(n) = f(m \bullet n) \in f[M].$$

Concloem que $\mathbf{Im}(\boldsymbol{f}) := \big(f[M], *, e_{\mathbf{N}}\big) \leq \mathbf{N}$.

Per al segon enunciat, suposem que $(m_1, m_2), (n_1, n_2) \in \operatorname{Ker}(f)$. Aleshores,

$$f(m_1 \bullet n_1) = f(m_1) * f(n_1) = f(m_2) * f(n_2) = f(m_2 \bullet n_2)$$

i, per tant, $(m_1 \bullet n_1, m_2 \bullet n_2) \in \operatorname{Ker}(f)$, cosa que demostra que $\operatorname{Ker}(f)$ és una congruència en $\mathbf{M}$. □

Un dels resultats fonamentals en l'estudi de qualsevol estructura algebraica és la relació entre els morfismes i les estructures quocient. En teoria de monoides, esta relació l'establix el primer teorema d'isomorfia. Intuïtivament, el primer teorema d'isomorfia ens diu que, donat un homomorfisme de monoides no necessàriament injectiu, sempre podem construir un nou monoide en el qual l'homomorfisme equivalent sí que siga injectiu eliminant elements *redundants* (a ulls de l'homomorfisme).

Teorema 1.1 (Primer teorema d'isomorfia)**.** *Siguen* $\mathbf{M} = (M, \bullet, e_{\mathbf{M}})$ *i* $\mathbf{N} = (N, *, e_{\mathbf{N}})$ *dos monoides i siga* $f\colon \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{N}$ *un homomorfisme de monoides. Aleshores,*

$$\mathbf{M}/\operatorname{Ker}(f) \cong \mathbf{Im}(\boldsymbol{f}).$$

Demostració. Comprovarem que l'aplicació

$$\begin{aligned} \bar{f}\colon \mathbf{M}/\operatorname{Ker}(f) &\longrightarrow \mathbf{Im}(\boldsymbol{f}) \\ [m]_{\operatorname{Ker}(f)} &\longmapsto f(m) \end{aligned}$$

definix un isomorfisme de monoides. Siguen $[m]_{\mathrm{Ker}(f)}, [n]_{\mathrm{Ker}(f)} \in M/\mathrm{Ker}(f)$. Veiem que

$$\begin{aligned}
[m]_{\mathrm{Ker}(f)} = [n]_{\mathrm{Ker}(f)} &\iff (m,n) \in \mathrm{Ker}(f) && \text{(Def. de classe d'equivalència)}\\
&\iff f(m) = f(n) && \text{(Def. de Ker}(f))\\
&\iff \bar{f}([m]_{\mathrm{Ker}(f)}) = \bar{f}([n]_{\mathrm{Ker}(f)}). && \text{(Def. de } \bar{f})
\end{aligned}$$

Llegint d'esquerra a dreta veiem que l'aplicació està ben definida i llegint de dreta a esquerra veiem que és injectiva. Per a la sobrejectivitat, considerem $m' \in \mathrm{Im}(f)$; la qual cosa implica que existix un $m \in M$ amb $f(m) = m'$. Així, tenim que

$$\bar{f}([m]_{\mathrm{Ker}(f)}) = f(m) = m'.$$

Finalment, provem que $\bar{f}$ és homomorfisme de monoides.

1. Per una banda,
$$\bar{f}([e_{\mathbf{M}}]_{\mathrm{Ker}(f)}) = f(e_{\mathbf{M}}) = e_{\mathbf{N}} = e_{\mathbf{Im}(\boldsymbol{f})}.$$

2. Siguen ara $[m]_{\mathrm{Ker}(f)}, [n]_{\mathrm{Ker}(f)} \in M/\mathrm{Ker}(f)$. Es complix que

$$\begin{aligned}
\bar{f}([m]_{\mathrm{Ker}(f)} \star [n]_{\mathrm{Ker}(f)}) &= \bar{f}([m \bullet n]_{\mathrm{Ker}(f)}) && \text{(Def. de monoide quocient)}\\
&= f(m \bullet n) && \text{(Def. de } \bar{f})\\
&= f(m) * f(n) && (f \text{ homomorfisme})\\
&= \bar{f}([m]_{\mathrm{Ker}(f)}) * \bar{f}([n]_{\mathrm{Ker}(f)}). && \text{(Def. de } \bar{f})
\end{aligned}$$

Per tant, $\bar{f}$ és un homomorfisme de monoides. □

1.3 El monoide lliure

Un concepte interessant en la teoria de monoides és el del monoide lliure: la idea de ser capaç de dotar d'estructura a un conjunt A qualsevol sense cap informació o restricció externa al propi conjunt. En efecte, tot i que ja hem mostrat com un conjunt X qualsevol dona lloc a un monoide —el monoide $\mathbf{End}_{\mathsf{Set}}\boldsymbol{(X)}$ d'endomorfismes de X—, cal notar que el seu producte ve donat per una operació predefinida —la composició—. El lliure, per contra, es construïx "lliurement" —d'ahí el nom—, fent ús només de la definició de monoide. En esta secció presentem i desenvolupem breument esta idea.

Siga A un conjunt i $n \in \mathbb{N}$. Denotem per $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(n, A)$ al conjunt de totes les aplicacions de n en A. En este context una aplicació $w\colon n \longrightarrow A$ s'anomena **paraula** de longitud n sobre A. Denotem $w = a_0 \cdots a_{n-1}$ per referir-nos a l'aplicació

$$\begin{aligned}
w\colon n &\longrightarrow A\\
i &\longmapsto a_i.
\end{aligned}$$

Notem que existix una única paraula de longitud 0, que denotarem per λ, i l'anomenarem paraula buida sobre A. Denotem per

$$A^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(n, A)$$

al conjunt de totes les paraules sobre A. És a dir, A^* conté totes les paraules en A de qualsevol longitud.

Proposició 1.6. *Per a tot conjunt A, $\mathbf{A}^* = (A^*, \curlywedge, \lambda)$ és un monoide anomenat monoide lliure sobre A, on:*

1. *A^* és el conjunt de totes les paraules sobre A.*
2. *$\curlywedge$ és l'operació de concatenació de paraules on, si $w \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(n, A)$ i $v \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(m, A)$, definim*

$$\begin{array}{rccl} w \curlywedge v\colon & n+m & \longrightarrow & A \\ & i & \longmapsto & \begin{cases} w(i) & \text{si } i < n, \\ v(i-n) & \text{si } i \geq n. \end{cases} \end{array}$$

3. *$\lambda \in A^*$ és la paraula buida sobre A.*

Exemple 1.4. Si $A = \{a, b, c\}$, $w = abaab$ i $v = accb$, aleshores, $w \curlywedge v = abaabaccb$.

Definició 1.8 (Inserció de generadors)**.** Siga A un conjunt. L'aplicació inserció de generadors, denotada per η_A, de A en A^* és l'aplicació que interpreta cada lletra a en A com la paraula (a) de longitud 1 que només conté a a, és a dir,

$$\begin{array}{rccl} \eta_A\colon & A & \longrightarrow & A^* \\ & a & \longmapsto & \begin{array}{rccl} (a)\colon & 1 & \longrightarrow & A \\ & 0 & \longmapsto & a. \end{array} \end{array}$$

A continuació introduïm la propietat universal dels monoides lliures. Este resultat ens diu que, donada qualsevol aplicació d'A en un monoide $\mathbf{M}$, sempre podem alçar-la a un homomorfisme de monoides d'$\mathbf{A}^*$ en $\mathbf{M}$.

Teorema 1.2 (Propietat universal dels monoides lliures)**.** *Siga A un conjunt i $\mathbf{M} = (M, \bullet, e)$ un monoide. Siga $f\colon A \longrightarrow M$ una aplicació. Aleshores existix un* ***únic*** *homomorfisme de monoides $f^\sharp\colon \mathbf{A}^* \longrightarrow \mathbf{M}$ satisfent $f^\sharp \circ \eta_A = f$. És a dir, el següent diagrama commuta:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3ex, "\circlearrowright"] & A^* \arrow[d, dashed, "\exists! f^\sharp"] \\ & M. \end{tikzcd}$$

Demostració. Definim $f^\sharp$ per recursió sobre la longitud de les paraules.

Cas base ($n = 0$): En este cas, definim la imatge per $f^\sharp$ de la paraula buida com e, l'element neutre de $\mathbf{M}$.

$$f^\sharp(\lambda) = e.$$

Pas inductiu: Suposem definida l'aplicació $f^\sharp$ per a paraules de longitud n. Definim ara l'aplicació sobre paraules de longitud $n+1$. Siga $w \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(n+1, A)$. Així, existixen $v \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(n, A)$ i $a \in A$ tals que $w = v \curlywedge (a)$. Definim

$$f^\sharp(w) = f^\sharp(v) \bullet f(a).$$

Queda, així, definida $f^\sharp$. Notem que, si $w = a_0 a_1 \cdots a_{n-1}$, aleshores

$$f^\sharp(w) = f(a_0) \bullet f(a_1) \bullet \cdots \bullet f(a_{n-1}).$$

Comprovem ara que $f^\sharp$ és homomorfisme de monoides.

1. $f^\sharp(\lambda) = e$, per definició.

2. Si $w = a_0 \cdots a_{n-1}$ i $v = b_0 \cdots b_{m-1}$, aleshores

$$\begin{aligned}
f^\sharp(w \curlywedge v) &= f^\sharp(a_0 \cdots a_{n-1} b_0 \cdots b_{m-1}) && \text{(Def. de } \curlywedge) \\
&= f(a_0) \bullet \cdots \bullet f(a_{n-1}) \bullet f(b_0) \bullet \cdots \bullet f(b_{m-1}) && \text{(Def. de } f^\sharp) \\
&= \big(f(a_0) \bullet \cdots \bullet f(a_{n-1})\big) \bullet \big(f(b_0) \bullet \cdots \bullet f(b_{m-1})\big) && \text{(Ass. de } \bullet) \\
&= f^\sharp(a_0 \cdots a_{n-1}) \bullet f^\sharp(b_0 \cdots b_{m-1}) && \text{(Def. de } f^\sharp) \\
&= f^\sharp(w) \bullet f^\sharp(v). && \text{(Def. de } w \text{ i } v)
\end{aligned}$$

A més, $f^\sharp$ satisfà $f^\sharp \circ \eta_A = f$, ja que, si $a \in A$, aleshores

$$(f^\sharp \circ \eta_A)(a) = f^\sharp\big(\eta_A(a)\big) = f^\sharp\big((a)\big) = f(a).$$

Així, $f^\sharp \circ \eta_A = f$.

Suposem ara que existix una $g\colon \mathbf{A}^* \longrightarrow \mathbf{M}$ homomorfisme de monoides satisfent $g \circ \eta_A = f$. Demostrarem per inducció sobre la longitud de les paraules que $g = f^\sharp$.

Cas base ($n = 0$): El cas de la paraula buida. En ser g homomorfisme de monoides,

$$g(\lambda) = e = f^\sharp(\lambda).$$

Pas inductiu: Suposem l'enunciat cert per a paraules de longitud n. És a dir, si $v \in A^*$ és una paraula de longitud n sobre A, aleshores, $g(v) = f^\sharp(v)$.

Siga $w = v \curlywedge (a) \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(n+1, A)$.

$$
\begin{aligned}
g(w) &= g\big(v \curlywedge (a)\big) && \text{(Def. de } w\text{)}\\
&= g(v) \bullet g\big((a)\big) && (g \text{ homomorfisme de monoides})\\
&= f^\sharp(v) \bullet g\big((a)\big) && \text{(Hipòtesi inductiva)}\\
&= f^\sharp(v) \bullet g\big(\eta_A(a)\big) && \text{(Def. de } \eta_A\text{)}\\
&= f^\sharp(v) \bullet \big(g \circ \eta_A\big)(a) && \text{(Def. de composició)}\\
&= f^\sharp(v) \bullet f(a) && (g \circ \eta_A = f)\\
&= f^\sharp(w). && \text{(Def. de } f^\sharp\text{)}
\end{aligned}
$$

Per tant, $g = f^\sharp$ i tenim la unicitat de $f^\sharp$. □

Nota 1.2. Analitzem el cas més elemental de l'aplicació de la propietat universal. Siga $\mathbf{M} = (M, \bullet, e)$ un monoide qualsevol i considerem l'aplicació $\mathrm{id}_M \colon M \longrightarrow M$. Aleshores, l'extensió $\mathrm{id}_M^\sharp \colon \mathbf{M}^* \longrightarrow \mathbf{M}$ actua sobre les paraules de $\mathbf{M}^*$ "multiplicant" les seues lletres segons el producte de $\mathbf{M}$. És a dir, si prenem una paraula qualsevol $m_0 \cdots m_{n-1} \in M^*$:

$$\mathrm{id}_M^\sharp(m_0 \cdots m_{n-1}) = m_0 \bullet \cdots \bullet m_{n-1}.$$

Açò es veu clar per com hem definit $f^\sharp$ en la demostració del teorema anterior.

Este homomorfisme té una propietat interessant. Veient com actua $\mathrm{id}_M^\sharp$ sobre paraules, resulta immediat comprovar que $\mathrm{id}_M^\sharp[M^*] = M$ i, per tant, $\mathbf{Im}(\mathbf{id}_M^\sharp) = \mathbf{M}$. En conseqüència, aplicant el Primer teorema d'isomorfia, obtenim l'isomorfisme

$$\mathbf{M} \cong \mathbf{M}^* / \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_M^\sharp).$$

Nota 1.3. A part del monoide d'endomorfismes i el lliure, existixen altres maneres habituals de generar monoides a partir d'un conjunt X, tot i que no les estudiarem en profunditat en este treball. Alguns exemples destacats són:

1. El **monoide de les parts**: Donat el conjunt de les parts $\mathcal{P}(X)$, podem definir fàcilment dues estructures de monoide:
   (a) Unió: L'operació és $\cup$ i el neutre és el conjunt buit $\emptyset$.
   (b) Intersecció: L'operació és $\cap$ i el neutre és el propi conjunt X.
2. El **monoide de relacions binàries**: Considerem totes les relacions sobre X (subconjunts del producte cartesià $X \times X$). El conjunt subjacent és $\mathcal{P}(X \times X)$, la nostra operació és la composició de relacions[1] i el nostre neutre serà la relació diagonal —la identitat—.

[1] Donades dues relacions binàries $R \subseteq X \times Y$ i $S \subseteq Y \times Z$, definim la seua composició $R;S$ mitjançant la regla $xR;Sz \iff \exists y \in Y$ tal que $xRySz$.

3. El **monoide adjunt**: En el cas que $(X, \bullet)$ siga originalment un semigrup (conjunt amb una operació associativa però sense neutre), podem forçar l'existència d'un neutre. El conjunt subjacent passa a ser $X \cup \{e\}$, amb $e \notin X$, es manté l'operació igual per als elements de X i definim $x \bullet e = e \bullet x = x$, per a tot $x \in X$.

És important notar que totes estes construccions requerixen també informació addicional o una estructura prèvia (com l'operació del semigrup o l'estructura de reticle de $\mathcal{P}(X)$). Açò reforça la importància del monoide lliure.

1.4 Accions de monoides

Donat un monoide, podem entendre la seua operació interna —fixat un dels arguments— com una col·lecció d'instruccions que ens diu com moure'ns per dins del mateix monoide. Esta noció es pot generalitzar a objectes de naturalesa distinta, com ara conjunts, mitjançant la noció d'acció —a dreta o esquerra, segons l'argument que decidim fixar—. Així, l'acció és un operador que transforma els elements d'un monoide en endomorfismes d'un conjunt X: aplicacions que fan moure els elements d'eixe conjunt. En esta secció desenvoluparem este concepte.

Definició 1.9 (Acció d'un monoide sobre un conjunt)**.** Siga $\mathbf{M} = (M, \bullet, e)$ un monoide i X un conjunt. Una acció a esquerra de $\mathbf{M}$ sobre X és una aplicació

$$\begin{array}{rccc} \cdot \colon & M \times X & \longrightarrow & X \\ & (m, x) & \longmapsto & m \cdot x \end{array}$$

que satisfà

1. $e \cdot x = x$ per a tot $x \in X$,
2. $m_2 \cdot (m_1 \cdot x) = (m_2 \bullet m_1) \cdot x$ per a tot $x \in X$, $m_2, m_1 \in M$.

En este cas direm que $(X, \cdot)$ és un $\mathbf{M}$-conjunt amb acció a l'esquerra.

Nota 1.4. L'existència del monoide oposat permet tractar les accions a la dreta de $\mathbf{M}$ com a accions a esquerra de $\mathbf{M}^{\mathrm{op}}$. Per esta raó, i per tal de simplificar, ens limitarem a l'estudi de les accions a esquerra sense que això supose una pèrdua de generalitat. Així, quan parlem de $\mathbf{M}$-conjunts, els suposarem com a $\mathbf{M}$-conjunts amb acció a esquerra.

Exemple 1.5. Un exemple natural d'acció s'obté en considerar el monoide d'endomorfismes generat per un conjunt Y, $\mathbf{End}_{\mathsf{Set}}\boldsymbol{(Y)}$, i el conjunt de totes les aplicacions d'un conjunt X en Y, $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(X, Y)$. L'acció a l'esquerra de $\mathbf{End}_{\mathsf{Set}}\boldsymbol{(Y)}$ sobre $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(X, Y)$ es definix mitjançant la composició d'aplicacions:

$$\begin{array}{rccc} \circ \colon & \mathrm{End}_{\mathsf{Set}}(Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(X, Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(X, Y) \\ & (g, f) & \longmapsto & g \circ f. \end{array}$$

A continuació es presenta una proposició que formalitza eixa noció d'operador que introduíem a la presentació de la secció.

Proposició 1.7. *Donar una acció a esquerra de* $\mathbf{M}$ *sobre* X *és el mateix que donar un homomorfisme de monoides de* $\mathbf{M}$ *en* $\mathbf{End_{\mathsf{Set}}(X)}$.

Demostració. Siga $\bullet\colon M \times X \longrightarrow X$ una acció a esquerra de $\mathbf{M}$ sobre X. Considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} f_{\bullet}\colon \mathbf{M} &\longrightarrow \mathbf{End_{\mathsf{Set}}(X)} \\ m &\longmapsto \quad f_{\bullet}(m)\colon X \longrightarrow X \\ &\qquad\qquad\qquad x \longmapsto m \bullet x. \end{aligned}$$

Veurem que $f_{\bullet}$ és un homomorfisme de monoides. Es complix que

$$\begin{aligned} f_{\bullet}(e_{\mathbf{M}})\colon X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto e_{\mathbf{M}} \bullet x = x. \end{aligned}$$

Així, com per a tot $x \in X$, $\big(f_{\bullet}(e_{\mathbf{M}})\big)(x) = \mathrm{id}_X(x)$, concloem que

$$f_{\bullet}(e_{\mathbf{M}}) = \mathrm{id}_X,$$

és a dir, $f_{\bullet}$ preserva identitats. Per altra banda, si $m_2, m_1 \in M$, aleshores

$$\begin{aligned} f_{\bullet}(m_2 \bullet m_1)\colon X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto (m_2 \bullet m_1) \bullet x = m_2 \bullet (m_1 \bullet x). \end{aligned}$$

Com, per a tot $x \in X$, $f_{\bullet}(m_2 \bullet m_1)(x) = f_{\bullet}(m_2)\big(f_{\bullet}(m_1)(x)\big)$, concloem que

$$f_{\bullet}(m_2 \bullet m_1) = f_{\bullet}(m_2) \circ f_{\bullet}(m_1).$$

És a dir, $f_{\bullet}$ preserva composicions.

Siga ara un homomorfisme de monoides de $\mathbf{M}$ en $\mathbf{End_{\mathsf{Set}}(X)}$

$$f\colon \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{End_{\mathsf{Set}}(X)}.$$

Considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} \bullet_f\colon M \times X &\longrightarrow X \\ (m, x) &\longmapsto m \bullet_f x = f(m)(x). \end{aligned}$$

Veurem que $\bullet_f$ és una acció de monoides a esquerra. Per una banda, tenim que

$$\begin{aligned} e_{\mathbf{M}} \bullet_f x &= f(e_{\mathbf{M}})(x) && \text{(Def. de } \bullet_f) \\ &= \mathrm{id}_X(x) && (f \text{ homomorfisme}) \\ &= x. && \text{(Def. de } \mathrm{id}_X) \end{aligned}$$

Per altra banda, si $m_2, m_1 \in M$, trobem que

$$\begin{aligned}
m_2 \bullet_f (m_1 \bullet_f x) &= m_2 \bullet_f \big(f(m_1)(x)\big) && \text{(Def. de } \bullet_f\text{)}\\
&= f(m_2)\big(f(m_1)(x)\big) && \text{(Def. de } \bullet_f\text{)}\\
&= \big(f(m_2) \circ f(m_1)\big)(x) && \text{(Def. de composició)}\\
&= f(m_2 \bullet m_1)(x) && (f \text{ homomorfisme})\\
&= (m_2 \bullet m_1) \bullet_f x. && \text{(Def. de } \bullet_f\text{)}
\end{aligned}$$

Així, $\bullet_f$ és, efectivament, una acció a l'esquerra. $\square$

Ara que entenem un poc millor l'estructura interna dels **M**-conjunts podem passar a parlar de les aplicacions que respecten dita estructura: les aplicacions de **M**-conjunts. En este sentit, una aplicació de **M**-conjunts ha de ser una aplicació entre conjunts que siga compatible amb l'acció del monoide; és a dir, una transformació que preserve la manera com els elements de **M** fan moure els elements del conjunt.

Definició 1.10. Siguen $(X, \bullet_X)$, $(Y, \bullet_Y)$ dos **M**-conjunts. Una aplicació de **M**-conjunts de $(X, \bullet_X)$ en $(Y, \bullet_Y)$ és una aplicació $f\colon X \longrightarrow Y$ que satisfà

$$f(m \bullet_X x) = m \bullet_Y f(x)$$

per a tot $m \in M$ i per a tot $x \in X$. És a dir, el següent diagrama commuta:

$$\begin{tikzcd}
M \times X \arrow[r, "\bullet_X"] \arrow[d, "\mathrm{id}_M \times f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X \arrow[d, "f"] \\
M \times Y \arrow[r, "\bullet_Y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

En termes d'elements, el diagrama anterior esdevé:

$$\begin{tikzcd}
(m, x) \arrow[r, mapsto, "\bullet_X"] \arrow[d, mapsto, "\mathrm{id}_M \times f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & m \bullet_X x \arrow[d, mapsto, "f"] \\
(m, f(x)) \arrow[r, mapsto, "\bullet_Y"'] & f(m \bullet_X x) = m \bullet_Y f(x)
\end{tikzcd}$$

Per tancar el capítol, presentem les propietats bàsiques de les aplicacions de **M**-conjunts.

Proposició 1.8. *Siga* $\mathbf{M}$ *un monoide.*

1. *La composició d'aplicacions de* $\mathbf{M}$*-conjunts és una aplicació de* $\mathbf{M}$*-conjunts.*

2. *La identitat és una aplicació de* $\mathbf{M}$*-conjunts.*

Demostració. Pel que fa al primer enunciat: Siguen els $\mathbf{M}$-conjunts $(X, \bullet_X)$, $(Y, \bullet_Y)$, $(Z, \bullet_Z)$ i siguen $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon Y \longrightarrow Z$ dues aplicacions de $\mathbf{M}$-conjunts. Tenim

$$\begin{tikzcd}
M \times X \arrow[r, "\bullet_X"] \arrow[d, "\mathrm{id}_M \times f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X \arrow[d, "f"] \\
M \times Y \arrow[r, "\bullet_Y"] \arrow[d, "\mathrm{id}_M \times g"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Y \arrow[d, "g"] \\
M \times Z \arrow[r, "\bullet_Z"] & Z
\end{tikzcd}$$

Siguen $m \in M$, $x \in X$ qualssevol. Es complix que

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(m \bullet_X x) &= g(f(m \bullet_X x)) && \text{(Def. de composició)}\\
&= g(m \bullet_Y f(x)) && \text{(f aplicació de $\mathbf{M}$-conjunts)}\\
&= m \bullet_Z g(f(x)) && \text{(g aplicació de $\mathbf{M}$-conjunts)}\\
&= m \bullet_Z (g \circ f)(x). && \text{(Def. de composició)}
\end{aligned}$$

Per tant, $g \circ f$ és una aplicació de $\mathbf{M}$-conjunts.

Pel que fa al segon enunciat: Considerem l'$\mathbf{M}$-conjunt $(X, \bullet)$ i la seua aplicació identitat. Tenim

$$\begin{tikzcd}
M \times X \arrow[r, "\bullet"] \arrow[d, "\mathrm{id}_M \times \mathrm{id}_X"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X \arrow[d, "\mathrm{id}_X"] \\
M \times X \arrow[r, "\bullet"'] & X
\end{tikzcd}$$

Siguen $x \in X$, $m \in M$ qualssevol. Aleshores

$$\mathrm{id}_X(m \bullet x) = m \bullet x = m \bullet \mathrm{id}_X(x).$$

Per tant, id_X és una aplicació de $\mathbf{M}$-conjunts. $\square$

Capítol 2

Introducció a teoria de categories

"Category theory takes a bird's eye view of mathematics. From high in the sky, details become invisible, but we can spot patterns that were impossible to detect from ground level."

Tom Leinster, *Basic Category Theory.*

La teoria de categories naix de l'observació que moltes propietats de sistemes matemàtics es poden definir i simplificar mitjançant una representació amb diagrames de fletxes. Per exemple, un monoide pot ser descrit com una tupla (M, μ, η), on M és un conjunt i

$$\mu\colon M \times M \longrightarrow M, \quad \eta\colon 1 \longrightarrow M$$

són dos aplicacions tals que els dos diagrames següents commuten:

$$\begin{tikzcd} M \times M \times M \arrow[r, "\mathrm{id}_M \times \mu"] \arrow[d, "\mu \times \mathrm{id}_M"'] & M \times M \arrow[d, "\mu"] \\ M \times M \arrow[r, "\mu"'] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \times M \arrow[r, "\eta \times \mathrm{id}_M"] \arrow[d, "\lambda"] & M \times M \arrow[d, "\mu"] & M \times 1 \arrow[l, "\mathrm{id}_M \times \eta"'] \arrow[d, "\rho"] \\ M \arrow[r, phantom, "="] & M \arrow[r, phantom, "="] & M \end{tikzcd}$$

On λ i ρ venen donades per $\lambda(0, m) = m$ i $\rho(m, 0) = m$ per a tot $m \in M$. Ací μ definix el producte del monoide i η representa la tria de la unitat. En efecte, si denotem $\mu(m_1, m_2) = m_1 \bullet m_2$ i $\eta(0) = e \in M$, els diagrames en termes d'elements esdevenen

$$
\begin{tikzcd}
(m_1, m_2, m_3) \arrow[r, mapsto, "\mathrm{id}_M \times \mu"] \arrow[d, mapsto, "\mu \times \mathrm{id}_M"'] & (m_1, m_2 \bullet m_3) \arrow[d, mapsto, "\mu"] \\
(m_1 \bullet m_2, m_3) \arrow[r, mapsto, "\mu"'] & (m_1 \bullet m_2) \bullet m_3 = m_1 \bullet (m_2 \bullet m_3)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(0, m) \arrow[r, mapsto, "\eta \times \mathrm{id}_M"] \arrow[d, mapsto, "\lambda"] & (e, m) \arrow[d, mapsto, "\mu"] & (m, e) \arrow[d, mapsto, "\mu"] & (m, 0) \arrow[l, mapsto, "\mathrm{id}_M \times \eta"'] \arrow[d, mapsto, "\rho"] \\
m \arrow[r, phantom, "="] & e \bullet m & m \bullet e \arrow[r, phantom, "="] & m
\end{tikzcd}
$$

De la mateixa manera, un homomorfisme de monoides pot ser descrit mitjançant diagrames. Si $\mathbf{M} = (M, \mu, \eta)$ i $\mathbf{N} = (N, \mu', \eta')$ són dos monoides —cadascun descrits mitjançant diagrames com abans— aleshores un homomorfisme de $\mathbf{M}$ en $\mathbf{N}$ pot ser definit com una aplicació $f \colon M \longrightarrow N$ tal que els diagrames següents commuten:

$$
\begin{tikzcd}
M \times M \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "f \times f"'] & M \arrow[d, "f"] & 1 \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, equal] & M \arrow[d, "f"] \\
N \times N \arrow[r, "\mu'"'] & N & 1 \arrow[r, "\eta'"'] & N
\end{tikzcd}
$$

Denotant $\mu'(n_1, n_2) = n_1 * n_2$ i $\eta'(0) = e_{\mathbf{N}}$, en termes d'elements, açò vol dir que $f(m_1 \bullet m_2) = f(m_1) * f(m_2)$ i que $f(e_{\mathbf{M}}) = e_{\mathbf{N}}$.

Per finalitzar esta revisió categorial del capítol anterior, una acció d'un monoide (M, μ, η) sobre un conjunt X es pot definir com una aplicació $\nu \colon M \times X \longrightarrow X$ tal que els següents diagrames commuten:

$$
\begin{tikzcd}
M \times M \times X \arrow[r, "\mathrm{id}_M \times \nu"] \arrow[d, "\mu \times \mathrm{id}_X"'] & M \times X \arrow[d, "\nu"] & 1 \times X \arrow[r, "\eta \times \mathrm{id}_X"] \arrow[dr, "\lambda"'] & M \times X \arrow[d, "\nu"] \\
M \times X \arrow[r, "\nu"'] & X & & X
\end{tikzcd}
$$

Si escrivim $\nu(m, x) = m \cdot x$ per denotar el resultat de l'acció de m sobre x, els diagrames de dalt diuen simplement que

$$m_2 \cdot (m_1 \cdot x) = (m_2 \bullet m_1) \cdot x, \quad e \cdot x = x$$

per a tots $m_1, m_2 \in M$, $x \in X$. Les aplicacions de **M**-conjunts ja les hem descrit "categorialment" al capítol anterior.

Esta filosofia és molt potent en el sentit que permet despullar les construccions matemàtiques de detalls superflus, deixant les estructures i relacions internes a la vista. Això permet tant estendre i generalitzar una mateixa idea a distints contextos com reconèixer estructures i patrons similars en situacions que d'entrada no pareixen estar relacionades i veure-les com a casos particulars d'un mateix tot. Com a mostra d'esta versatilitat, considerem dos exemples:

Generalització: Si en la definició de l'operació interna d'un monoide substituïm un dels M per un conjunt qualsevol X, obtenim naturalment la definició d'acció d'un monoide sobre un conjunt, com podem comprovar comparant els diagrames corresponents.

Unificació: La definició abstracta de producte categorial (vegeu Secció 2.3.2) ens permet veure com una mateixa idea abasta des del producte cartesià de conjunts fins a l'ínfim en un preordre, passant per la topologia producte en espais topològics i també, clar està, pel monoide producte.

En este capítol introduirem una selecció de conceptes fonamentals de la teoria de categories que ens proporcionaran les ferramentes necessàries per explorar, en capítols posteriors, les relacions estructurals entre el món dels monoides i el de les categories. Alhora, aprofitarem este nou llenguatge per revisar i reformular, des d'una perspectiva categorial, les propietats dels monoides estudiades al capítol anterior —un treball que ja hem encetat en esta mateixa introducció—.

2.1 Categories

Definició 2.1 (Categoria)**.** Una categoria C ve donada per:

1. Una col·lecció d'objectes $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$,
2. Una col·lecció de morfismes $\mathrm{Mor}(\mathsf{C})$ tal que
   (a) Per a cada morfisme f existixen dos objectes $\mathrm{dom}(f)$ i $\mathrm{cod}(f)$ anomenats *domini* i *codomini* de f. Escriurem $f : x \longrightarrow y$ per indicar que $x = \mathrm{dom}(f)$ i $y = \mathrm{cod}(f)$ i denotarem per $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(x, y)$ la subcol·lecció de morfismes f en $\mathrm{Mor}(\mathsf{C})$ tals que $\mathrm{dom}(f) = x$ i $\mathrm{cod}(f) = y$.
   (b) Donats $f : x \longrightarrow y$ i $g : y \longrightarrow z$ en C, és a dir, $\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)$, aleshores existix un morfisme
   $$g \circ f : x \longrightarrow y$$
   en C anomenat *composició* de f amb g.

(c) Per a cada objecte x existix un morfisme

$$\mathrm{id}_x \colon x \longrightarrow x$$

anomenat *morfisme identitat* en x.

Satisfent els següents axiomes:

1. Associativitat de la composició:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

   per a tot $f \colon x \longrightarrow y$, $g \colon y \longrightarrow z$ i $h \colon z \longrightarrow w$.

2. Unitat:

$$\mathrm{id}_y \circ f = f, \qquad f \circ \mathrm{id}_x = f$$

   per a tot $f \colon x \longrightarrow y$.

Estos axiomes es poden representar pictòricament demanant que els diagrames següents commuten:

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[rr, "h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f"] \arrow[d, "f"'] \arrow[drr, "g \circ f"] & & w \\
y \arrow[rr, "g"'] \arrow[urr, "h \circ g"'] & & z \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_x"'] \arrow[drr, "f"] & & y \arrow[d, "\mathrm{id}_y"] \\
x \arrow[rr, "f"'] & & y
\end{tikzcd}$$

Presentem a continuació diversos exemples de categories.

Exemple 2.1.

1. La categoria buida és la categoria sense objectes i, per tant, sense morfismes, és a dir, la categoria la col·lecció d'objectes de la qual és el conjunt buit.

2. Set, la categoria que té per objectes els conjunts en l'univers de Grothendieck $\mathbf{U}$ fixat a la introducció i per morfismes les aplicacions entre ells, amb la composició habitual d'aplicacions i l'aplicació identitat com a neutre per a cada objecte.

3. $\mathsf{Set}^{\mathsf{bij}}$, on els objectes són els mateixos que en Set i els morfismes són aplicacions de conjunts bijectives.

4. $\mathsf{Set}^{\downarrow\uparrow}$, on:

   (a) Els objectes són els mateixos que en Set.

(b) (f, g) és morfisme de X en Y si, i només si,

$$f \colon X \longrightarrow Y \text{ és aplicació entre conjunts,}$$
$$g \colon Y \longrightarrow X \text{ és aplicació entre conjunts.}$$

(c) Per a cada parell de morfismes $(f_1, g_1) \colon X \longrightarrow Y$ i $(f_2, g_2) \colon Y \longrightarrow Z$, la regla de composició és

$$(f_2, g_2) \circ^{\mathsf{Set}^{\downarrow\uparrow}} (f_1, g_1) = (f_2 \circ f_1, g_1 \circ g_2)$$

morfisme en $\mathsf{Set}^{\downarrow\uparrow}$.

(d) La identitat per a cada objecte X ve donada per $\mathrm{id}_X^{\mathsf{Set}^{\downarrow\uparrow}} = (\mathrm{id}_X^{\mathsf{Set}}, \mathrm{id}_X^{\mathsf{Set}})$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "f_1"] \arrow[rr, bend left=50, "f_2 \circ f_1"] & Y \arrow[l, shift left, "g_1"] \arrow[r, shift left, "f_2"] & Z \arrow[l, shift left, "g_2"] \arrow[ll, bend left=50, "g_1 \circ g_2"]
\end{tikzcd}$$

5. Set_*, la categoria de conjunts puntejats. Amb *puntejat* ens referim a un conjunt no buit X amb un element destacat x anomenat el *punt base* de X. Ho denotarem (X, x). Els morfismes $f \colon (X, x) \longrightarrow (Y, y)$ de conjunts puntejats són aplicacions de conjunts de X en Y que envien punts base a punts base, és a dir, que satisfan $f(x) = y$. La regla de composició és la composició habitual d'aplicacions i el neutre per a cada objecte és l'aplicació identitat.

6. Mon, la categoria de tots els monoides i homomorfismes de monoides amb la composició habitual d'aplicacions i l'homomorfisme identitat com a neutre per a cada objecte.

7. $\mathbf{M}$-Set, la categoria de $\mathbf{M}$-conjunts i aplicacions de $\mathbf{M}$-conjunts. (Ben definida per la Proposició 1.8).

Pràcticament no existixen teories matemàtiques que no encaixen en este format d'objectes i morfismes fins a tal punt que resulta difícil dir si el rol de la categoria en este context és més descriptiu o prescriptiu. La idea de categoria dona lloc a una possible plantilla per a qualsevol teoria matemàtica: la teoria hauria de tindre substantius i verbs, i.e., objectes i morfismes, i hauria d'existir una noció de composició per als morfismes. És a dir, la teoria hauria d'estar empaquetada en una categoria.

Presentem a continuació una proposició que ens deixa entreveure la relació propera que existix entre monoides i categories.

Proposició 2.1. *Tot monoide* $\mathbf{M} = (M, \bullet, e)$ *dona lloc a una categoria* M *on*

1. $\mathrm{Ob}(\mathsf{M}) = \{e\}$,
2. $\mathrm{Mor}(\mathsf{M}) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{M}}(e, e) = \mathrm{End}_{\mathsf{M}}(e) = M$, *amb* $m_1, m_2 \colon e \longrightarrow e$,
3. $m_2 \circ m_1 = m_2 \bullet m_1$,
4. $\mathrm{id}_e = e$.

És a dir, el conjunt de morfismes de la categoria (endomorfismes de l'únic objecte) amb la composició i el neutre així definits és precisament el monoide $\mathbf{M}$.

La categoria induïda per un monoide està ben definida per la Proposició 1.4 i trivialment es pot comprovar que es complixen els axiomes de categoria. Arran d'esta identificació podem derivar la idea que una categoria és una generalització del monoide que s'obté en relaxar la condició sobre el producte, el qual deixa de ser una operació total per esdevindre una operació parcial. En efecte, el que acabem de veure és que tot monoide es pot veure com una categoria amb un sol objecte, i.e., on qualsevol parell de morfismes és componible. Formalitzarem esta relació al Capítol 4 (vegeu Exemple 4.1).

Les categories complixen diverses propietats que resulten anàlogues a allò que trobem en l'àlgebra clàssica. Al llarg d'este capítol apareixeran algunes d'estes propietats, començant per la unicitat de la unitat per a la composició:

Proposició 2.2 (Unicitat del morfisme identitat)**.** *Siga* C *una categoria i* $x \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$. *Aleshores, el morfisme identitat en* x, id_x, *és únic.*

Demostració. Suposem que existixen dos morfismes identitat en x: id_x i id^*_x. Aleshores,

$$\mathrm{id}^*_x = \mathrm{id}^*_x \circ \mathrm{id}_x = \mathrm{id}_x.$$

En l'anterior seqüència d'igualtats, la primera igualtat es té pel fet que id_x fa de neutre per a la composició, mentre que la segona es té pel fet que id^*_x també fa de neutre per a la composició. □

Introduïm a continuació la noció de subcategoria.

Definició 2.2 (Subcategoria)**.** Siga C una categoria. Una categoria S és una **subcategoria** de C si es té que

1. $\mathrm{Ob}(\mathsf{S}) \subseteq \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$,
2. per a cada parell $s_1, s_2 \in \mathrm{Ob}(\mathsf{S})$, $\mathrm{Hom}_{\mathsf{S}}(s_1, s_2) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(s_1, s_2)$,
3. per a cada objecte s en S, $\mathrm{id}^{\mathsf{S}}_s = \mathrm{id}^{\mathsf{C}}_s$,
4. la llei de composició en S és la restricció de la llei de composició en C als morfismes de S.

S s'anomena **subcategoria plena** de C si, a més de les condicions anteriors, per a cada parell $s_1, s_2 \in \mathrm{Ob}(\mathsf{S})$, $\mathrm{Hom}_{\mathsf{S}}(s_1, s_2) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(s_1, s_2)$.

Nota 2.1. Per la seua naturalesa, una subcategoria plena de C queda completament determinada per la seua col·lecció d'objectes en C.

Exemple 2.2. Per a qualsevol categoria C, la categoria buida i la mateixa C són subcategories plenes de C.

Exemple 2.3. És evident que $\mathsf{Set}^{\mathrm{bij}}$ és una subcategoria de Set.

Exemple 2.4. Les subcategories de M, la categoria induïda pel monoide $\mathbf{M}$, són exactament la categoria buida i les categories induïdes pels submonoides de $\mathbf{M}$.

Introduïm a continuació la noció d'igualtat entre categories.

Definició 2.3. Direm que dos categories C i D són iguals, i ho escriurem $\mathsf{C} = \mathsf{D}$ si:

1. $\mathrm{Ob}(\mathsf{C}) = \mathrm{Ob}(\mathsf{D})$,
2. per a tot parell x, y d'objectes, $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(x, y) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(x, y)$,
3. les regles de composició de morfismes són iguals,
4. les identitats per a cada objecte són iguals.

2.1.1 Morfismes

Com ja hem comentat, allò que fa tan versàtil la teoria de categories és el concepte de morfisme i la representació de propietats mitjançant diagrames. Tant és així que un dels pares de la disciplina, Saunders Mac Lane, proposa en *Categories for the Working Mathematician* [15] aprofitar la correspondència entre objectes i morfismes identitat per prescindir dels primers i definir les categories purament en termes de morfismes. Des d'esta perspectiva, la categoria induïda per un monoide no seria més que el mateix monoide descrit amb altres paraules. Passem ara a estudiar el concepte de morfisme, definicions clau i propietats. Començarem per les nocions de monomorfisme i epimorfisme, les quals busquen generalitzar les idees d'injectivitat i sobrejectivitat d'aplicacions entre conjunts.

Definició 2.4. Siga $f\colon x \longrightarrow y$ un morfisme en C.

1. Direm que f és un **monomorfisme** quan és cancel·lable a esquerra, i.e., per a $g, h\colon z \longrightarrow x$ morfismes en C qualssevol es complix que, si $f \circ g = f \circ h$, aleshores $g = h$.
2. Direm que f és un **epimorfisme** quan és cancel·lable a dreta, i.e., per a $g, h\colon y \longrightarrow z$ morfismes en C qualssevol es complix que, si $g \circ f = h \circ f$, aleshores $g = h$.

Als morfismes que són monomorfismes i epimorfismes se'ls anomena bimorfismes.

Nota 2.2. Notem que, en Set, els monomorfismes són precisament les aplicacions injectives, mentre que els epimorfismes són les aplicacions sobrejectives.

Definició 2.5.

1. Un **endomorfisme** d'un objecte x en una categoria C és un morfisme $f\colon x \longrightarrow x$.
2. Una **involució** és un endomorfisme $f\colon x \longrightarrow x$ que satisfà $f \circ f = \mathrm{id}_x$.

Denotarem per $\mathrm{End}_{\mathsf{C}}(x) := \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(x, x)$ la col·lecció d'endomorfismes de x. Este conjunt, amb la regla de composició heretada de la categoria, forma un monoide que denotarem per $\mathbf{End}_{\mathsf{C}}(\boldsymbol{x})$ i generalitza el monoide induït per un conjunt que vam estudiar en el Capítol 1.

A continuació introduïm les diferents nocions de morfisme invers.

Definició 2.6. Siguen $f\colon x \longrightarrow y$ i $g\colon y \longrightarrow x$ morfismes en C.

1. Direm que g és invers a l'esquerra (o retracció) de f si $g \circ f = \mathrm{id}_x$.
2. Direm que g és invers a la dreta (o secció) de f si $f \circ g = \mathrm{id}_y$.
3. Direm que g és invers de f si és invers a l'esquerra i a la dreta. En este cas direm que f és un **isomorfisme** i que x i y són isomorfs. La isomorfia és una relació d'equivalència i l'escriurem $x \cong y$.

Un endomorfisme que és, alhora, un isomorfisme s'anomena **automorfisme**. Donat un objecte x, denotem per $\mathrm{Aut}_{\mathsf{C}}(x)$ el conjunt dels seus automorfismes.

Si $g \circ f = \mathrm{id}_x$, aleshores la composició $h = f \circ g$ és idempotent. Generalment un morfisme $h\colon y \longrightarrow y$ s'anomena **idempotent** quan $h \circ h = h$.

Nota 2.3. Si un morfisme admet invers per l'esquerra, aleshores és un monomorfisme i, si admet invers per la dreta, aleshores és un epimorfisme (equivalentment, tota secció és un monomorfisme i tota retracció és un epimorfisme). El recíproc no sempre és cert.

Nota 2.4. Fàcilment es comprova que un monoide $\mathbf{M}$ és un grup si, i només si, cadascun dels morfismes de la seua categoria induïda M és un isomorfisme.

Nota 2.5. Abans de continuar, cal fer un xicotet incís per parlar sobre la rellevància de l'isomorfisme en la teoria de categories. Com s'ha apuntat anteriorment en parlar de la visió de Mac Lane, les categories es poden concebre com a estructures definides exclusivament per les seues relacions internes. Esta perspectiva connecta amb un debat de caràcter essencialment filosòfic: la naturalesa de la igualtat en matemàtiques.

Barry Mazur reflexiona en el seu article *When is one thing equal to some other thing?* [17] sobre el problema de la representació dels objectes matemàtics, assenyalant que la noció d'igualtat és sovint "esvarosa" (slippery). Mazur entén la igualtat com una espècie de "relació d'equivalència" les classes d'equivalència de la qual són els objectes que volem definir. Estes classes estarien formades per les distintes maneres de presentar un objecte de forma explícita, ignorant, així, el que ell anomena "andamiatge" (scaffolding) o el context específic de la seua presentació per a quedar-nos amb l'essència estructural que ens resulta d'interés dins d'un marc de discurs determinat.

En este context, Mazur assenyala explícitament la teoria de categories com un marc on esta noció d'equivalència es materialitza en l'isomorfisme. Precisament perquè l'interés de la disciplina se centra en la xarxa de relacions que un objecte manté amb altres objectes i no en la seua presentació concreta, el concepte d'isomorfisme substituïx a la igualtat estricta. De fet, autors com Steve Awodey (*Category Theory* [3]), Max S. New (*Lecture 19: Equivalence of Categories* [18]) i el mateix Mazur, entre altres, consideren l'estudi de la igualtat absoluta una qüestió irrellevant en el context de les categories, ja que depén de la presentació, i coincidixen en que la "noció correcta" per a determinar si dos objectes són el mateix és l'isomorfisme. És per este motiu que la teoria de categories ha incorporat en el seu vocabulari la idea de determinar els objectes "llevat d'isomorfisme" (up to isomorphism), reconeixent així que l'essència d'un objecte residix en el seu paper estructural dins de la categoria i no en la seua identitat.

La següent proposició ens dona l'argument necessari per poder parlar d'unicitat en els morfismes inversos.

Proposició 2.3. *Siga $f\colon x \longrightarrow y$ morfisme en C que admet invers a la dreta, $g_1\colon y \longrightarrow x$, i invers a l'esquerra, $g_2\colon y \longrightarrow x$. Aleshores, f és un isomorfisme i $g_1 = g_2$.*

Demostració.

$$\begin{aligned}
g_1 &= \mathrm{id}_x \circ g_1 && (\text{Def. de } \mathrm{id}_x)\\
&= (g_2 \circ f) \circ g_1 && (g_2 \text{ invers a l'esquerra de } f)\\
&= g_2 \circ (f \circ g_1) && (\text{Ass. de la composició})\\
&= g_2 \circ \mathrm{id}_y && (g_1 \text{ inversa a la dreta de } f)\\
&= g_2. && (\text{Def. de } \mathrm{id}_y)
\end{aligned}$$

□

Així, podem generalitzar les nocions d'aplicació invertible i aplicacions inverses.

Corol·lari 2.1.

1. *Tot isomorfisme f admet un únic morfisme invers, al que denotarem f^{-1}.*
2. *Si f és isomorfisme, aleshores f^{-1} també ho és i el seu invers és $(f^{-1})^{-1} = f$.*
3. *Si f i g són isomorfismes i la seua composició $g \circ f$ existix, aleshores esta és isomorfisme amb invers*
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

En vista d'este resultat, resulta evident que, per a tot objecte x, $\mathrm{Aut}_{\mathsf{C}}(x)$ té estructura de monoide amb la composició —més concretament, de grup per l'existència d'inversos—

i que $\mathbf{Aut}_{\mathsf{C}}(x) \leq \mathbf{End}_{\mathsf{C}}(x)$.

Dins d'una categoria, certs objectes ocupen posicions distingides pel que fa a la seua relació amb la resta d'elements. Estes *posicions límit* donen lloc a les nocions d'objecte inicial i terminal:

Definició 2.7. Siga C una categoria.

1. Direm que un objecte s és **inicial** en C si per a cada objecte x en C existix un únic morfisme d's en x.
2. Direm que un objecte t és **terminal** en C si per a cada objecte x en C existix exactament un morfisme d'x en t.
3. Direm que un objecte z en C és **nul** si és inicial i terminal.

Nota 2.6. Si t és terminal, l'únic morfisme de t en t és la identitat i qualsevol parell d'objectes terminals en C són isomorfs en C. Anàlogament, l'únic automorfisme d'un objecte inicial s és la identitat i qualsevol parell d'objectes inicials són isomorfs.

Un objecte inicial actua com una *font* de fletxes, mentre que un objecte terminal actua com un *pou* on convergixen totes les fletxes.

Exemple 2.5.

1. En Set, el conjunt buit és inicial i qualsevol conjunt amb un sol element és terminal.
2. En Set_*, qualsevol conjunt amb un sol element és nul.
3. En Mon, el monoide trivial és nul.

2.2 Functors

Els functors són els morfismes de categories: relacions que ens permeten moure'ns entre categories preservant les seues propietats axiomàtiques. Estos objectes van ser considerats per primera vegada en topologia algebraica, on apareixen de forma natural en contextos com l'homologia singular, i, junt amb les transformacions naturals —a les quals dediquem el Capítol 3— constituïxen el centre d'interés real de la teoria de categories. Tant és així que, originalment, Eilenberg i Mac Lane van introduir les categories en el seu article fundacional *General Theory of Natural Equivalences* [9] com un concepte auxiliar per a l'estudi dels functors i les transformacions naturals. Definim a continuació la noció de functor.

Definició 2.8 (Functor)**.** Donades dues categories C i D, un functor F de C en D, escrit $F\colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$, és una assignació que envia objectes c en C a objectes $F(c)$ en D i morfismes $f\colon c_1 \longrightarrow c_2$ en C a morfismes $F(f)\colon F(c_1) \longrightarrow F(c_2)$ en D. En forma esquemàtica:

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
F\colon \mathsf{C} \arrow[rr] & & \mathsf{D} \\
c_1 \arrow[d, "f"'] & & F(c_1) \arrow[d, "F(f)"] \\
c_2 & \longmapsto & F(c_2).
\end{tikzcd}
$$

Estes assignacions han de satisfer dues condicions:

1. Preservar identitats: $F(\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}) = \mathrm{id}_{F(c)}^{\mathsf{D}}$ per a tot $c \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$:

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
F\colon \mathsf{C} \arrow[rr] & & \mathsf{D} \\
c \arrow[d, "\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}"'] & & F(c) \arrow[d, "F(\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}) = \mathrm{id}_{F(c)}^{\mathsf{D}}"] \\
c & \longmapsto & F(c).
\end{tikzcd}
$$

2. Preservar composicions: $F(g\circ f) = F(g)\circ F(f)$ per a tots els morfismes $f\colon c_1 \longrightarrow c_2$, $g\colon c_2 \longrightarrow c_3$ en C:

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
F\colon \mathsf{C} \arrow[rr] & & \mathsf{D} \\
c_1 \arrow[d, "f"'] \arrow[dd, bend right=60, "g\circ f"'] & & F(c_1) \arrow[d, "F(f)"'] \arrow[dd, bend left=60, "F(g\circ f) = F(g)\circ F(f)."] \\
c_2 \arrow[d, "g"'] & \longmapsto & F(c_2) \arrow[d, "F(g)"'] \\
c_3 & & F(c_3)
\end{tikzcd}
$$

En resum, un functor consistix en una assignació sobre els objectes i una assignació sobre els morfismes que preserva tota l'estructura d'una categoria: dominis, codominis, composicions i identitats. Com a conseqüència directa d'açò obtenim que els functors també respecten l'existència de morfismes inversos. Concretament, trobem el següent resultat:

Proposició 2.4. *Siguen* C *i* D *categories i* $F\colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ *un functor. Aleshores,* F *preserva inversos a dreta i esquerra.*

Demostració. Siguen $f\colon x \longrightarrow y$ i $g\colon y \longrightarrow x$ morfismes en C tals que $g\circ f = \mathrm{id}_x$, i.e., g és invers a l'esquerra de f i f és invers a la dreta de g. Aleshores, en ser F functor, trobem que

$$F(g)\circ F(f) = F(g\circ f) = F(\mathrm{id}_x) = \mathrm{id}_{F(x)},$$

és a dir, $F(g)$ és invers a l'esquerra de $F(f)$ i $F(f)$ és invers a la dreta de $F(g)$. $\square$

Corol·lari 2.2. *Com a conseqüència de la proposició anterior i de la unicitat del morfisme invers, tenim que, si $F\colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ és un functor i f un isomorfisme en C, aleshores $F(f)$ és un isomorfisme en D amb invers*

$$F(f)^{-1} = F(f^{-1}).$$

A més, si $c_1 \cong c_2$ en C, aleshores $F(c_1) \cong F(c_2)$ en D.

Un functor trivial però útil en teoria de categories és el functor constant.

Exemple 2.6. Siguen C i D dues categories i d objecte en D. Definim el functor constant a d, $K_d\colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$, com seguix:

1. $K_d(c) = d$ per a tot objecte c en C.

2. $K_d(f) = \mathrm{id}_d^{\mathsf{D}}$ per a tot morfisme f en C.

El functor constant col·lapsa tota una categoria en un objecte.

Un altre exemple fonamental és el functor d'inclusió.

Exemple 2.7. Siga S una subcategoria de C. Podem definir el functor d'inclusió

$$I_{\mathsf{S}}\colon \mathsf{S} \longrightarrow \mathsf{C}$$

que envia cada objecte i morfisme de S a ell mateix dins de C.

Una altra classe de functors senzills però importants són els coneguts com a *functors d'oblit* —o *underlying*—. Són functors que "obliden" part de l'estructura d'un objecte, generalment algebraic. Donem un parell d'exemples fàcils de functor d'oblit i demostrem que, efectivament, són functors:

Exemple 2.8. Considerem l'assignació U de Mon en Set que envia:

1. Un objecte de Mon, és a dir, un monoide $\mathbf{M} = (M, \bullet, e)$, en M, el seu conjunt subjacent.

2. Un morfisme en Mon de $\mathbf{M}$ en $\mathbf{N}$, és a dir, un homomorfisme de monoides $f\colon \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{N}$, a

$$\begin{aligned} U(f)\colon M &\longrightarrow N \\ m &\longmapsto f(m), \end{aligned}$$

que és la mateixa f però vista com a aplicació entre conjunts.

És a dir, tenim

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
U\colon \mathsf{Mon} \arrow[rr] & & \mathsf{Set} \\
\mathbf{M} \arrow[d, "f"'] & & M \arrow[d, "f"] \\
\mathbf{N} & \longmapsto & N.
\end{tikzcd}$$

Comprovem que U és un functor de Mon en Set.

Demostració. Preserva identitats:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{M} \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbf{M}}"'] & & M \arrow[d, "U(\mathrm{id}_{\mathbf{M}})"] \\
\mathbf{M} & \overset{U}{\longmapsto} & M.
\end{tikzcd}$$

Volem veure que $U(\mathrm{id}_{\mathbf{M}}) = \mathrm{id}_M$. Siga $m \in M$. Aleshores,

$$\begin{aligned}
U(\mathrm{id}_{\mathbf{M}})(m) &= \mathrm{id}_{\mathbf{M}}(m) && \text{(Def. de } U\text{)} \\
&= m && \text{(Def. de } \mathrm{id}_{\mathbf{M}}\text{)} \\
&= \mathrm{id}_M(m), && \text{(Def. de } \mathrm{id}_M\text{)}
\end{aligned}$$

com volíem. Per tant, com a aplicacions entre conjunts,

$$U(\mathrm{id}_{\mathbf{M}}) = \mathrm{id}_M.$$

Preserva composicions:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{M} \arrow[d, "f"'] & & M \arrow[d, "f"] \\
\mathbf{N} \arrow[d, "g"'] & \overset{U}{\longmapsto} & N \arrow[d, "g"] \\
\mathbf{P} & & P.
\end{tikzcd}$$

Volem veure que $U(g \circ f) = U(g) \circ U(f)$. Per a $m \in M$ es complix

$$\begin{aligned}
U(g \circ f)(m) &= (g \circ f)(m) && \text{(Def. de } U\text{)} \\
&= g(f(m)) && \text{(Def. de composició)} \\
&= g\big(U(f)(m)\big) && \text{(Def. de } U\text{)} \\
&= U(g)\big(U(f)(m)\big) && \text{(Def. de } U\text{)} \\
&= \big(U(g) \circ U(f)\big)(m). && \text{(Def. de composició)}
\end{aligned}$$

Concloem que $U(g \circ f) = U(g) \circ U(f)$. $\square$

Exemple 2.9. Considerem ara l'assignació $U^{\downarrow}$ de $\mathsf{Set}^{\downarrow\uparrow}$ en Set que envia:

1. Un objecte de $\mathsf{Set}^{\downarrow\uparrow}$, és a dir, un conjunt X, en ell mateix com a element de Set.

2. Un morfisme en $\mathsf{Set}^{\downarrow\uparrow}$, és a dir, un objecte $(f, g) \colon X \longrightarrow Y$, on $f \colon X \longrightarrow Y$ i $g \colon Y \longrightarrow X$ són aplicacions de conjunts, en $f \colon X \longrightarrow Y$. $U^{\downarrow}$ selecciona la component que "baixa" de cada morfisme.

És a dir, tenim

$$\begin{tikzcd}
U^{\downarrow} \colon \mathsf{Set}^{\downarrow\uparrow} \arrow[rr] & & \mathsf{Set} \\
X \arrow[d, "{(f,g)}"'] & \longmapsto & X \arrow[d, "f"] \\
Y & & Y.
\end{tikzcd}$$

Demostrem que $U^{\downarrow}$ és un functor de $\mathsf{Set}^{\downarrow\uparrow}$ en Set.

Demostració. Preserva identitats:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\mathrm{id}_X^{\mathsf{Set}^{\downarrow\uparrow}}"'] & & X \arrow[d, "\mathrm{id}_X^{\mathsf{Set}}"] \\
X \arrow[r, phantom, "\overset{U^{\downarrow}}{\longmapsto}"] & & X.
\end{tikzcd}$$

Açò es té trivialment per la definició de $\mathrm{id}_X^{\mathsf{Set}^{\downarrow\uparrow}} = (\mathrm{id}_X^{\mathsf{Set}}, \mathrm{id}_X^{\mathsf{Set}})$.

Preserva composicions:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "{(f_1,g_1)}"'] & & X \arrow[d, "f_1"] \\
Y \arrow[d, "{(f_2,g_2)}"'] & \overset{U^{\downarrow}}{\longmapsto} & Y \arrow[d, "f_2"] \\
Z & & Z.
\end{tikzcd}$$

Es té que

$$\begin{aligned}
U^{\downarrow}\big((f_1, g_1) \circ^{\mathsf{Set}^{\downarrow\uparrow}} (f_2, g_2)\big) &= U^{\downarrow}\big((f_2 \circ f_1, g_1 \circ g_2)\big) && \text{(Def. de composició en } \mathsf{Set}^{\downarrow\uparrow}) \\
&= f_2 \circ f_1 && \text{(Def. de } U^{\downarrow}) \\
&= U^{\downarrow}\big((f_2, g_2)\big) \circ U^{\downarrow}\big((f_1, g_1)\big). && \text{(Def. de } U^{\downarrow})
\end{aligned}$$

□

Les demostracions que U i $U^{\downarrow}$ són functors són directes, però ens aprofiten per tindre una primera aproximació a la metodologia que seguirem al llarg d'este capítol per verificar la functorialitat de construccions més complexes.

De manera anàloga a $U^{\downarrow}$, podem pensar en definir $U^{\uparrow}$ com aquell functor que selecciona la component que "puja" de cada morfisme en $\mathsf{Set}^{\downarrow\uparrow}$. Una anàlisi senzilla del seu comportament formal ens fa adonar-nos que esta assignació, d'existir, invertiria la composició i ens servix, per tant, d'introducció al concepte de functor contravariant —en contraposició al concepte de functor covariant, que és la classe de functors que acabem d'introduir—. Estudiarem esta idea, i $U^{\uparrow}$ en particular, en la Secció 2.3.1 (vegeu Exemple 2.14).

Nota 2.7. La definició de functor d'oblit pot resultar, d'entrada, un tant imprecisa. Emily Riehl definix *functor d'oblit* en el seu llibre *Category Theory in Context* [28] com un terme general usat per referir-se a qualsevol functor que "oblida" estructura i que té Set com a categoria d'arribada. Alhora, introduïx el concepte de "functors d'oblit intermedis" per referir-se a aquells que només obliden part, però no tota, l'estructura algebraica. Sobre este punt, m'agradaria fer un incís per a incorporar una reflexió de Qiaochu Yuan en la discussió *Definition of forgetful functor* [31] que connecta amb la visió de Mac Lane plantejada en la presentació de l'Apartat 2.1.1. Quan este últim proposa descriure les categories únicament en termes de fletxes, planteja una qüestió fonamental: per a què necessitem els objectes si tota l'estructura d'una categoria ja està codificada en els seus morfismes?

Establir un functor d'oblit $U\colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ entre dues categories equival a elegir veure els objectes de C com a objectes de D dotats d'una estructura addicional. En este sentit, la manera com decidim tractar els objectes d'una categoria —pel que fa a la seua estructura interna, les seues propietats o al tipus de relacions que s'establixen entre ells— es pot interpretar com una declaració d'intencions: la intenció d'estudiar una col·lecció particular de functors d'oblit que naixen de la nostra categoria. Per exemple, optar per descriure els objectes de Mon com a "conjunts amb estructura extra" no és sinó manifestar l'interés per estudiar el functor d'oblit U cap a Set que hem presentat en l'Exemple 2.8. De la mateixa manera, tractar els objectes de $\mathsf{Set}^{\downarrow\uparrow}$ com conjunts units per fletxes bidireccionals no és sinó manifestar interés en estudiar els functors d'oblit $U^{\downarrow}$ i $U^{\uparrow}$ que seleccionen només una de les dinàmiques de la categoria.

Vist així, els functors d'oblit no són sinó el prisma des del qual analitzem els objectes de la nostra categoria, és a dir, les propietats internes de què els dotem.

Reprenem el fil introduint la noció d'igualtat entre functors. De la mateixa manera que dues aplicacions es consideren iguals si retornen la mateixa imatge per a cada argument, la igualtat entre functors es fonamenta en la coincidència de la seua acció sobre tota l'estructura de la categoria:

Definició 2.9. Direm que dos functors $F, G\colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ són iguals, i ho denotarem $F = G$, si per a tot objecte c en C, $F(c) = G(c)$, i per a tot morfisme f en C, $F(f) = G(f)$.

El següent pas natural és definir la composició de functors i el functor identitat, que actua com a element neutre d'esta operació:

Proposició 2.5.

1. *Si* $F\colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ *i* $G\colon \mathsf{D} \longrightarrow \mathsf{E}$ *són functors, aleshores la composició de* G *amb* F*, és a dir, l'assignació*

$$G\circ F\colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{E}$$

$$\begin{array}{ccc} c_1 & & G(F(c_1)) \\ f\Big\downarrow & \longmapsto & \Big\downarrow G(F(f)) \\ c_2 & & G(F(c_2)), \end{array}$$

on $(G\circ F)(c) = G\big(F(c)\big)$ *i* $(G\circ F)(f) = G\big(F(f)\big)$*, és functor de* C *en* E.

2. *Si* C *és una categoria, aleshores la identitat en* C*, és a dir, l'assignació*

$$\mathrm{Id}_{\mathsf{C}}\colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{C}$$

$$\begin{array}{ccc} c_1 & & c_1 \\ f\Big\downarrow & \longmapsto & \Big\downarrow f \\ c_2 & & c_2, \end{array}$$

on $\mathrm{Id}_{\mathsf{C}}(c) = c$ *i* $\mathrm{Id}_{\mathsf{C}}(f) = f$ *per a tot* $c, c_1, c_2 \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(c_1, c_2)$*, és un functor de* C *en* C.

Demostració. Només demostrarem el primer apartat; el segon és trivial. Hem de comprovar que $G\circ F$ satisfà les condicions que ha de complir tot functor:

Preserva identitats: Donat $c \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$,

$$\begin{aligned} (G\circ F)(\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}) &= G(F(\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}})) && \text{(Def. de } G\circ F) \\ &= G(\mathrm{id}_{F(c)}^{\mathsf{D}}) && (F \text{ functor}) \\ &= \mathrm{id}_{G(F(c))}^{\mathsf{E}} && (G \text{ functor}) \\ &= \mathrm{id}_{(G\circ F)(c)}^{\mathsf{E}}. && \text{(Def. de } G\circ F) \end{aligned}$$

Preserva composicions: Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(c_1, c_2)$ i $g \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(c_2, c_3)$, aleshores

$$\begin{aligned} (G\circ F)(g\circ f) &= G(F(g\circ f)) && \text{(Def. de } G\circ F) \\ &= G(F(g)\circ F(f)) && (F \text{ functor}) \\ &= G(F(g))\circ G(F(f)) && (G \text{ functor}) \\ &= (G\circ F)(g)\circ (G\circ F)(f). && \text{(Def. de } G\circ F) \end{aligned}$$

Concloem així que $G\circ F$ és un functor. $\square$

La composició de functors és associativa. Açò, juntament amb el paper del functor identitat com a element neutre, ens du a considerar dues noves categories:

Exemple 2.10.

1. Cat, la categoria de les $\mathbf{U}$-categories, on:
   (a) Els objectes són aquelles categories C que complixen que $\mathrm{Ob}(\mathsf{C}) \subseteq \mathbf{U}$ i que $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(x, y) \in \mathbf{U}$ per a tots $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$ —sent $\mathbf{U}$ l'univers de Grothendieck que hem fixat en la introducció—.
   (b) Els morfismes són els functors entre elles.
   (c) La llei de composició és la composició de functors.
   (d) La identitat per a cada objecte C és el functor identitat Id_{C}.

2. Cat_*, la categoria de $\mathbf{U}$-categories *puntejades*, on:
   (a) Els objectes són parells (C, c), on C és un objecte en Cat i $c \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$.
   (b) Els morfismes $F\colon (\mathsf{C}, c) \longrightarrow (\mathsf{D}, d)$ són functors $F\colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ tals que $F(c) = d$ que anomenarem functors puntejats.
   (c) La llei de composició és la composició de functors.
   (d) La identitat per a cada objecte (C, c) és el functor identitat Id_{C}.

En Cat, l'objecte terminal és la categoria trivial, que denotarem per $\mathsf{1}$. Esta és l'única categoria (llevat d'isomorfisme) amb un sol objecte i un sol morfisme, el qual és necessàriament el morfisme identitat d'este objecte. L'objecte inicial és la categoria buida.

Nota 2.8. Existix un functor d'oblit evident $U_*\colon \mathsf{Cat}_* \longrightarrow \mathsf{Cat}$ que assigna a cada categoria puntejada (C, c) la seua categoria base C, i a cada functor puntejat, ell mateix com a morfisme en Cat. Per brevetat, s'ometrà la demostració de la seua functorialitat.

El fet que Cat siga una categoria ens dota, en vistes de la Definició 2.6, d'una noció d'isomorfia entre categories. Explicitant-ho:

Definició 2.10. Direm que dues **categories** C i D són **isomorfes**, i ho escriurem $\mathsf{C} \cong \mathsf{D}$, si existix un isomorfisme $F\colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ de categories, i.e., un functor que admet invers. És a dir, direm que C i D són isomorfes si existixen functors $F\colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ i $G\colon \mathsf{D} \longrightarrow \mathsf{C}$ tals que $G \circ F = \mathrm{Id}_{\mathsf{C}}$ i $F \circ G = \mathrm{Id}_{\mathsf{D}}$.

Dues categories isomorfes compartixen totes les propietats expressables en el llenguatge de la teoria de categories. A efectes pràctics, són estructures idèntiques que només diferixen en com es denoten els seus objectes i morfismes. Al Capítol 4 reprendrem la idea d'isomorfisme de categories i estudiarem distints graus de comparació d'estes estructures.

Exemple 2.11. Dos monoides $\mathbf{M}$ i $\mathbf{N}$ són isomorfs si, i només si, les seues categories induïdes M i N són isomorfes. La prova és senzilla si notem que un homomorfisme de monoides $\mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{N}$ és un isomorfisme si, i només si, el functor $\mathsf{M} \longrightarrow \mathsf{N}$ que induïx és un isomorfisme de categories.

Definició 2.11. Siguen C i D dues categories, S una subcategoria de C i T una subcategoria de D. Siguen $I_{\mathsf{S}}\colon \mathsf{S} \longrightarrow \mathsf{C}$ i $I_{\mathsf{T}}\colon \mathsf{T} \longrightarrow \mathsf{D}$ els seus respectius functors d'inclusió. Donat un functor $F\colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$, definim les operacions següents:

1. La **restricció** $F{\restriction_{\mathsf{S}}}\colon \mathsf{S} \longrightarrow \mathsf{D}$ de F a S com la composició $F{\restriction_{\mathsf{S}}} := F \circ I_{\mathsf{S}}$.

2. La **correstricció** $F{\restriction^{\mathsf{T}}}\colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{T}$ de F a T, si existix, com l'únic[1] functor G tal que $I_{\mathsf{T}} \circ G = F$.

La restricció i correstricció simultània es denota per $F{\restriction_{\mathsf{S}}^{\mathsf{T}}}$.

Nota 2.9 (Restricció, correstricció i composició)**.** Siguen $F\colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ i $G\colon \mathsf{D} \longrightarrow \mathsf{E}$ functors, S una subcategoria de C i U una subcategoria de E tal que existix $G{\restriction^{\mathsf{U}}}$. Per definició, la restricció i correstricció simultània $(G \circ F){\restriction_{\mathsf{S}}^{\mathsf{U}}}$ és l'únic functor $H\colon \mathsf{S} \longrightarrow \mathsf{U}$ que complix la factorització següent:

$$I_{\mathsf{U}} \circ H = (G \circ F){\restriction_{\mathsf{S}}}.$$

Però

$$\begin{aligned}
I_{\mathsf{T}} \circ (G{\restriction^{\mathsf{U}}} \circ F{\restriction_{\mathsf{S}}}) &= (I_{\mathsf{U}} \circ G{\restriction^{\mathsf{U}}}) \circ F{\restriction_{\mathsf{S}}} && \text{(Ass. de la composició)}\\
&= G \circ F{\restriction_{\mathsf{S}}} && \text{(Def. de correstricció)}\\
&= G \circ (F \circ I_{\mathsf{S}}) && \text{(Def. de restricció}\\
&= (G \circ F) \circ I_{\mathsf{S}} && \text{(Ass. de la composició)}\\
&= (G \circ F){\restriction_{\mathsf{S}}}. && \text{(Def. de restricció)}
\end{aligned}$$

Per la unicitat de la correstricció, concloem que

$$G{\restriction^{\mathsf{U}}} \circ F{\restriction_{\mathsf{S}}} = (G \circ F){\restriction_{\mathsf{S}}^{\mathsf{U}}}.$$

Per altra banda, si T és una subcategoria de D amb el seu functor d'inclusió $I_{\mathsf{T}}\colon \mathsf{T} \longrightarrow \mathsf{D}$ tal que existix $F{\restriction^{\mathsf{T}}}$, aleshores

$$G \restriction_{\mathsf{T}} \circ F \restriction^{\mathsf{T}} = G \circ F.$$

En efecte:

$$\begin{aligned}
G{\restriction_{\mathsf{T}}} \circ F{\restriction^{\mathsf{T}}} &= (G \circ I_{\mathsf{T}}) \circ F{\restriction^{\mathsf{T}}} && \text{(Def. de restricció)}\\
&= G \circ (I_{\mathsf{T}} \circ F{\restriction^{\mathsf{T}}}) && \text{(Ass. de la composició)}\\
&= G \circ F. && \text{(Def. de correstricció)}
\end{aligned}$$

[1]El functor d'inclusió és un monomorfisme en Cat.

Definirem ara dues propietats dels functors sovint descrites com a versions locals d'injectivitat i sobrejectivitat sobre els conjunts de morfismes:

Definició 2.12. Siguen C i D categories i $F\colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ un functor entre elles. Direm que:

1. F és **fidel** (*faithful*) quan, per a tot parell c_1, c_2 d'objectes de C i per a tot parell $f_1, f_2\colon c_1 \longrightarrow c_2$ de morfismes de C, la igualtat $F(f_1) = F(f_2)\colon F(c_1) \longrightarrow F(c_2)$ implica $f_1 = f_2$.

2. F és **ple** (*full*) quan, per a tot parell c_1, c_2 d'objectes de C i per a tot morfisme $g\colon F(c_1) \longrightarrow F(c_2)$ de D, existix un morfisme $f\colon c_1 \longrightarrow c_2$ de C amb $g = F(f)$.

Les composicions de functors plens (respectivament, fidels) són plens (respectivament, fidels).

Nota 2.10. Estes dues propietats es poden visualitzar en termes de conjunts de morfismes. Fixats un parell d'objectes c_1, c_2 de C, $F\colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ assigna a cada $f\colon c_1 \longrightarrow c_2$ un morfisme $F(f)\colon F(c_1) \longrightarrow F(c_2)$ i, per tant, definix una aplicació de conjunts

$$\begin{aligned} F_{c_1,c_2}\colon \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(c_1, c_2) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}\big(F(c_1), F(c_2)\big) \\ f \quad &\longmapsto \quad F(f). \end{aligned}$$

Aleshores, F és fidel quan, per a tot parell d'objectes c_1, c_2, l'aplicació F_{c_1,c_2} és injectiva, i ple quan és sobrejectiva. Per a un functor que és tant ple com fidel, i.e., **plenament fidel** (*fully faithful*), cadascuna d'estes aplicacions és una bijecció. No obstant això, cal notar que ser plenament fidel és una condició necessària però no suficient per a parlar d'un isomorfisme de categories. A més de ser plenament fidel, un functor necessita també definir una bijecció sobre els objectes per poder ser invertible.

Exemple 2.12. Si S és una subcategoria de C, el functor inclusió $I_{\mathsf{S}}\colon \mathsf{S} \longrightarrow \mathsf{C}$ és automàticament fidel. A més, S serà una subcategoria plena si, i només si, I_{S} és ple.

2.3 Construccions sobre categories

En este apartat formalitzarem un parell de construccions fonamentals que han emergit de manera natural al llarg del procés de redacció d'este treball: la categoria oposada i el producte de categories.

2.3.1 Contravariància i categoria oposada

En categories, la noció general de dualitat es concreta en la idea de *categoria oposada*. Si visualitzem els morfismes d'una categoria com a fletxes que apunten del seu domini al seu codomini, la categoria oposada no és més que el resultat de, formalment, "donar la volta" a totes les fletxes. Este procés dona lloc a una nova categoria. Donem la definició a continuació:

Definició 2.13 (Categoria oposada)**.** Donada una categoria C, definim la seua categoria oposada o dual, denotada per C^{op}, com a la categoria que té:

1. Com a objectes els mateixos objectes que C, és a dir, $\mathrm{Ob}(\mathsf{C}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$.

2. Una correspondència biunívoca entre morfismes: per a cada morfisme $f\colon x \longrightarrow y$ en C, un únic morfisme oposat $f^{\mathrm{op}}\colon y \longrightarrow x$. És a dir,

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}(y, x) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(x, y)$$

per a tot parell d'objectes x, y en C.

3. Per a cada objecte c de C,

$$\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} = (\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}})^{\mathrm{op}} = \mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}.$$

4. Com a regla de composició

$$(f^{\mathrm{op}}) \circ^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} (g^{\mathrm{op}}) = (g \circ^{\mathsf{C}} f)^{\mathrm{op}}$$

definida, exactament quan $g \circ^{\mathsf{C}} f$ també ho està.

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ^{\mathsf{C}} f"'] & y \arrow[d, "g"] \\
& z
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x & y \arrow[l, "f^{\mathrm{op}}"'] \\
& z \arrow[u, "g^{\mathrm{op}}"'] \arrow[ul, "(f^{\mathrm{op}}) \circ^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} (g^{\mathrm{op}})"]
\end{tikzcd}$$

Com a exemple de com la categoria oposada encapsula eixa noció de dualitat, es pot deduir fàcilment que un morfisme f és un monomorfisme (respectivament, un epimorfisme) si, i només si, f^{op} és un epimorfisme (respectivament, un monomorfisme). És també senzill comprovar que, per a cada categoria C,

1. C^{op} és, efectivament, una categoria,

2. $(\mathsf{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathsf{C}$.

Açò evidencia, no només que tota categoria té una oposada, sinó també que tota categoria és l'oposada d'alguna altra. Açò té una implicació molt forta, i és que provar una propietat per a tota categoria implica necessàriament provar la propietat dual també per a tota categoria.

Exemple 2.13. Siga $\mathbf{M}$ un monoide. Si denotem per $\mathbf{C}(\mathbf{M})$ la categoria amb un sol objecte induïda per $\mathbf{M}$ (vegeu Proposició 2.1), es complix la identitat:

$$\big(\mathbf{C}(\mathbf{M})\big)^{\mathrm{op}} = \mathbf{C}(\mathbf{M}^{\mathrm{op}}).$$

És a dir, la categoria oposada a la categoria induïda per un monoide coincidix amb la categoria induïda pel monoide oposat.

L'existència de la categoria oposada ens permet formalitzar aquelles assignacions que, com havíem anticipat al final de l'Exemple 2.9 en parlar de $U^{\uparrow}$, invertixen el sentit dels morfismes. En efecte, siga $T\colon \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathsf{D}$ un functor. Per definició, T assigna a cada objecte c de C^{op} un objecte $T(c)$ de D i a cada morfisme $f^{\mathrm{op}}\colon c_2 \longrightarrow c_1$ de C^{op} un morfisme $T(f^{\mathrm{op}})\colon T(c_2) \longrightarrow T(c_1)$ amb $T(f^{\mathrm{op}} \circ^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} g^{\mathrm{op}}) = T(f^{\mathrm{op}}) \circ^{\mathsf{D}} T(g^{\mathrm{op}})$ sempre que $f^{\mathrm{op}} \circ^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} g^{\mathrm{op}}$ estiga definida.

Este functor T el podem escriure directament en termes de la categoria original C si escrivim $\overline{T}(f)$ en lloc de $T(f^{\mathrm{op}})$. En esta situació, direm que $\overline{T}$ és un functor contravariant. Donem a continuació la definició rigorosa:

Definició 2.14 (Functor contravariant)**.** Un functor contravariant de C en D, escrit $F\colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$, és una assignació que envia objectes c en C en objectes $F(c)$ en D i morfismes $f\colon c_1 \longrightarrow c_2$ en C en morfismes $F(f)\colon F(c_2) \longrightarrow F(c_1)$ en D. En forma esquemàtica:

$$
\begin{tikzcd}
F\colon \mathsf{C} \arrow[rr] & & \mathsf{D} \\
c_1 \arrow[d, "f"'] & & F(c_1) \\
c_2 & \longmapsto & F(c_2). \arrow[u, "F(f)"']
\end{tikzcd}
$$

Estes assignacions han de satisfer dues condicions:

1. Preservar identitats: $F(\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}) = \mathrm{id}_{F(c)}^{\mathsf{D}}$ per a tot $c \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$:

$$
\begin{tikzcd}
F\colon \mathsf{C} \arrow[rr] & & \mathsf{D} \\
c \arrow[d, "\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}"'] & & F(c) \\
c & \longmapsto & F(c). \arrow[u, "F(\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}) = \mathrm{id}_{F(c)}^{\mathsf{D}}"']
\end{tikzcd}
$$

2. Preservar composicions (de forma contravariant): $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ per a tots els morfismes $f\colon c_1 \longrightarrow c_2$, $g\colon c_2 \longrightarrow c_3$ en C:

$$
\begin{tikzcd}
F\colon \mathsf{C} \arrow[rr] & & \mathsf{D} \\
c_1 \arrow[d, "f"'] \arrow[dd, bend right=60, "g \circ f"'] & & F(c_1) \\
c_2 \arrow[d, "g"'] & \longmapsto & F(c_2) \arrow[u, "F(f)"] \\
c_3 & & F(c_3) \arrow[u, "F(g)"] \arrow[uu, bend right=60, "F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)."']
\end{tikzcd}
$$

Com hem dit abans, als functors ordinaris s'anomenen també *functors covariants* per diferenciar-los dels contravariants.

Nota 2.11. Com hem vist, donar un functor contravariant de C en D és equivalent a donar un functor covariant de C^{op} en D. Esta correspondència reduïx l'estudi de la contravariància a allò que ja sabem sobre functors covariants, evidenciant que no es tracta d'una construcció conceptualment nova.

Nota 2.12. La composició de functors covariants i contravariants seguix una regla anàloga a la llei dels signes: compondre dos functors contravariants dona lloc a un functor covariant, mentre que compondre un functor covariant amb un de contravariant es traduïx en un de contravariant.

Ja estem en situació d'estudiar l'assignació $U^{\uparrow}$.

Exemple 2.14. Considerem l'assignació $U^{\uparrow}$ de $\mathsf{Set}^{\downarrow\uparrow}$ en Set que envia:

1. Un objecte de $\mathsf{Set}^{\downarrow\uparrow}$, és a dir, un conjunt X, en ell mateix com a element de Set.
2. Un morfisme en $\mathsf{Set}^{\downarrow\uparrow}$, és a dir, un objecte $(f, g)\colon X \longrightarrow Y$, on $f\colon X \longrightarrow Y$ i $g\colon Y \longrightarrow X$ són aplicacions de conjunts, en $g\colon Y \longrightarrow X$.

És a dir, tenim

$$
\begin{tikzcd}
U^{\uparrow}\colon \mathsf{Set}^{\downarrow\uparrow} \arrow[rr] & & \mathsf{Set} \\
X \arrow[d, "{(f,g)}"'] & & X \\
Y \arrow[rr, phantom, "\longmapsto", pos=0.5, shift left=4ex] & & Y. \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}
$$

Comprovem que $U^{\uparrow}$ és un functor contravariant de $\mathsf{Set}^{\downarrow\uparrow}$ en Set.

Demostració. Preserva identitats:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\mathrm{id}_X^{\mathsf{Set}^{\downarrow\uparrow}}"'] & & X \\
X \arrow[rr, phantom, "\overset{U^{\uparrow}}{\longmapsto}", shift left=4ex] & & X. \arrow[u, "\mathrm{id}_X^{\mathsf{Set}}"']
\end{tikzcd}
$$

Trivial per la definició de $\mathrm{id}_X^{\mathsf{Set}^{\downarrow\uparrow}} = (\mathrm{id}_X^{\mathsf{Set}}, \mathrm{id}_X^{\mathsf{Set}})$.

Preserva composicions (de forma contravariant):

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "{(f_1,g_1)}"'] & & X \\ Y \arrow[d, "{(f_2,g_2)}"'] & \overset{U^\uparrow}{\longmapsto} & Y \arrow[u, "g_1"'] \\ Z & & Z. \arrow[u, "g_2"'] \end{tikzcd}$$

Es té que

$$\begin{aligned} U^\uparrow\big((f_2,g_2) \circ^{\mathsf{Set}^{\downarrow\uparrow}} (f_1,g_1)\big) &= U^\uparrow\big((f_2 \circ f_1, g_1 \circ g_2)\big) && \text{(Def. de } \circ^{\mathsf{Set}^{\downarrow\uparrow}}\text{)} \\ &= g_1 \circ g_2 && \text{(Def. de } U^\uparrow\text{)} \\ &= U^\uparrow\big((f_1,g_1)\big) \circ U^\uparrow\big((f_2,g_2)\big). && \text{(Def. de } U^\uparrow\text{)} \end{aligned}$$

□

De la mateixa manera que tota categoria dona lloc a una oposada, qualsevol functor entre dues categories induïx de manera única un functor entre les seues respectives oposades. Esta construcció, que completa la noció de dualitat en categories, es formalitza a continuació:

Definició 2.15. Tot functor $F\colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ induïx un únic functor oposat

$$\begin{aligned} F^{\mathrm{op}}\colon \mathsf{C}^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathsf{D}^{\mathrm{op}} \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} c_1 \arrow[d, "f^{\mathrm{op}}"'] & \longmapsto & F(c_1) \arrow[d, "F(f)^{\mathrm{op}}"] \\ c_2 & & F(c_2). \end{tikzcd}$$

A més, es complix $(F^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = F$.

Nota 2.13. Cal remarcar que la dualitat invertix els morfismes però no els functors. És a dir, tot i que la notació puga fer pensar el contrari, el functor oposat F^{op} és un morfisme en Cat, no el corresponent a F en $\mathsf{Cat}^{\mathrm{op}}$.

Nota 2.14. De les definicions anteriors se seguix que l'assignació $(\bullet)^{\mathrm{op}}$ es comporta com un functor covariant $(\bullet)^{\mathrm{op}}\colon \mathsf{Cat} \longrightarrow \mathsf{Cat}$. Este functor envia cada categoria C a la seua oposada C^{op} i cada functor F al seu oposat F^{op} i és una involució en Cat, i.e., complix que $(\bullet)^{\mathrm{op}} \circ (\bullet)^{\mathrm{op}} = \mathrm{Id}_{\mathsf{Cat}}$. No demostrarem la seua functoralitat per brevetat.

Del fet que $(\bullet)^{\mathrm{op}}$ siga una involució es deriva immediatament que l'assignació $(\bullet)^{\mathrm{op}}$ és un isomorfisme de la categoria Cat en ella mateixa, tot i que convé remarcar que una categoria C no és, en general, isomorfa a la seua oposada C^{op}.

2.3.2 Producte de categories

Estudiem ara una nova construcció que ens permet obtindre, a partir de dues categories, una de nova: el seu producte.

Definició 2.16 (Categoria producte)**.** Siguen C i D dues categories. Aleshores, $\mathsf{C} \times \mathsf{D}$ és una categoria, on:

1. $\mathrm{Ob}(\mathsf{C} \times \mathsf{D}) = \mathrm{Ob}(\mathsf{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathsf{D})$. És a dir, els objectes són parells ordenats (c, d), on $c \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$ i $d \in \mathrm{Ob}(\mathsf{D})$.

2. $\mathrm{Mor}(\mathsf{C} \times \mathsf{D}) = \mathrm{Mor}(\mathsf{C}) \times \mathrm{Mor}(\mathsf{D})$, o el que és el mateix,

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}\times\mathsf{D}}\big((c_1, d_1), (c_2, d_2)\big) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(c_1, c_2) \times \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(d_1, d_2)$$

   per a tota parella d'objectes $(c_1, d_1), (c_2, d_2)$ en $\mathsf{C} \times \mathsf{D}$. És a dir, els morfismes són parells ordenats (f, g), on $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(c_1, c_2)$ i $g \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(d_1, d_2)$.

3. La composició ve donada per

$$(f_2, g_2) \circ (f_1, g_1) = (f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1).$$

4. Per a cada objecte (c, d), el morfisme identitat ve donat per

$$\mathrm{id}_{(c,d)}^{\mathsf{C}\times\mathsf{D}} = (\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}, \mathrm{id}_d^{\mathsf{D}}).$$

Exemple 2.15. Donats $\mathbf{M}$ i $\mathbf{N}$ monoides, es té que

$$\mathbf{C}(\mathbf{M} \times \mathbf{N}) = \mathbf{C}(\mathbf{M}) \times \mathbf{C}(\mathbf{N}),$$

on $\mathbf{C}(\mathbf{M})$ denota la categoria induïda pel monoide $\mathbf{M}$.

Definició 2.17. Definim les projeccions del producte

$$\mathsf{C} \xleftarrow{\;P_1\;} \mathsf{C} \times \mathsf{D} \xrightarrow{\;P_2\;} \mathsf{D}$$

com els functors definits sobre morfismes (respectivament, objectes) per $P_1(f, g) = f$, $P_2(f, g) = g$. Estes projeccions tenen la següent propietat:

Proposició 2.6. *Donada una categoria* E *i dos functors*

$$\mathsf{C} \xleftarrow{\;G\;} \mathsf{E} \xrightarrow{\;H\;} \mathsf{D}$$

existix un únic functor $F\colon \mathsf{E} \longrightarrow \mathsf{C} \times \mathsf{D}$ *amb* $P_1 \circ F = G$ *i* $P_2 \circ F = H$. *Visualment:*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{E} \arrow[dl, "G"'] \arrow[d, dashed, "\exists! F"] \arrow[dr, "H"] & \\
\mathsf{C} & \mathsf{C} \times \mathsf{D} \arrow[l, "P_1"'] \arrow[r, "P_2"] & \mathsf{D}.
\end{tikzcd}$$

Demostració. Les condicions $P_1 \circ F = G$ i $P_2 \circ F = H$ obliguen a que, per a cada morfisme f en E (respectivament, objecte), $F(f) = \big(G(f), H(f)\big)$. Recíprocament, definir $F(f) := \big(G(f), H(f)\big)$ satisfà les condicions requerides. $\square$

Havent descrit ja els functors que van a parar a productes de categories, abordem ara aquells que partixen de productes.

Definició 2.18. Anomenem bifunctor —o functor de dos objectes variables— a tot aquell functor la categoria de partida del qual siga una categoria producte. La generalització del concepte al producte de n categories és l'anomenat multifunctor. Així, un bifunctor és un multifunctor amb $n = 2$.

Exemple 2.16. Siga C una categoria. Considerem l'assignació $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(\bullet, \bullet)$ de $\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{C}$ en Set que envia

1. Un objecte (x, y) de $\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{C}$ en $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(x, y)$.
2. Un morfisme en $\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{C}$ de (x, y) en (x', y'), és a dir, un parell (f^{op}, g) tal que $f\colon x' \longrightarrow x,\ g\colon y \longrightarrow y'$ són morfismes en C, en

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(f^{\mathrm{op}}, g)\colon \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(x, y) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(x', y') \\
h &\longmapsto g \circ h \circ f.
\end{aligned}$$

És a dir, tenim

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(\bullet, \bullet)\colon \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{C} \arrow[rr] & & \mathsf{Set} \\
(x, y) \arrow[d, "(f^{\mathrm{op}}, g)"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(x, y) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(f^{\mathrm{op}}, g)"] \\
(x', y') & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(x', y').
\end{tikzcd}$$

Comprovem que $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(\bullet, \bullet)$ és un bifunctor de $\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{C}$ en Set:

Demostració. Preserva identitats:

$$\begin{tikzcd}
(x, y) \arrow[d, "(\mathrm{id}_x, \mathrm{id}_y)"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(x, y) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(\mathrm{id}_x, \mathrm{id}_y)"] \\
(x, y) & \overset{\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(\bullet, \bullet)}{\longmapsto} & \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(x, y).
\end{tikzcd}$$

Siga $h \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(x,y)$. Per definició de $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(\bullet,\bullet)$ tenim que

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(\mathrm{id}_x,\mathrm{id}_y)(h) = \mathrm{id}_y \circ h \circ \mathrm{id}_x = h,$$

d'on concloem que

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(\mathrm{id}_x,\mathrm{id}_y) = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(x,y)}.$$

Preserva composicions:

$$\begin{tikzcd}
(x,y) \arrow[d, "(f_1^{\mathrm{op}},g_1)"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(x,y) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(f_1^{\mathrm{op}},g_1)"] \\
(x',y') \arrow[d, "(f_2^{\mathrm{op}},g_2)"'] \arrow[rr, mapsto, "\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(\bullet,\bullet)"] & & \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(x',y') \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(f_2^{\mathrm{op}},g_2)"] \\
(x'',y'') & & \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(x'',y'').
\end{tikzcd}$$

Si $h \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(x,y)$, trobem la següent cadena d'igualtats:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}\big((f_2^{\mathrm{op}},g_2)\circ(f_1^{\mathrm{op}},g_1)\big)(h) \\
&\qquad= \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(f_2^{\mathrm{op}}\circ f_1^{\mathrm{op}}, g_2\circ g_1)(h) && \text{(Def. de composició en cat. prod.)} \\
&\qquad= \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}\big((f_1\circ f_2)^{\mathrm{op}}, g_2\circ g_1\big)(h) && \text{(Def. de composició en cat. op.)} \\
&\qquad= (g_2\circ g_1)\circ h\circ(f_1\circ f_2) && \text{(Def. de } \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(\bullet,\bullet)\text{)} \\
&\qquad= g_2\circ(g_1\circ h\circ f_1)\circ f_2 && \text{(Associativitat de la composició)} \\
&\qquad= g_2\circ \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(f_1^{\mathrm{op}},g_1)(h)\circ f_2 && \text{(Def. de } \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(\bullet,\bullet)\text{)} \\
&\qquad= \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(f_2^{\mathrm{op}},g_2)\big(\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(f_1^{\mathrm{op}},g_1)(h)\big) && \text{(Def. de } \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(\bullet,\bullet)\text{)} \\
&\qquad= \big(\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(f_2^{\mathrm{op}},g_2)\circ \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(f_1^{\mathrm{op}},g_1)\big)(h). && \text{(Def. de composició)}
\end{aligned}$$

Per tant,

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}\big((f_2^{\mathrm{op}},g_2)\circ(f_1^{\mathrm{op}},g_1)\big) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(f_2^{\mathrm{op}},g_2)\circ \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(f_1^{\mathrm{op}},g_1).$$

Concloem que $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(\bullet,\bullet)$ és un bifunctor de $\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{C}$ en Set. □

Nota 2.15. Siga C una categoria i siga c objecte en C fixe. Aleshores, $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(c,\bullet)$ (respectivament, $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(\bullet,c)$) és un functor covariant (respectivament, contravariant) de C en Set.

Proposició 2.7 (Functor producte)**.** *Si $F\colon \mathsf{C}_1 \longrightarrow \mathsf{D}_1$ $G\colon \mathsf{C}_2 \longrightarrow \mathsf{D}_2$ són functors (covariants), aleshores*

$$F\times G\colon \mathsf{C}_1\times\mathsf{D}_1 \longrightarrow \mathsf{C}_2\times\mathsf{D}_2$$

$$\begin{tikzcd}
(c_1,d_1) \arrow[d, "(f,g)"'] & & \big(F(c_1),G(d_1)\big) \arrow[d, "\big(F(f),G(g)\big)"] \\
(c_2,d_2) & \longmapsto & \big(F(c_2),G(d_2)\big)
\end{tikzcd}$$

és un bifunctor de $\mathsf{C}_1 \times \mathsf{D}_1$ *en* $\mathsf{C}_2 \times \mathsf{D}_2$*.*

Demostració.

Per a cada (c, d) objecte en $\mathsf{C}_1 \times \mathsf{D}_1$ tenim que

$$\begin{aligned}
(F \times G)(\mathrm{id}^{\mathsf{C}_1 \times \mathsf{D}_1}_{(c,d)}) &= (F \times G)(\mathrm{id}^{\mathsf{C}_1}_c, \mathrm{id}^{\mathsf{D}_1}_d) && \text{(Def. de morf. identitat en cat. prod.)}\\
&= \big(F(\mathrm{id}^{\mathsf{C}_1}_c), G(\mathrm{id}^{\mathsf{D}_1}_d)\big) && \text{(Def. de functor producte)}\\
&= \big(\mathrm{id}^{\mathsf{C}_2}_{F(c)}, \mathrm{id}^{\mathsf{D}_2}_{G(d)}\big) && (F,\ G \text{ functors})\\
&= \mathrm{id}^{\mathsf{C}_2 \times \mathsf{D}_2}_{(F \times G)(c,d)} && \text{(Def. de morf. identitat en cat. prod.)}
\end{aligned}$$

Per altra banda, si $(f_1, g_1)\colon (c_1, d_1) \longrightarrow (c_2, d_2)$, $(f_2, g_2)\colon (c_2, d_2) \longrightarrow (c_3, d_3)$ són morfismes en $\mathsf{C}_1 \times \mathsf{D}_1$, aleshores

$$\begin{aligned}
&(F \times G)\big((f_2, g_2) \circ (f_1, g_1)\big)\\
&\quad= (F \times G)(f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1) && \text{(Def. de composició en cat. prod.)}\\
&\quad= \big(F(f_2 \circ f_1), G(g_2 \circ g_1)\big) && \text{(Def. de functor producte)}\\
&\quad= \big(F(f_2) \circ F(f_1), G(g_2) \circ G(g_1)\big) && (F \text{ i } G \text{ functors})\\
&\quad= \big(F(f_2), G(g_2)\big) \circ \big(F(f_1), G(g_1)\big) && \text{(Def. de composició en cat. prod.)}\\
&\quad= \big((F \times G)(f_2, g_2)\big) \circ \big((F \times G)(f_1, g_1)\big). && \text{(Def. de functor producte)}
\end{aligned}$$

Això demostra que $F \times G$ és un bifunctor de $C_1 \times D_1$ en $C_2 \times D_2$. $\square$

Nota 2.16. De les definicions anteriors se seguix que l'operació $\times$ és un functor

$$\times\colon \mathsf{Cat} \times \mathsf{Cat} \longrightarrow \mathsf{Cat}.$$

Existixen functors similars $\mathsf{Mon} \times \mathsf{Mon} \longrightarrow \mathsf{Mon}$, $\mathsf{Set} \times \mathsf{Set} \longrightarrow \mathsf{Set}$, etc. El primer descriu la construcció del monoide producte, mentre que el segon descriu el producte cartesià de conjunts.

2.4 Algunes construccions functorials

Dedicarem esta secció a formalitzar la functorialitat de diverses construccions que han anat apareixent al llarg del text. Cal remarcar que la selecció de functors que presentem ací constituïx l'autèntic nucli d'este treball. Sobre ells pivotaran els capítols següents, on introduirem les ferramentes categorials adequades —com ara les transformacions naturals i les adjuncions— per a analitzar-los en profunditat. En última instància, l'estudi d'estos functors ens permetrà traçar un mapa rigorós de les relacions estructurals que connecten les categories Set, Mon i Cat.

2.4.1 Construcció del monoide lliure

En el Capítol 1 vam descriure dues formes de construir monoides de forma natural a partir de conjunts: el monoide d'endomorfismes i el monoide lliure. Començarem estudiant l'assignació que associa a cada conjunt el seu monoide lliure. Considerem, doncs, l'assignació $(\bullet)^*$ de Set en Mon que envia:

1. Un objecte de Set, és a dir, un conjunt X, en $\mathbf{X}^* = (X^*, \curlywedge, \lambda)$.
2. Un morfisme en Set de X en Y, és a dir, una aplicació $f\colon X \longrightarrow Y$, a l'homomorfisme de monoides
$$(\bullet)^*(f) = f^* = (\eta_Y \circ f)^\sharp.$$

$$\begin{tikzcd}
(\bullet)^*\colon \mathsf{Set} \arrow[rr] & & \mathsf{Mon} \\
X \arrow[d, "f"'] & & \mathbf{X}^* \arrow[d, "f^*"] \\
Y \arrow[r, phantom, "\longmapsto"] & & \mathbf{Y}^*.
\end{tikzcd}$$

Notem que, si $f\colon X \longrightarrow Y$ és una aplicació, f^* existix per propietat universal i és l'únic homomorfisme de monoides satisfent
$$U(f^*) \circ \eta_X = \eta_Y \circ f,$$
on U denota el functor d'oblit de Mon en Set definit en l'Exemple 2.8. Així, $U(f^*)$ no és més que l'homomorfisme f^* vist com a aplicació entre conjunts:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "f"'] & U(\mathbf{X}^*) \arrow[d, dashed, "\exists! U(f^*) = U\big((\eta_Y \circ f)^\sharp\big)."] \\
Y \arrow[r, "\eta_Y"'] & U(\mathbf{Y}^*)
\end{tikzcd}$$

Proposició 2.8. $(\bullet)^*$ *és un functor de* Set *en* Mon.

Demostració. Preserva identitats:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\mathrm{id}_X"'] & & \mathbf{X}^* \arrow[d, "\mathrm{id}_X^*"] \\
X \arrow[rr, phantom, "\overset{(\bullet)^*}{\longmapsto}"] & & \mathbf{X}^*,
\end{tikzcd}$$

on $\mathrm{id}_X^* = (\eta_X \circ \mathrm{id}_X)^\sharp$. Volem veure que $\mathrm{id}_X^* = (\,\bullet\,)^*(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{(\,\bullet\,)^*(X)} = \mathrm{id}_{\mathbf{X}^*}$. Notem que id_X^* és l'únic homomorfisme de monoides de $\mathbf{X}^*$ en $\mathbf{X}^*$ satisfent

$$U(\mathrm{id}_X^*) \circ \eta_X = \eta_X \circ \mathrm{id}_X.$$

Per altra banda, $\mathrm{id}_{\mathbf{X}^*} \colon \mathbf{X}^* \longrightarrow \mathbf{X}^*$ és un homomorfisme de monoides que satisfà

$$\begin{aligned}
\big(U(\mathrm{id}_{\mathbf{X}^*}) \circ \eta_X\big)(x) &= U(\mathrm{id}_{\mathbf{X}^*})\big(\eta_X(x)\big) && \text{(Def. de composició)}\\
&= \mathrm{id}_{\mathbf{X}^*}\big(\eta_X(x)\big) && \text{(Def. de } U\text{)}\\
&= \mathrm{id}_{\mathbf{X}^*}\big((x)\big) && \text{(Def. de } \eta_X\text{)}\\
&= (x) && \text{(Def. de } \mathrm{id}_{\mathbf{X}^*}\text{)}\\
&= \eta_X(x) && \text{(Def. de } \eta_X\text{)}\\
&= \eta_X\big(\mathrm{id}_X(x)\big) && \text{(Def. de } \mathrm{id}_X\text{)}\\
&= (\eta_X \circ \mathrm{id}_X)(x). && \text{(Def. de composició)}
\end{aligned}$$

Per tant, $\mathrm{id}_{\mathbf{X}^*}$ satisfà

$$U(\mathrm{id}_{\mathbf{X}^*}) \circ \eta_X = \eta_X \circ \mathrm{id}_X.$$

Així, per la unicitat de id_X^* es té que

$$(\,\bullet\,)^*(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_X^* = \mathrm{id}_{\mathbf{X}^*} = \mathrm{id}_{(\,\bullet\,)^*(X)}.$$

Preserva composicions:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] & & \mathbf{X}^* \arrow[d, "f^*"] \\
Y \arrow[d, "g"'] & \overset{(\,\bullet\,)^*}{\longmapsto} & \mathbf{Y}^* \arrow[d, "g^*"] \\
Z & & \mathbf{Z}^*.
\end{tikzcd}$$

Volem veure que $(g \circ f)^* = (\,\bullet\,)^*(g \circ f) = (\,\bullet\,)^*(g) \circ (\,\bullet\,)^*(f) = g^* \circ f^*$. Recordem que $(g \circ f)^*$ és l'únic homomorfisme de monoides de $\mathbf{X}^*$ en $\mathbf{Z}^*$ satisfent

$$U\big((g \circ f)^*\big) \circ \eta_X = \eta_Z \circ (g \circ f).$$

Per altra banda, $g^* \circ f^*$ és un homomorfisme de monoides de $\mathbf{X}^*$ en $\mathbf{Z}^*$ en ser composició d'homomorfismes i, a més,

$$\begin{aligned}
U(g^* \circ f^*) \circ \eta_X &= \big(U(g^*) \circ U(f^*)\big) \circ \eta_X && \text{(} U \text{ functor)}\\
&= U(g^*) \circ \big(U(f^*) \circ \eta_X\big) && \text{(Associativitat de la composició)}\\
&= U(g^*) \circ (\eta_Y \circ f) && \text{(Propietat universal de } f^*\text{)}\\
&= \big(U(g^*) \circ \eta_Y\big) \circ f && \text{(Associativitat de la composició)}\\
&= (\eta_Z \circ g) \circ f && \text{(Propietat universal de } g^*\text{)}\\
&= \eta_Z \circ (g \circ f). && \text{(Associativitat de la composició)}
\end{aligned}$$

Per la unicitat de la propietat universal de $(g \circ f)^*$ es té que

$$(g \circ f)^* = g^* \circ f^*$$

i concloem que $(\bullet)^*$ és un functor de Set en Mon. $\square$

2.4.2 Construcció de l'End

Continuem estudiant l'altra forma de construir monoides a partir de conjunts: el monoide d'endomorfismes. Com ja vam remarcar al Capítol 1, mentre que el lliure crea estructura "del no-res", el monoide d'endomorfismes partix d'una regla de composició —d'aplicacions— preexistent que resulta problemàtica a l'hora de definir-lo com un functor $\mathsf{Set} \longrightarrow \mathsf{Mon}$.

En efecte, una anàlisi de la situació ens fa adonar-nos que tal assignació, d'existir, hauria d'enviar cada aplicació de conjunts $f\colon X \longrightarrow Y$ en un homomorfisme de monoides $\mathbf{End}_{\mathsf{Set}}(\boldsymbol{X}) \longrightarrow \mathbf{End}_{\mathsf{Set}}(\boldsymbol{Y})$. Per definir esta transformació de manera natural i sistemàtica, cada endomorfisme $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathsf{Set}}(X)$ hauria d'induir un endomorfisme en Y mitjançant la composició amb f però açò presenta un inconvenient fonamental: si bé la composició $f \circ \varphi$ ens permet aconseguir el codomini Y de forma senzilla, que el domini també siga Y resulta, en general, impossible sense tindre informació addicional sobre f.

Podríem limitar el nostre objectiu i intentar definir esta construcció en $\mathsf{Set}^{\downarrow\uparrow}$, aprofitant que els seus objectes són els del nostre interés i els seus morfismes $X \longrightarrow Y$ ens oferixen una forma tant d'entrar com d'eixir de Y. No obstant això, es comprova fàcilment que demanar que els morfismes de $\mathsf{Set}^{\downarrow\uparrow}$ s'envien a morfismes de Mon —i que, per tant, es preserve la unitat— obliga a que qualsevol morfisme $(f,g)\colon X \longrightarrow Y$ en $\mathsf{Set}^{\downarrow\uparrow}$ complisca $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, condició que, en general, no se satisfà. La forma de resoldre este inconvenient és treballar sobre una categoria en què tots estos morfismes problemàtics no existisquen: $\mathsf{Set}^{\mathrm{bij}}$, la categoria de conjunts i bijeccions entre ells. Considerem l'assignació $\mathrm{End}_{\mathsf{Set}}(\bullet)$ de $\mathsf{Set}^{\mathrm{bij}}$ en Mon que envia:

1. Un objecte de $\mathsf{Set}^{\mathrm{bij}}$, un conjunt X, en $\mathbf{End}_{\mathsf{Set}}(\boldsymbol{X})$, el monoide d'endomorfismes de X.

2. Un morfisme de $\mathsf{Set}^{\mathrm{bij}}$ de X en Y, és a dir, una aplicació de conjunts $f\colon X \longrightarrow Y$ bijectiva

$$\begin{aligned} \mathrm{End}_{\mathsf{Set}}(f)\colon \mathbf{End}_{\mathsf{Set}}(\boldsymbol{X}) &\longrightarrow \mathbf{End}_{\mathsf{Set}}(\boldsymbol{Y}) \\ \varphi \qquad &\longmapsto f \circ \varphi \circ f^{-1}. \end{aligned}$$

És a dir, tenim

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
\mathrm{End}_{\mathsf{Set}}(\,\bullet\,)\colon \mathsf{Set}^{\mathrm{bij}} \arrow[rr] & & \mathsf{Mon} \\
X \arrow[d, "f"'] & \longmapsto & \mathbf{End}_{\mathsf{Set}}\boldsymbol{(X)} \arrow[d, "\mathrm{End}_{\mathsf{Set}}(f)"] \\
Y & & \mathbf{End}_{\mathsf{Set}}\boldsymbol{(Y)}.
\end{tikzcd}$$

Proposició 2.9. $\mathrm{End}_{\mathsf{Set}}(\,\bullet\,)$ *és un functor de* $\mathsf{Set}^{\mathrm{bij}}$ *en* Mon.

Demostració. Preserva identitats:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\mathrm{id}_X"'] & \arrow[r, mapsto, "\mathrm{End}_{\mathsf{Set}}(\,\bullet\,)"] & {} & \mathbf{End}_{\mathsf{Set}}\boldsymbol{(X)} \arrow[d, "\mathrm{End}_{\mathsf{Set}}(\mathrm{id}_X)"] \\
X & & & \mathbf{End}_{\mathsf{Set}}\boldsymbol{(X)}.
\end{tikzcd}$$

Volem veure que

$$\mathrm{End}_{\mathsf{Set}}(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\mathbf{End}_{\mathsf{Set}}\boldsymbol{(X)}}.$$

Per això comprovarem com $\mathrm{End}_{\mathsf{Set}}(\mathrm{id}_X)$ actua sobre els elements de $\mathbf{End}_{\mathsf{Set}}\boldsymbol{(X)}$. Siga $\varphi \in \mathbf{End}_{\mathsf{Set}}\boldsymbol{(X)}$. Tenim que

$$\begin{aligned}
\mathrm{End}_{\mathsf{Set}}(\mathrm{id}_X)(\varphi) &= \mathrm{id}_X \circ \varphi \circ \mathrm{id}_X^{-1} && (\text{Def. de } \mathrm{End}_{\mathsf{Set}}(\,\bullet\,)) \\
&= \mathrm{id}_X \circ \varphi \circ \mathrm{id}_X && (\mathrm{id}_X \text{ idempotent}) \\
&= \varphi && (\text{Def. de } \mathrm{id}_X) \\
&= \mathrm{id}_{\mathbf{End}_{\mathsf{Set}}\boldsymbol{(X)}}(\varphi). && (\text{Def. de } \mathrm{id}_{\mathbf{End}_{\mathsf{Set}}\boldsymbol{(X)}})
\end{aligned}$$

Preserva composicions:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] & & \mathbf{End}_{\mathsf{Set}}\boldsymbol{(X)} \arrow[d, "\mathrm{End}_{\mathsf{Set}}(f)"] \\
Y \arrow[d, "g"'] & \arrow[r, mapsto, "\mathrm{End}_{\mathsf{Set}}(\,\bullet\,)"] & \mathbf{End}_{\mathsf{Set}}\boldsymbol{(Y)} \arrow[d, "\mathrm{End}_{\mathsf{Set}}(g)"] \\
Z & & \mathbf{End}_{\mathsf{Set}}\boldsymbol{(Z)}.
\end{tikzcd}$$

Volem veure que

$$\mathrm{End}_{\mathsf{Set}}(g \circ f) = \mathrm{End}_{\mathsf{Set}}(g) \circ \mathrm{End}_{\mathsf{Set}}(f).$$

Igual que amb la identitat, comprovarem com $\mathrm{End}_{\mathsf{Set}}(g \circ f)$ actua sobre els elements de

$\mathbf{End}_{\mathsf{Set}}(\boldsymbol{X})$. Siga $\varphi \in \mathbf{End}_{\mathsf{Set}}(\boldsymbol{X})$. Aleshores trobem la següent cadena d'igualtats:

$$\begin{aligned}
\mathrm{End}_{\mathsf{Set}}(g \circ f)(\varphi) &= (g \circ f) \circ \varphi \circ (g \circ f)^{-1} && \text{(Def. de } \mathrm{End}_{\mathsf{Set}}(\bullet)) \\
&= (g \circ f) \circ \varphi \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) && \text{(Inversa de composició)} \\
&= g \circ (f \circ \varphi \circ f^{-1}) \circ g^{-1} && \text{(Ass. de la composició)} \\
&= g \circ \mathrm{End}_{\mathsf{Set}}(f)(\varphi) \circ g^{-1} && \text{(Def. de } \mathrm{End}_{\mathsf{Set}}(\bullet)) \\
&= \mathrm{End}_{\mathsf{Set}}(g)\big(\mathrm{End}_{\mathsf{Set}}(f)(\varphi)\big) && \text{(Def. de } \mathrm{End}_{\mathsf{Set}}(\bullet)) \\
&= \big(\mathrm{End}_{\mathsf{Set}}(g) \circ \mathrm{End}_{\mathsf{Set}}(f)\big)(\varphi), && \text{(Def. de composició)}
\end{aligned}$$

arribant així on volíem. □

2.4.3 Construcció de l'End per a categories puntejades

En la definició de la construcció anterior, el problema principal al qual fèiem front era la manca d'una forma natural de traslladar els endomorfismes d'un objecte als d'un altre amb les eines de què disposàvem. Per sort, la teoria de categories ens dota de ferramentes potents que ens permeten resoldre este obstacle i generalitzar la noció de monoide d'endomorfismes a qualsevol objecte de qualsevol categoria, en lloc de restringir-nos només als conjunts.

La idea és usar els functors que partixen de la categoria a la qual pertany el nostre objecte com a forma d'enviar els endomorfismes d'un lloc a un altre però sense perdre de vista l'objecte d'interés. Esta necessitat de vincular un objecte a la seua categoria ens conduïx directament al marc de les categories puntejades.

Considerem l'assignació End_* de Cat_* en Mon, que envia

1. Un objecte de Cat_*, una categoria puntejada (C, c), en el monoide $\mathbf{End}_{\mathsf{C}}(\mathbf{c})$.
2. Un morfisme en Cat_*, és a dir, un objecte $F\colon (\mathsf{C}, c) \longrightarrow (\mathsf{D}, d)$ tal que $F\colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ és functor i $F(c) = d$, en l'homomorfisme de monoides

$$\begin{aligned}
\mathrm{End}_*(F)\colon \mathbf{End}_{\mathsf{C}}(\boldsymbol{c}) &\longrightarrow \mathbf{End}_{\mathsf{D}}(\boldsymbol{d}) \\
f &\longmapsto F(f).
\end{aligned}$$

És a dir, tenim

$$\mathrm{End}_*\colon \mathsf{Cat}_* \longrightarrow \mathsf{Mon}$$

$$\begin{array}{ccc}
(\mathsf{C}, c) & & \mathbf{End}_{\mathsf{C}}(\boldsymbol{c}) \\
F \big\downarrow & \longmapsto & \big\downarrow \mathrm{End}_*(F) \\
(\mathsf{D}, d) & & \mathbf{End}_{\mathsf{D}}(\boldsymbol{d}).
\end{array}$$

Nota 2.17. Notem que

1. $\mathrm{End}_*(F)$ preserva el neutre:

$$\begin{aligned}
\mathrm{End}_*(F)\big(e_{\mathbf{End_{\mathsf{C}}(\boldsymbol{c})}}\big) &= \mathrm{End}_*(F)\big(\mathrm{id}_c\big) && (\text{Def. de } \mathbf{End_{\mathsf{C}}(\boldsymbol{c})})\\
&= F(\mathrm{id}_c) && (\text{Def. de } \mathrm{End}_*)\\
&= \mathrm{id}_{F(c)} && (F \text{ functor})\\
&= \mathrm{id}_d && (F \text{ morfisme en } \mathsf{Cat}_*)\\
&= e_{\mathbf{End_{\mathsf{D}}(\boldsymbol{d})}}. && (\text{Def. de } \mathbf{End_{\mathsf{D}}(\boldsymbol{d})})
\end{aligned}$$

2. $\mathrm{End}_*(F)$ preserva les operacions en $\mathbf{End_{\mathsf{C}}(\boldsymbol{c})}$ i $\mathbf{End_{\mathsf{D}}(\boldsymbol{d})}$ (la composició): Si $f, g \in \mathrm{End}_{\mathsf{C}}(c)$. Aleshores

$$\begin{aligned}
\mathrm{End}_*(F)\big(g \circ f\big) &= F(g \circ f) && (\text{Def. de } \mathrm{End}_*)\\
&= F(g) \circ F(f) && (F \text{ functor})\\
&= \mathrm{End}_*(F)\big(g\big) \circ \mathrm{End}_*(F)\big(f\big). && (\text{Def. de } \mathrm{End}_*)
\end{aligned}$$

Així, $\mathrm{End}_*(F)$ és homomorfisme de monoides i End_* està ben definit.

Proposició 2.10. End_* *és un functor de* Cat_* *en* Mon.

Demostració. Preserva identitats:

$$\begin{tikzcd}
(\mathsf{C}, c) \arrow[d, "\mathrm{Id}_{\mathsf{C}}"'] & & \mathbf{End_{\mathsf{C}}(\boldsymbol{c})} \arrow[d, "\mathrm{End}_*(\mathrm{Id}_{\mathsf{C}})"] \\
(\mathsf{C}, c) & \arrow[r, mapsto, "\mathrm{End}_*"] & \mathbf{End_{\mathsf{C}}(\boldsymbol{c})}.
\end{tikzcd}$$

Volem veure que $\mathrm{End}_*(\mathrm{Id}_{\mathsf{C}}) = \mathrm{id}_{\mathbf{End_{\mathsf{C}}(\boldsymbol{c})}}$. Per això, comprovarem com actua sobre elements de $\mathbf{End_{\mathsf{C}}(\boldsymbol{c})}$. Siga $f \in \mathrm{End}_{\mathsf{C}}(c)$. Es complix

$$\begin{aligned}
\mathrm{End}_*(\mathrm{Id}_{\mathsf{C}})\big(f\big) &= \mathrm{Id}_{\mathsf{C}}(f) && (\text{Def. de } \mathrm{End}_*)\\
&= f && (\text{Def. de } \mathrm{Id}_{\mathsf{C}})\\
&= \mathrm{id}_{\mathbf{End_{\mathsf{C}}(\boldsymbol{c})}}(f). && (\text{Def. de } \mathrm{id}_{\mathbf{End_{\mathsf{C}}(\boldsymbol{c})}})
\end{aligned}$$

Preserva composicions:

$$\begin{tikzcd}
(\mathsf{C}, c) \arrow[d, "F"'] & & \mathbf{End_{\mathsf{C}}(\boldsymbol{c})} \arrow[d, "\mathrm{End}_*(F)"] \\
(\mathsf{D}, d) \arrow[d, "G"'] \arrow[rr, mapsto, "\mathrm{End}_*"] & & \mathbf{End_{\mathsf{D}}(\boldsymbol{d})} \arrow[d, "\mathrm{End}_*(G)"] \\
(\mathsf{E}, e) & & \mathbf{End_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{e})}.
\end{tikzcd}$$

Volem veure que $\mathrm{End}_*(G \circ F) = \mathrm{End}_*(G) \circ \mathrm{End}_*(F)$. Per a $f \in \mathrm{End}_{\mathsf{C}}(c)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{End}_*(G \circ F)\big(f\big) &= (G \circ F)(f) && \text{(Def. de End}_*\text{)} \\
&= G\big(F(f)\big) && \text{(Def. de composició de functors)} \\
&= G\big(\mathrm{End}_*(F)(f)\big) && \text{(Def. de End}_*\text{)} \\
&= \mathrm{End}_*(G)\big(\mathrm{End}_*(F)(f)\big) && \text{(Def. de End}_*\text{)} \\
&= \big(\mathrm{End}_*(G) \circ \mathrm{End}_*(F)\big)(f). && \text{(Def. de composició)}
\end{aligned}$$

Açò demostra que End_* és un functor de Cat_* en Mon. □

Este functor ens permet visualitzar les categories com col·leccions de monoides —un per cada objecte— connectats mitjançant els morfismes de la pròpia categoria. Esta intuïció serà útil en capítols següents.

Nota 2.18. Igual que vam veure en l'Exemple 1.5, per a qualsevol categoria C i qualsevol parell d'objectes x, y en C, el monoide $\mathbf{End}_{\mathsf{C}}\boldsymbol{(y)}$ induïx una acció sobre el conjunt de morfismes $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(x, y)$ definida per la composició a l'esquerra:

$$\begin{aligned}
\circ\colon \mathrm{End}_{\mathsf{C}}(y) \times \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(x, y) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(x, y) \\
(g, f) &\longmapsto g \circ f.
\end{aligned}$$

2.4.4 Identificació de monoides amb categories

En la Proposició 2.1 vam introduir la idea de categoria induïda per un monoide, construcció que connecta amb la visió de categoria com a col·lecció de monoides interconnectats que hem presentat al final de l'Apartat 2.4.3. Continuarem veient que esta assignació és functorial:

Considerem l'assignació $\mathbf{C}$ de Mon en Cat, que envia:

1. Un objecte de Mon, és a dir, un monoide $\mathbf{M}$, en M, la categoria a la què dona lloc $\mathbf{M}$, descrita en la Proposició 2.1.

2. Un morfisme en Mon de $\mathbf{M}$ en $\mathbf{N}$, és a dir, un homomorfisme de monoides $f\colon \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{N}$, en el functor

$$\mathbf{C}(f)\colon \mathsf{M} \longrightarrow \mathsf{N}$$

$$\begin{tikzcd}
e_{\mathbf{M}} \arrow[d, "m"'] & & e_{\mathbf{N}} \arrow[d, "f(m)"] \\
e_{\mathbf{M}} \arrow[r, phantom, ""] & \longmapsto & e_{\mathbf{N}}.
\end{tikzcd}$$

És a dir, tenim

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
\mathbf{C}\colon \mathsf{Mon} \arrow[rr] & & \mathsf{Cat} \\
\mathbf{M} \arrow[d, "f"'] & & \mathsf{M} \arrow[d, "\mathbf{C}(f)"] \\
{} & \longmapsto & {} \\
\mathbf{N} & & \mathsf{N}.
\end{tikzcd}$$

Nota 2.19. Notem que

1. En ser $\mathrm{id}_{e_{\mathbf{M}}} = e_{\mathbf{M}}$ i f homomorfisme de monoides,
$$\mathbf{C}(f)(e_{\mathbf{M}}) = f(e_{\mathbf{M}}) = e_{\mathbf{N}}.$$
(Entenent a $e_{\mathbf{M}}$ i $e_{\mathbf{N}}$ com a morfismes).

2. Si m_1, m_2 són morfismes en M, aleshores
$$\begin{aligned}
\mathbf{C}(f)\big(m_2 \circ m_1\big) &= f(m_2 \circ m_1) && \text{(Def. de } \mathbf{C}\text{)}\\
&= f(m_2 \bullet_{\mathbf{M}} m_1) && \text{(Def. de } \mathsf{M}\text{)}\\
&= f(m_2) \bullet_{\mathbf{N}} f(m_1) && \text{(} f \text{ homomorfisme de monoides)}\\
&= f(m_2) \circ f(m_1) && \text{(Def. de } \mathsf{N}\text{)}\\
&= \mathbf{C}(f)(m_2) \circ \mathbf{C}(f)(m_1). && \text{(Def. de } \mathbf{C}\text{)}
\end{aligned}$$

Concloem, per tant, que, donat un homomorfisme de monoides f, $\mathbf{C}(f)$ és functor i, com a conseqüència, $\mathbf{C}$ està ben definit.

Proposició 2.11. $\mathbf{C}$ *és un functor de* Mon *en* Cat.

Demostració. Preserva identitats:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
\mathbf{M} \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbf{M}}"'] & & \mathsf{M} \arrow[d, "\mathbf{C}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}})"] \\
{} & \overset{\mathbf{C}}{\longmapsto} & {} \\
\mathbf{M} & & \mathsf{M}.
\end{tikzcd}$$

Volem comprovar que $\mathbf{C}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}}) = \mathrm{Id}_{\mathsf{M}}$. Per a això, comprovarem com $\mathbf{C}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}})$ actua sobre objectes i morfismes de M. Per definició de $\mathbf{C}$,
$$\mathbf{C}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}})(e_{\mathbf{M}}) = e_{\mathbf{M}} = \mathrm{Id}_{\mathsf{M}}(e_{\mathbf{M}}).$$

Per altra banda, si m és un morfisme en M, tenim que
$$\begin{aligned}
\mathbf{C}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}})(m) &= \mathrm{id}_{\mathbf{M}}(m) && \text{(Def. de } \mathbf{C}\text{)}\\
&= m && \text{(Def. de id}_{\mathbf{M}}\text{)}\\
&= \mathrm{Id}_{\mathsf{M}}(m). && \text{(Def. de Id}_{\mathsf{M}}\text{)}
\end{aligned}$$

Arribem a la conclusió desitjada.

Preserva composicions:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{M} \arrow[d, "f"'] & & \mathsf{M} \arrow[d, "\mathbf{C}(f)"] \\
\mathbf{N} \arrow[d, "g"'] \arrow[rr, mapsto, "\mathbf{C}"] & & \mathsf{N} \arrow[d, "\mathbf{C}(g)"] \\
\mathbf{P} & & \mathsf{P}.
\end{tikzcd}$$

Volem demostrar que $\mathbf{C}(f \circ g) = \mathbf{C}(g) \circ \mathbf{C}(f)$. Igual que amb la identitat, hem de comprovar com actua $\mathbf{C}(f \circ g)$ sobre objectes i morfismes de $\mathbf{M}$. Pel que fa als objectes:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{C}(g \circ f))(e_{\mathbf{M}}) &= e_{\mathbf{P}} && \text{(Def. de } \mathbf{C}) \\
&= g(e_{\mathbf{N}}) && (g \text{ homomorfisme de monoides}) \\
&= \mathbf{C}(g)(e_{\mathbf{N}}) && \text{(Def. de } \mathbf{C}) \\
&= \mathbf{C}(g)\big(f(e_{\mathbf{M}})\big) && (f \text{ homomorfisme de monoides}) \\
&= \mathbf{C}(g)\big(\mathbf{C}(f)(e_{\mathbf{M}})\big) && \text{(Def. de } \mathbf{C}) \\
&= \big(\mathbf{C}(g) \circ \mathbf{C}(f)\big)(e_{\mathbf{M}}). && \text{(Def. de composició)}
\end{aligned}$$

Pel que fa als morfismes:

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}(g \circ f)(m) &= (g \circ f)(m) && \text{(Def. de } \mathbf{C}) \\
&= g(f(m)) && \text{(Def. de composició)} \\
&= \mathbf{C}(g)\big(f(m)\big) && \text{(Def. de } \mathbf{C}) \\
&= \mathbf{C}(g)\big(\mathbf{C}(f)(m)\big) && \text{(Def. de } \mathbf{C}) \\
&= \big(\mathbf{C}(g) \circ \mathbf{C}(f)\big)(m). && \text{(Def. de composició)}
\end{aligned}$$

per a tot morfisme m en M. Per tant, $\mathbf{C}(f \circ g) = \mathbf{C}(g) \circ \mathbf{C}(f)$, acabant així la demostració. $\square$

2.4.5 Identificació de monoides amb categories puntejades

Amb l'objectiu d'aprofundir en l'estreta relació entre categories (puntejades) i monoides que venim enunciant —i per tal de disposar tant d'una via d'entrada com una d'eixida d'estos dos mons—, es presenta a continuació una xicoteta variació del functor $\mathbf{C}$ definit a l'apartat anterior.

Denotarem per $\mathbf{C}_*$ l'assignació de Mon en Cat_* que envia:

1. Un objecte de Mon, és a dir, un monoide $\mathbf{M}$, en $(\mathsf{M}, e_{\mathbf{M}})$, però esta vegada destacant el seu únic objecte.

2. Un morfisme en Mon de $\mathbf{M}$ en $\mathbf{N}$, és a dir, un homomorfisme de monoides $f\colon \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{N}$, en el functor

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbf{C}_*(f)\colon (\mathsf{M}, e_{\mathbf{M}}) & \longrightarrow & (\mathsf{N}, e_{\mathbf{N}}) \\
\begin{array}{c} e_{\mathbf{M}} \\ m \big\downarrow \\ e_{\mathbf{M}} \end{array} & \longmapsto & \begin{array}{c} e_{\mathbf{N}} \\ \big\downarrow f(m) \\ e_{\mathbf{N}}. \end{array}
\end{array}
$$

És a dir, tenim

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbf{C}_*\colon \mathsf{Mon} & \longrightarrow & \mathsf{Cat}_* \\
\begin{array}{c} \mathbf{M} \\ f \big\downarrow \\ \mathbf{N} \end{array} & \longmapsto & \begin{array}{c} (\mathsf{M}, e_{\mathbf{M}}) \\ \big\downarrow \mathbf{C}_*(f) \\ (\mathsf{N}, e_{\mathbf{N}}). \end{array}
\end{array}
$$

Nota 2.20. Seguint un raonament anàleg al de la Nota 2.19, obtenim que $\mathbf{C}_*(f)$ és un functor. A més, es té que $\mathbf{C}_*(f)(e_{\mathbf{M}}) = e_{\mathbf{N}}$. Per tant, per a tot homomorfisme de monoides f, $\mathbf{C}_*(f)$ és morfisme en Cat_*. Així, $\mathbf{C}_*$ està ben definit.

Proposició 2.12. $\mathbf{C}_*$ *és un functor de* Mon *en* Cat_*.

La demostració es basa en la demostració feta en la proposició anterior i no té cap interés afegit. L'ometem per brevetat.

Nota 2.21. Tenint ja definits els functors d'entrada i eixida entre els mons dels monoides i les categories puntejades, el següent pas lògic és comprovar si estes assignacions són consistents entre si. Com veurem a continuació, la relació entre estos dos functors és tan estreta que la seua composició resulta ser, precisament, la identitat en Mon. Comprovem-ho analitzant com actua esta composició sobre objectes i morfismes. Siga $\mathbf{M} = (M, \bullet, e)$ un monoide. Aleshores, es té que

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{End}_* \circ \mathbf{C}_*)(\mathbf{M}) &= \mathrm{End}_*\big(\mathbf{C}_*(\mathbf{M})\big) && \text{(Def. de composició de functors)} \\
&= \mathrm{End}_*\big((\mathsf{M}, e)\big) && \text{(Def. de } \mathbf{C}_*\text{)} \\
&= \mathbf{End}_{\mathsf{M}}(\boldsymbol{e}) && \text{(Def. de End}_*\text{)} \\
&= \mathbf{M} && \text{(Definició de } \mathsf{M}\text{)} \\
&= \mathrm{Id}_{\mathsf{Mon}}(\mathbf{M}). && \text{(Def. de Id}_{\mathsf{Mon}}\text{)}
\end{aligned}
$$

Per altra banda, si $f\colon \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{N}$ és homomorfisme de monoides, es té que

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{End}_* \circ \mathbf{C}_*)(f) &= \mathrm{End}_*\big(\mathbf{C}_*(f)\big) && \text{(Def. de composició de functors)} \\
&= \mathbf{C}_*(f) && \text{(Def. de End}_*\text{)} \\
&= f && \text{(Def. de } \mathbf{C}_*\text{)} \\
&= \mathrm{Id}_{\mathsf{Mon}}(f). && \text{(Def. de Id}_{\mathsf{Mon}}\text{)}
\end{aligned}
$$

Concloem que

$$\mathrm{End}_* \circ \mathbf{C}_* = \mathrm{Id}_{\mathsf{Mon}}.$$

Nota 2.22. De la nota anterior es deduïx que $\mathbf{C}_*$ és un functor plenament fidel. En primer lloc, per a provar la fidelitat, considerem dos morfismes $f_1, f_2 \colon \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{N}$ en Mon. Si suposem que $\mathbf{C}_*(f_1) = \mathbf{C}_*(f_2)$, l'aplicació del functor endomorfisme ens dona:

$$\mathrm{End}_*\big(\mathbf{C}_*(f_1)\big) = \mathrm{End}_*\big(\mathbf{C}_*(f_2)\big),$$

la qual cosa implica immediatament que $f_1 = f_2$.

Per altra banda, per a demostrar que $\mathbf{C}_*$ és ple, considerem un functor qualsevol $F \colon \mathbf{C}_*(\mathbf{M}) \longrightarrow \mathbf{C}_*(\mathbf{N})$. Aplicant End_* a tot l'esquema, obtenim l'homomorfisme de monoides $\mathrm{End}_*(F) \colon \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{N}$. A partir de les definicions dels functors involucrats, es comprova fàcilment que $\mathbf{C}_*\big(\mathrm{End}_*(F)\big) = F$.

Tot i que hem vist que $\mathrm{End}_* \circ \mathbf{C}_* = \mathrm{Id}_{\mathsf{Mon}}$, no resulta sorprenent que la composició inversa no coincidisca amb $\mathrm{Id}_{\mathsf{Cat}_*}$. En efecte, construir el monoide d'endomorfismes sobre un objecte d'una categoria per a, posteriorment, "categoritzar-lo", no permet recuperar l'estructura de la categoria original en la seua totalitat. Esta asimetria és natural, ja que en el procés de construcció del monoide d'endomorfismes hem ignorat la resta d'objectes i morfismes de la categoria de partida. Tot i això, $\mathbf{C}_* \circ \mathrm{End}_*$ i $\mathrm{Id}_{\mathsf{Cat}_*}$ estan estretament relacionades mitjançant les anomenades *transformacions naturals*, uns "morfismes de functors" que seran el nostre objecte d'estudi en el Capítol 3. Però abans, presentarem un últim functor.

2.4.6 Identificació de monoides amb M-conjunts

Finalitzem este apartat, i amb ell el present capítol, amb l'assignació $(\,\bullet\,)$-Set de Mon en Cat que envia:

1. Un objecte de Mon, és a dir, un monoide $\mathbf{M}$, a la categoria associada $\mathbf{M}$-Set presentada en l'Exemple 2.1.
2. Un morfisme de Mon, és a dir, un homomorfisme de monoides $f \colon \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{N}$, en el functor

$$\begin{tikzcd} f\text{-}\mathsf{Set} \colon \mathbf{N}\text{-}\mathsf{Set} \arrow[r] & \mathbf{M}\text{-}\mathsf{Set} \\ (X, \bullet_X) \arrow[d, "h"'] \arrow[r, phantom, "\longmapsto"] & (X, \bullet^f_X) \arrow[d, "h"] \\ (Y, \bullet_Y) & (Y, \bullet^f_Y). \end{tikzcd}$$

És a dir, tenim

$$\begin{tikzcd} (\,\bullet\,)\text{-}\mathsf{Set} \colon \mathsf{Mon} \arrow[r] & \mathsf{Cat} \\ \mathbf{M} \arrow[d, "f"'] \arrow[r, phantom, "\longmapsto"] & \mathbf{M}\text{-}\mathsf{Set} \\ \mathbf{N} & \mathbf{N}\text{-}\mathsf{Set}. \arrow[u, "f\text{-}\mathsf{Set}"'] \end{tikzcd}$$

Nota 2.23. Abans de fer res, si $\mathbf{M} = (M, \bullet, e_{\mathbf{M}})$ i $\mathbf{N} = (N, *, e_{\mathbf{N}})$ són dos monoides, $f\colon \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{N}$ és un homomorfisme de monoides i $(X, \cdot_X)$ és un $\mathbf{N}$-conjunt hem de demostrar que $\cdot_X^f$ és acció (a esquerra) de $\mathbf{M}$ sobre X, on

$$\begin{aligned} \cdot_X^f := \cdot_X \circ (f \times \mathrm{id}_X)\colon M \times X &\longrightarrow X \\ (m, x) &\longmapsto m \cdot_X^f x = f(m) \cdot_X x \end{aligned}$$

1. Pel que fa a l'acció de la unitat,

$$\begin{aligned} e_{\mathbf{M}} \cdot_X^f x &= f(e_{\mathbf{M}}) \cdot_X x && (\text{Def. de } \cdot_X^f) \\ &= e_{\mathbf{N}} \cdot_X x && (f \text{ homomorfisme de monoides}) \\ &= x && (\cdot_X \text{ acció de } \mathbf{N} \text{ sobre } X) \end{aligned}$$

   per a tot $x \in X$.

2. Si ara triem $m_2, m_1 \in M$, es complix que

$$\begin{aligned} m_2 \cdot_X^f (m_1 \cdot_X^f x) &= m_2 \cdot_X^f \big(f(m_1) \cdot_X x\big) && (\text{Def. de } \cdot_X^f) \\ &= f(m_2) \cdot_X \big(f(m_1) \cdot_X x\big) && (\text{Def. de } \cdot_X^f) \\ &= (f(m_2) * f(m_1)) \cdot_X x && (\cdot_X^f \text{ acció de } \mathbf{N} \text{ sobre } X) \\ &= f(m_2 \bullet m_1) \cdot_X x && (f \text{ homomorfisme de monoides}) \\ &= (m_2 \bullet m_1) \cdot_X^f x && (\text{Def. de } \cdot_X^f) \end{aligned}$$

per a tot $x \in X$. Per tant, $\cdot_X^f$ és acció a esquerra de $\mathbf{M}$ sobre X.

Nota 2.24. Cal també demostrar que, si $h\colon (X, \cdot_X) \longrightarrow (Y, \cdot_Y)$ és aplicació de $\mathbf{N}$-conjunts, aleshores

$$f\text{-}\mathsf{Set}(h) = h\colon (X, \cdot_X^f) \longrightarrow (Y, \cdot_Y^f)$$

és aplicació de $\mathbf{M}$-conjunts. Per a això, suposem $m \in M, x \in X$. Aleshores,

$$\begin{aligned} h(m \cdot_X^f x) &= h\big(f(m) \cdot_X x\big) && (\text{Def. de } \cdot_X^f) \\ &= f(m) \cdot_Y h(x) && (h \text{ aplicació de } \mathbf{N}\text{-conjunts}) \\ &= m \cdot_Y^f h(x) && (\text{Def. de } \cdot_Y^f) \end{aligned}$$

Per tant, h és aplicació de $\mathbf{M}$-conjunts i, juntament amb la nota anterior, concloem que f-Set està ben definida.

Ja estem en condicions d'enunciar la següent proposició:

Proposició 2.13. $(\,\cdot\,)$-Set *és un functor contravariant de* Mon *en* Cat*, i.e., un functor de* $\mathsf{Mon}^{\mathrm{op}}$ *en* Cat*.*

Demostració. Preserva identitats:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{M} \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbf{M}}"'] & & \mathbf{M}\text{-}\mathsf{Set} \\ \mathbf{M} & \arrow[r, mapsto, "(\,\bullet\,)\text{-}\mathsf{Set}"] & \mathbf{M}\text{-}\mathsf{Set}. \arrow[u, "\mathrm{id}_{\mathbf{M}}\text{-}\mathsf{Set}"'] \end{tikzcd}$$

Volem veure que $\mathrm{id}_{\mathbf{M}}\text{-}\mathsf{Set} = \mathrm{Id}_{\mathbf{M}\text{-}\mathsf{Set}}$. Per això, comprovarem com $\mathrm{id}_{\mathbf{M}}\text{-}\mathsf{Set}$ actua sobre objectes i morfismes:

1. Siga $(X, \bullet)$ un $\mathbf{M}$-conjunt. Hem de veure què és $\bullet^{\mathrm{id}_{\mathbf{M}}}$.

$$\begin{aligned} \bullet^{\mathrm{id}_{\mathbf{M}}} &= \bullet \circ (\mathrm{id}_{\mathbf{M}} \times \mathrm{id}_X) && (\text{Def. de } \bullet^{\mathrm{id}_{\mathbf{M}}}) \\ &= \bullet \circ (\mathrm{id}_M \times \mathrm{id}_X) && (\text{Def. de } \mathrm{id}_{\mathbf{M}}) \\ &= \bullet \circ \mathrm{id}_{M \times X} && (\text{Def. de } \mathrm{id}_{M \times X}) \\ &= \bullet. && (\text{Def. de } \mathrm{id}_{M \times X}) \end{aligned}$$

   Així,

$$\mathrm{id}_{\mathbf{M}}\text{-}\mathsf{Set}\big((X, \bullet)\big) = (X, \bullet^{\mathrm{id}_{\mathbf{M}}}) = (X, \bullet) = \mathrm{Id}_{\mathbf{M}\text{-}\mathsf{Set}}\big((X, \bullet)\big),$$

   com volíem.

2. Respecte als morfismes, si $h\colon (X, \bullet) \longrightarrow (X, \bullet)$ és una aplicació de $\mathbf{M}$-conjunts, tenim, per definició, que

$$\mathrm{id}_{\mathbf{M}}\text{-}\mathsf{Set}(h) = h = \mathrm{Id}_{\mathbf{M}\text{-}\mathsf{Set}}(h).$$

Per tant,

$$\mathrm{id}_{\mathbf{M}}\text{-}\mathsf{Set} = \mathrm{Id}_{\mathbf{M}\text{-}\mathsf{Set}}.$$

Preserva composicions (de forma contravariant):

$$\begin{tikzcd} \mathbf{M} \arrow[d, "f"'] & & \mathbf{M}\text{-}\mathsf{Set} \\ \mathbf{N} \arrow[d, "g"'] & \arrow[r, mapsto, "(\,\bullet\,)\text{-}\mathsf{Set}"] & \mathbf{N}\text{-}\mathsf{Set} \arrow[u, "f\text{-}\mathsf{Set}"'] \\ \mathbf{P} & & \mathbf{P}\text{-}\mathsf{Set}. \arrow[u, "g\text{-}\mathsf{Set}"'] \end{tikzcd}$$

Volem veure que $(g \circ f)\text{-}\mathsf{Set} = (f\text{-}\mathsf{Set}) \circ (g\text{-}\mathsf{Set})$. De nou, comprovarem com $(g \circ f)\text{-}\mathsf{Set}$ actua sobre objectes i morfismes:

1. Siga $(X, \bullet)$ un **P**-conjunt. Aleshores,

$$\begin{aligned}
\bullet^{(g\circ f)} &= \bullet \circ \big((g \circ f) \times \mathrm{id}_X\big) && \text{(Def. de } \bullet^{(g\circ f)}\text{)}\\
&= \bullet \circ \big((g \circ f) \times (\mathrm{id}_X \circ \mathrm{id}_X)\big) && (\mathrm{id}_X \text{ idempotent})\\
&= \bullet \circ \big((g \times \mathrm{id}_X) \circ (f \times \mathrm{id}_X)\big) && \text{(Def. de comp. d'aplicacions producte)}\\
&= \big(\bullet \circ (g \times \mathrm{id}_X)\big) \circ (f \times \mathrm{id}_X) && \text{(Ass. de la composició)}\\
&= \bullet^g \circ (f \times \mathrm{id}_X) && \text{(Def. de } \bullet^g\text{)}\\
&= \big(\bullet^g\big)^f. && \text{(Def. de } (\bullet^g)^f\text{)}
\end{aligned}$$

Així,

$$\begin{aligned}
(g \circ f)\text{-}\mathsf{Set}\big((X, \bullet)\big) &= (X, \bullet^{(g\circ f)}) && \text{(Def. de } g \circ f)\text{-}\mathsf{Set}\text{)}\\
&= (X, (\bullet^g)^f) && \text{(El que acabem de comprovar)}\\
&= f\text{-}\mathsf{Set}\big((X, \bullet^g)\big) && \text{(Def. de } f\text{-}\mathsf{Set}\text{)}\\
&= f\text{-}\mathsf{Set}\Big(g\text{-}\mathsf{Set}\big((X, \bullet)\big)\Big) && \text{(Def. de } g\text{-}\mathsf{Set}\text{)}\\
&= (f\text{-}\mathsf{Set} \circ g\text{-}\mathsf{Set})\big((X, \bullet)\big). && \text{(Def. de composició)}
\end{aligned}$$

2. Respecte als morfismes, es té trivialment que, si $h\colon (X, \bullet_X) \longrightarrow (Y, \bullet_Y)$ és una aplicació de **P**-conjunts, aleshores

$$\begin{aligned}
(g \circ f)\text{-}\mathsf{Set}(h) &= h && \text{(Def. de } (g \circ f)\text{-}\mathsf{Set}\text{)}\\
&= f\text{-}\mathsf{Set}(h) && \text{(Def. de } f\text{-}\mathsf{Set}\text{)}\\
&= f\text{-}\mathsf{Set}\big(g\text{-}\mathsf{Set}(h)\big) && \text{(Def. de } g\text{-}\mathsf{Set}\text{)}\\
&= \big(f\text{-}\mathsf{Set} \circ g\text{-}\mathsf{Set}\big)(h). && \text{(Def. de composició)}
\end{aligned}$$

Per tant,

$$(g \circ f)\text{-}\mathsf{Set} = (f\text{-}\mathsf{Set}) \circ (g\text{-}\mathsf{Set}).$$

Concloem, així, la demostració. $\square$

Capítol 3

Transformacions naturals

En teoria de categories primer definim les categories, que són una manera de formalitzar les transformacions que preserven certa estructura, anomenades morfismes. Després definim els functors, que són transformacions de categories que preserven la seua estructura. Ara definirem les transformacions naturals, que seran transformacions entre functors. Esta successió podria suggerir una recursivitat infinita de transformacions sobre transformacions. Si bé és cert que existix una disciplina dedicada a este enfocament —la denominada teoria de categories d'ordre superior (*higher category theory*)—, el present treball no pretén explorar dit camp. En la teoria de categories estàndard, este procés assolix el seu límit en les transformacions naturals, punt on conclourem el nostre estudi de la jerarquia de morfismes.

3.1 Transformacions naturals

Construïm la intuïció pas a pas. Suposem que tenim dos functors $F, G \colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ i que ens agradaria comparar-los definint transformacions entre ells. Atés que els functors actuen tant sobre objectes com sobre morfismes, per a establir una transformació natural entre F i G caldria que les imatges de cada objecte sota ambdós functors estigueren relacionades —mitjançant morfismes— en la categoria d'arribada.

Comencem amb els objectes. Siga c un objecte en C; les seues imatges, $F(c)$ i $G(c)$, són objectes en D. En lloc d'imposar una relació externa entre estos objectes, aprofitarem l'estructura de la pròpia categoria D i buscarem un morfisme entre ells. Així, una transformació natural $\alpha \colon F \Longrightarrow G$, és una selecció de morfismes en D, un per cada c, que connecten $F(c)$ amb $G(c)$. Cadascun dels morfismes que triem es denota com $\alpha_c \colon F(c) \longrightarrow G(c)$ i s'anomena component de α en c.

Seguim amb els morfismes. Siga $f \colon c_1 \longrightarrow c_2$ un morfisme en C. Com F i G són functors, necessàriament existixen els morfismes $F(f) \colon F(c_1) \longrightarrow F(c_2)$ i $G(f) \colon G(c_1) \longrightarrow G(c_2)$ en D. Paral·lelament, les components de la transformació natural ens proporcionen els morfismes $\alpha_{c_1} \colon F(c_1) \longrightarrow G(c_1)$ i $\alpha_{c_2} \colon F(c_2) \longrightarrow G(c_2)$. En este context, l'estructura de D ens oferix dues vies per obtindre un morfisme de $F(c_1)$ en $G(c_2)$: la composició $G(f) \circ \alpha_{c_1}$ i la composició $\alpha_{c_2} \circ F(f)$. En un principi, estos dos camins no haurien de coincidir necessàriament. No obstant això, podem relacionar $F(f)$ i $G(f)$ amb α exigint $G(f) \circ \alpha_{c_1} = \alpha_{c_2} \circ F(f)$. Esta igualtat l'anomenem *condició de naturalitat.*

En resum, podem concebre una transformació natural $\alpha\colon F \Longrightarrow G$ com la selecció d'un conjunt de fletxes en la categoria d'arribada que traslladen el "dibuix" que fa F en D al que fa G

$$\begin{tikzcd}
c_1 \arrow[dd, "h"'] \arrow[dr, "f"] & \\
& c_2 \arrow[dl, "g"] \\
c_3 &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(c_1) \arrow[rrr, "\alpha_{c_1}"] \arrow[dd, "F(h)"'] \arrow[dr, "F(f)"] & & & G(c_1) \arrow[dd] \arrow[dr, "G(f)"] & \\
& F(c_2) \arrow[rrr, "\alpha_{c_2}"] \arrow[dl, "F(g)"] & & & G(c_2) \arrow[dl, "G(g)"] \\
F(c_3) \arrow[rrr, "\alpha_{c_3}"'] & & & G(c_3) &
\end{tikzcd}$$

de manera que tots els paral·lelograms de l'esquema de dalt commuten. Les transformacions naturals se solen anomenar *morfismes de functors*. Donem a continuació la definició rigorosa:

Definició 3.1. Siguen C i D dues categories i F, G functors de C en D:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] & \mathsf{D}.
\end{tikzcd}$$

Una transformació natural de F en G és una col·lecció indexada $\alpha = (\alpha_c)_{c \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})}$ de morfismes $\alpha_c\colon F(c) \longrightarrow G(c)$ en D de forma que, per a tot morfisme $f\colon c_1 \longrightarrow c_2$ en C es té que el següent diagrama commuta:

$$\begin{array}{c|cc}
\mathsf{C} & \multicolumn{2}{c}{\mathsf{D}} \\ \cline{2-3}
 & F & G \\ \hline
\begin{tikzcd} c_1 \arrow[d, "f"'] \\ c_2 \end{tikzcd} & \multicolumn{2}{c}{\begin{tikzcd}
F(c_1) \arrow[r, "\alpha_{c_1}"] \arrow[d, "F(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & G(c_1) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(c_2) \arrow[r, "\alpha_{c_2}"'] & G(c_2)
\end{tikzcd}}
\end{array}$$

És a dir, es complix la condició de naturalitat

$$G(f) \circ \alpha_{c_1} = \alpha_{c_2} \circ F(f).$$

En este cas, escriurem $\alpha\colon F \Longrightarrow G$ i ho representarem per

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[rr, bend left, "F"] \arrow[rr, bend right, "G"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\alpha"] & & \mathsf{D}. \end{tikzcd}$$

Exemple 3.1. Siga $\mathbf{M} = (M, \bullet, e)$ un monoide i M la seua categoria induïda. Aleshores, un element $n \in M$ induïx una transformació natural $\mathrm{Id}_{\mathsf{M}} \Longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathsf{M}}$ si, i només si, $n \bullet m = m \bullet n$ per a tot $m \in M$. La demostració és directa per la definició de la composició en M i considerant el diagrama que dona la condició de naturalitat.

Definició 3.2. Direm que dues transformacions naturals $\alpha = (\alpha_c)_{c \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})}$ i $\alpha' = (\alpha'_c)_{c \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})}$ són iguals, i ho denotarem $\alpha = \alpha'$ si $\alpha_c = \alpha'_c$ per a tot objecte c en C.

Definició 3.3. Una transformació natural α les components de la qual són isomorfismes per a cada objecte s'anomena *isomorfisme natural*. Direm que dos functors F i G són isomorfs si existix un isomorfisme natural entre ells i ho escriurem $\alpha \colon F \cong G$ o simplement $F \cong G$.

Amb l'objectiu de consolidar la noció de transformació natural, es presenten a continuació un parell d'exemples que involucren dos functors definits en el capítol anterior: U i $(\,\bullet\,)^*$ (estos functors es van definir en l'Exemple 2.8 i l'apartat 2.4.1, respectivament). Començarem estudiant la situació $U \circ (\,\bullet\,)^* \colon \mathsf{Set} \longrightarrow \mathsf{Set}$. Donat un conjunt A, ens preguntem si el conjunt resultant de construir el monoide lliure per a posteriorment prescindir de la seua estructura manté alguna relació amb el conjunt original. La resposta és afirmativa:

Exemple 3.2. Existix una transformació natural de $\mathrm{Id}_{\mathsf{Set}}$ en $U \circ (\,\bullet\,)^*$.

Construcció. Podem veure que

1. Si A és objecte en Set (un conjunt), aleshores
$$\big(U \circ (\,\bullet\,)^*\big)(A) = U\big((\,\bullet\,)^*(A)\big) = U(\mathbf{A}^*) = A^*.$$

2. Si f és aplicació entre conjunts,
$$\big(U \circ (\,\bullet\,)^*\big)(f) = U\big((\,\bullet\,)^*(f)\big) = U(f^*) = f^*.$$

La transformació natural en este cas és immediata: $\eta = (\eta_A)_{A \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Set})}$, on η_A denota l'aplicació inserció de generadors definida en el Capítol 1 (vegeu Definició 1.8).

$$
\begin{array}{c|c}
\mathsf{Set} & \mathsf{Set} \\ \cline{2-2}
 & \mathrm{Id}_{\mathsf{Set}} \qquad\qquad U \circ (\,\bullet\,)^* \\ \hline
\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \\ B \end{tikzcd} & \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & A^* \arrow[d, "U(f^*)"] \\ B \arrow[r, "\eta_B"'] & B^* \end{tikzcd}
\end{array}
$$

Efectivament, per definició de $(\,\bullet\,)^*$ es té que f^* és l'únic homomorfisme de monoides que satisfà la relació

$$U(f^*) \circ \eta_A = \eta_B \circ f,$$

complint-se així la condició de naturalitat.

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{Set} \arrow[r, bend left, "\mathrm{Id}_{\mathsf{Set}}"] \arrow[r, bend right, "U \circ (\,\bullet\,)^*"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \eta"] & \mathsf{Set}
\end{tikzcd}
$$

□

La composició inversa $(\,\bullet\,)^* \circ U \colon \mathsf{Mon} \longrightarrow \mathsf{Mon}$ presenta una propietat anàloga. En este cas, donat un monoide $\mathbf{M}$, busquem una relació entre el monoide original i el monoide obtingut en prescindir de la seua estructura per a considerar el seu conjunt subjacent M i, sobre este, construir el monoide lliure. En concret:

Exemple 3.3. Existix una transformació natural de $(\,\bullet\,)^* \circ U$ en $\mathrm{Id}_{\mathsf{Mon}}$.

Construcció. Comprovem què fa la composició $(\,\bullet\,)^* \circ U$ sobre objectes i morfismes en Mon:

1. Siga $\mathbf{M} = (M, \bullet, e)$ objecte en Mon. Aleshores,

$$\big((\,\bullet\,)^* \circ U\big)(\mathbf{M}) = (\,\bullet\,)^*\big(U(\mathbf{M})\big) = (\,\bullet\,)^*(M) = \mathbf{M}^*.$$

2. Siga ara f homomorfisme de monoides. Aleshores,

$$\big((\,\bullet\,)^* \circ U\big)(f) = (\,\bullet\,)^*\big(U(f)\big) = (\,\bullet\,)^*(f) = f^*.$$

Així, volem establir transformació natural per tal que el següent diagrama commute:

$$\begin{array}{c|cc}
\mathsf{Mon} & \multicolumn{2}{c}{\mathsf{Mon}} \\
\cline{2-3}
 & (\bullet)^* \circ U & \mathrm{Id}_{\mathsf{Mon}} \\
\hline
\begin{tikzcd} \mathbf{M} \arrow[d, "f"'] \\ \mathbf{N} \end{tikzcd} & \multicolumn{2}{c}{\begin{tikzcd} \mathbf{M}^* \arrow[r, "?"] \arrow[d, "f^*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbf{M} \arrow[d, "f"] \\ \mathbf{N}^* \arrow[r, "?"'] & \mathbf{N} \end{tikzcd}}
\end{array}$$

Per la propietat universal dels monoides lliures, existix un únic homomorfisme de monoides $\mathrm{id}^\sharp_{U(\mathbf{M})} \colon \mathbf{M}^* \longrightarrow \mathbf{M}$ satisfent $U(\mathrm{id}^\sharp_{U(\mathbf{M})}) \circ \eta_{U(\mathbf{M})} = \mathrm{id}_{U(\mathbf{M})}$. Cal notar que este homomorfisme ja l'hem estudiat al Capítol 1 (vegeu la Nota 1.2). Ens trobem en la següent situació:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\eta_{U(\mathbf{M})}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{U(\mathbf{M})}"'] & U(\mathbf{M}^*) \arrow[d, dashed, "\exists!\, U(\mathrm{id}^\sharp_{U(\mathbf{M})})"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\
 & U(\mathbf{M}).
\end{tikzcd}$$

Així, per a cada objecte $\mathbf{M}$ de Mon definim $\varepsilon_{\mathbf{M}} := \mathrm{id}^\sharp_{U(\mathbf{M})}$. Notem que, per a tot homomorfisme $f \colon \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{N}$, $f \circ \varepsilon_{\mathbf{M}}$ i $\varepsilon_{\mathbf{N}} \circ f^*$ són homomorfismes de monoides (de $\mathbf{M}^*$ en $\mathbf{N}$) en ser composicions d'homomorfismes i, a més,

$$\begin{aligned}
U(f \circ \mathrm{id}^\sharp_{U(\mathbf{M})}) \circ \eta_{U(\mathbf{M})} &= \big(U(f) \circ U(\mathrm{id}^\sharp_{U(\mathbf{M})})\big) \circ \eta_{U(\mathbf{M})} && (U \text{ functor}) \\
&= U(f) \circ \big(U(\mathrm{id}^\sharp_{U(\mathbf{M})}) \circ \eta_{U(\mathbf{M})}\big) && (\text{Ass. de la composició}) \\
&= U(f) \circ \mathrm{id}_{U(\mathbf{M})} && (\text{Propietat universal}) \\
&= U(f) && (\text{Def. de morfisme identitat}) \\
&= \mathrm{id}_{U(\mathbf{N})} \circ U(f) && (\text{Def. de morfisme identitat}) \\
&= \big(U(\mathrm{id}^\sharp_{U(\mathbf{N})}) \circ \eta_{U(\mathbf{N})}\big) \circ U(f) && (\text{Propietat universal}) \\
&= U(\mathrm{id}^\sharp_{U(\mathbf{N})}) \circ \big(\eta_{U(\mathbf{N})} \circ U(f)\big) && (\text{Ass. de la composició}) \\
&= U(\mathrm{id}^\sharp_{U(\mathbf{N})}) \circ \big(U(f^*) \circ \eta_{U(\mathbf{M})}\big) && (\text{Def. de } (\bullet)^*) \\
&= \big(U(\mathrm{id}^\sharp_{U(\mathbf{N})}) \circ U(f^*)\big) \circ \eta_{U(\mathbf{M})} && (\text{Ass. de la composició}) \\
&= U(\mathrm{id}^\sharp_{U(\mathbf{N})} \circ f^*) \circ \eta_{U(\mathbf{M})}. && (U \text{ functor})
\end{aligned}$$

Per la unicitat de la propietat universal concloem

$$f \circ \varepsilon_{\mathbf{M}} = f \circ \mathrm{id}^\sharp_{U(\mathbf{M})} = \mathrm{id}^\sharp_{U(\mathbf{N})} \circ f^* = \varepsilon_{\mathbf{N}} \circ f^*,$$

és a dir, el següent diagrama commuta:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{M}^* \arrow[r, "\varepsilon_{\mathbf{M}}"] \arrow[d, "f^*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{M} \arrow[d, "f"] \\
\mathbf{N}* \arrow[r, "\varepsilon_{\mathbf{N}}"'] & \mathbf{N}.
\end{tikzcd}
$$

Per tant, $\varepsilon = (\varepsilon_{\mathbf{M}})_{\mathbf{M} \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mon})}$ és una transformació natural en complir la condició de naturalitat.

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{Mon} \arrow[r, bend left, "(\,\bullet\,)^* \circ U"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{Id}_{\mathsf{Mon}}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \varepsilon"] & \mathsf{Mon}
\end{tikzcd}
$$

□

Nota 3.1. De la mateixa manera que les components de la transformació natural η (definida en l'Exemple 3.2) satisfan la propietat universal del monoide lliure, les components de la transformació ε definida en l'exemple anterior disposen d'una propietat universal dual. Concretament, per a cada homomorfisme $g\colon \mathbf{A}^* \longrightarrow \mathbf{M}$, existix una única aplicació $g^\flat\colon A \longrightarrow U(\mathbf{M})$ tal que $\varepsilon_{\mathbf{M}} \circ (g^\flat)^* = g$. És a dir, el següent diagrama commuta:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{A}^* \arrow[d, dashed, "\exists!\,(g^\flat)^*"'] \arrow[dr, "g"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft", shift right=3ex] & \\
\mathbf{M}^* \arrow[r, "\varepsilon_{\mathbf{M}}"'] & \mathbf{M}.
\end{tikzcd}
$$

Demostració. Donat un homomorfisme $g\colon \mathbf{A}^* \longrightarrow \mathbf{M}$ definim

$$g^\flat := U(g) \circ \eta_A \colon A \longrightarrow U(\mathbf{M}).$$

Notem que l'homomorfisme $\varepsilon_{\mathbf{M}} \circ (g^\flat)^* \colon \mathbf{A}^* \longrightarrow \mathbf{M}$ satisfà

$$\begin{aligned}
U\big(\varepsilon_{\mathbf{M}} \circ (g^\flat)^*\big) \circ \eta_A &= U(\varepsilon_{\mathbf{M}}) \circ \Big(U\big((g^\flat)^*\big) \circ \eta_A\Big) && (U \text{ functor}) \\
&= U(\varepsilon_{\mathbf{M}}) \circ (\eta_{U(\mathbf{M})} \circ g^\flat) && (\text{Naturalitat de } \eta) \\
&= \big(U(\varepsilon_{\mathbf{M}}) \circ \eta_{U(\mathbf{M})}\big) \circ g^\flat && (\text{Ass. de la composició}) \\
&= \big(U(\mathrm{id}^\sharp_{U(\mathbf{M})}) \circ \eta_{U(\mathbf{M})}\big) \circ g^\flat && (\text{Def. de } \varepsilon) \\
&= \mathrm{id}_{U(\mathbf{M})} \circ g^\flat && (\text{Propietat universal}) \\
&= g^\flat, && (\text{Def. de morfisme identitat})
\end{aligned}$$

mentre que, per definició, $g^\flat = U(g) \circ \eta_A$. Per la unicitat de la propietat universal del monoide lliure, concloem que $\varepsilon_{\mathbf{M}} \circ (g^\flat)^* = g$, com volíem. $\square$

3.2 La categoria de functors: composició vertical

Donades dues categories C i D, hem vist que alguns functors de C en D es poden relacionar mitjançant transformacions naturals. Si disposem de dues transformacions naturals $\alpha \colon F \Longrightarrow G$ i $\beta \colon G \Longrightarrow H$, resulta natural preguntar-se si existix algun procediment per a obtindre una transformació natural entre F i H. La resposta, com veurem en la següent proposició, és afirmativa.

Proposició 3.1. *Siguen C, D categories, $F, G, H \colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ functors i $\alpha \colon F \Longrightarrow G$, $\beta \colon G \Longrightarrow H$ transformacions naturals amb $\alpha = (\alpha_c)_{c \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})}$, $\beta = (\beta_c)_{c \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})}$. Aleshores, $(\beta_c \circ \alpha_c)_{c \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})}$ és una transformació natural de F en H.*

Anomenem composició vertical de α i β, i ho denotarem $\beta \circ \alpha$, a la transformació natural

$$\beta \circ \alpha := (\beta_c \circ \alpha_c)_{c \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})}.$$

És a dir, tenim

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathsf{C} \arrow[r, bend left=60, "F", ""{name=F, below}] \arrow[r, "G" description, ""{name=G1, above}, ""{name=G2, below}] \arrow[r, bend right=60, "H"', ""{name=H, above}] & \mathsf{D}
\arrow[Rightarrow, from=F, to=G1, "\alpha"] \arrow[Rightarrow, from=G2, to=H, "\beta"]
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathsf{C} \arrow[r, bend left=60, "F", ""{name=F, below}] \arrow[r, bend right=60, "H"', ""{name=H, above}] & \mathsf{D}.
\arrow[Rightarrow, from=F, to=H, "\beta \circ \alpha"]
\end{tikzcd}$$

Demostració. Siguen c_1, c_2 objectes en C i $f \colon c_1 \longrightarrow c_2$ morfisme en C. Volem veure que el següent diagrama commuta:

C	D	
	F	H

$$\begin{tikzcd}
c_1 \arrow[d, "f"'] & F(c_1) \arrow[r, "\alpha_{c_1} \circ \beta_{c_1}"] \arrow[d, "F(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H(c_1) \arrow[d, "H(f)"] \\
c_2 & F(c_2) \arrow[r, "\alpha_{c_2} \circ \beta_{c_2}"'] & H(c_2)
\end{tikzcd}$$

trobant-nos ja en la següent situació:

C	D		
	F	G	H

$$\begin{tikzcd}
c_1 \arrow[d, "f"'] & F(c_1) \arrow[r, "\alpha_{c_1}"] \arrow[d, "F(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & G(c_1) \arrow[r, "\beta_{c_1}"] \arrow[d, "G(f)" description] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H(c_1) \arrow[d, "H(f)"] \\
c_2 & F(c_2) \arrow[r, "\alpha_{c_2}"'] & G(c_2) \arrow[r, "\beta_{c_2}"'] & H(c_2)
\end{tikzcd}$$

o, el que és el mateix,

$$G(f) \circ \alpha_{c_1} = \alpha_{c_2} \circ F(f), \; H(f) \circ \beta_{c_1} = \beta_{c_2} \circ G(f).$$

Comprovem si $(\beta_c \circ \alpha_c)_{c \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})}$ complix la condició de naturalitat:

$$\begin{aligned}
H(f) \circ (\beta_{c_1} \circ \alpha_{c_1}) &= \big(H(f) \circ \beta_{c_1}\big) \circ \alpha_{c_1} && \text{(Associativitat de la composició)} \\
&= \big(\beta_{c_2} \circ G(f)\big) \circ \alpha_{c_1} && \text{(Condició de naturalitat de } \beta\text{)} \\
&= \beta_{c_2} \circ \big(G(f) \circ \alpha_{c_1}\big) && \text{(Associativitat de la composició)} \\
&= \beta_{c_2} \circ \big(\alpha_{c_2} \circ F(f)\big) && \text{(Condició de naturalitat de } \alpha\text{)} \\
&= (\beta_{c_2} \circ \alpha_{c_2}) \circ F(f). && \text{(Associativitat de la composició)}
\end{aligned}$$

Concloem que $\beta \circ \alpha$ és una transformació natural de F en H. $\square$

Observem que tenim functors, transformacions entre functors i una noció de composició entre dites transformacions. A més, esta composició és associativa perquè la composició en D ho és. Només ens queda un ingredient per ser capaços de definir una categoria on els objectes siguen els functors de C en D: la identitat.

Proposició 3.2. *Siguen C i D dues categories i $F\colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ un functor entre elles. Aleshores,*

$$\mathrm{id}_F\colon F \Longrightarrow F, \qquad \mathrm{id}_F = (\mathrm{id}_{F(c)})_{c \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, bend right=50, "F"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \mathrm{id}_F"] & \mathsf{D}
\end{tikzcd}$$

és una transformació natural —de fet, un isomorfisme natural— que, a més, fa de neutre per a la composició vertical.

Demostració. Considerem c_1, c_2 objectes en C i $f\colon c_1 \longrightarrow c_2$ morfisme en C. Volem veure que el següent diagrama commuta:

$$\begin{array}{c|c}
\mathsf{C} & \mathsf{D} \\
\cline{2-2}
 & F \qquad\qquad\qquad F \\
\hline
\begin{tikzcd} c_1 \arrow[d, "f"'] \\ c_2 \end{tikzcd} &
\begin{tikzcd}[column sep=large] F(c_1) \arrow[r, "\mathrm{id}_{c_1}"] \arrow[d, "F(f)"'] & F(c_1) \arrow[d, "F(f)"] \\ F(c_2) \arrow[r, "\mathrm{id}_{c_2}"'] & F(c_2) \end{tikzcd}
\end{array}$$

Evidentment,

$$F(f) \circ \mathrm{id}_{F(c_1)} = F(f) = \mathrm{id}_{F(c_2)} \circ F(f)$$

i, per tant, la condició de naturalitat es complix. A més, $\mathrm{id}_{F(c)}$ és, evidentment, un isomorfisme en D per a tot c objecte en C i, per tant, id_F és isomorfisme natural. $\square$

Ja estem en condicions de definir la categoria de functors:

Definició 3.4. Siguen C i D dues categories. Definim la categoria de functors entre C i D, que denotarem per D^{C}, com aquella on:

1. Els objectes són functors $F\colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$,
2. Els morfismes són transformacions naturals,
3. La regla de composició és la composició vertical,
4. El morfisme identitat per a cada F és la transformació natural identitat id_F.

Exemple 3.4. Siga $\mathbf{M} = (M, \bullet, e)$ un monoide i M la seua categoria induïda. Aleshores la categoria de functors $\mathsf{Set}^{\mathsf{M}}$ és isomorfa a la categoria $\mathbf{M}$-Set de $\mathbf{M}$-conjunts. Per a provar-ho, adaptarem els arguments desenvolupats en la Proposició 1.7, aprofitant les evidents similituds formals que compartixen.

En primer lloc, observem que un objecte $F \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Set}^{\mathsf{M}})$ queda determinat per un conjunt $X = F(e)$ i l'assignació, per a cada $m \in M$, d'una aplicació $F(m)\colon X \longrightarrow X$, un endomorfisme de X en Set. En ser F functor, es té que

1. $F(e) = \mathrm{id}_X$ (preserva la identitat),

2. $F(m \bullet n) = F(m) \circ F(n)$ (preserva la composició).

Si, per a cada $m \in M$, definim l'operació $m \cdot_F x := F(m)(x)$ $x \in F(e)$, estes condicions coincidixen exactament amb les condicions de la definició d'acció a l'esquerra d'un monoide sobre un conjunt.

Per altra banda, els morfismes $\alpha \colon F \Longrightarrow G$ estan determinats per una única component $\alpha_e \colon F(e) \longrightarrow G(e)$. La condició de naturalitat exigix que, per a tot $m \in M$, el diagrama següent commute:

M	Set	
	F	G

$$\begin{tikzcd} e \arrow[d, "m"'] & F(e) \arrow[r, "\alpha_e"] \arrow[d, "F(m)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & G(e) \arrow[d, "G(m)"] \\ e & F(e) \arrow[r, "\alpha_e"'] & G(e) \end{tikzcd}$$

Esta commutativitat es traduïx en la igualtat $\alpha_e\big(F(m)(x)\big) = G(m)\big(\alpha_e(x)\big)$ per a tot $x \in F(e)$, que en termes de l'acció és exactament la condició d'aplicació de $\mathbf{M}$-conjunts $\alpha_e(m \cdot_F x) = m \cdot_G \alpha_e(x)$.

Estes correspondències definixen un functor $\mathsf{Set}^{\mathsf{M}} \longrightarrow \mathbf{M}\text{-}\mathsf{Set}$ que a cada objecte F de $\mathsf{Set}^{\mathsf{M}}$ li assigna el $\mathbf{M}$-conjunt $\big(F(e), \cdot_F\big)$ i a cada transformació natural $\alpha : F \Longrightarrow G$ li assigna la seua única component $\alpha_e : F(e) \longrightarrow G(e)$. Esta assignació és plenament fidel i bijectiva en els objectes i, per tant, definix un isomorfisme

$$\mathsf{Set}^{\mathsf{M}} \cong \mathbf{M}\text{-}\mathsf{Set}.$$

En la Definició 3.1 hem introduït el concepte d'isomorfisme natural. Sabent que les transformacions naturals són els morfismes de la categoria de functors, veurem a continuació que esta denominació està plenament justificada ja que tot isomorfisme natural admet un invers respecte a la composició vertical.

Proposició 3.3. *Siguen* C *i* D *dues categories. Siguen* $F, G \colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ *functors i siga* $\alpha = (\alpha_c)_{c \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})}$ *un isomorfisme natural de* F *en* G*. Aleshores,*

$$\alpha^{-1} := (\alpha_c^{-1})_{c \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})}$$

és un isomorfisme natural de G *en* F *al que anomenem invers natural de* α*. És a dir, tenim:*

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{C} \arrow[r, bend left=50, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "G"'{name=L}] & \mathsf{D}
\arrow[from=U, to=L, Rightarrow, "\alpha"]
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\mathsf{C} \arrow[r, bend left=50, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "G"'{name=L}] & \mathsf{D}.
\arrow[from=L, to=U, Rightarrow, "\alpha^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

Demostració. Notem que, per a cada c objecte en C, α_c^{-1} està ben definit i és un morfisme en D de $G(c)$ en $F(c)$. Per veure que α^{-1} és una transformació natural de G en F, considerem c_1, c_2 objectes en C i $f\colon c_1 \longrightarrow c_2$ un morfisme en C. Per ara, tenim:

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{C} & \mathsf{D} & \\
 & F & G \\
c_1 \arrow[d, "f"'] & F(c_1) \arrow[r, "\alpha_{c_1}"] \arrow[d, "F(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & G(c_1) \arrow[d, "G(f)"] \\
c_2 & F(c_2) \arrow[r, "\alpha_{c_2}"'] & G(c_2)
\end{tikzcd}
$$

Volem veure que el següent diagrama commuta:

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{C} & \mathsf{D} & \\
 & F & G \\
c_1 \arrow[d, "f"'] & G(c_1) \arrow[r, "\alpha_{c_1}^{-1}"] \arrow[d, "G(f)"'] & F(c_1) \arrow[d, "F(f)"] \\
c_2 & G(c_2) \arrow[r, "\alpha_{c_2}^{-1}"'] & F(c_2)
\end{tikzcd}
$$

Per fer-ho comprovarem si es complix la condició de naturalitat:

$$
\begin{aligned}
F(f) \circ \alpha_{c_1}^{-1} &= \mathrm{id}_{F(c_2)} \circ F(f) \circ \alpha_{c_1}^{-1} && (\text{Def. de } \mathrm{id}_{F(c_2)}) \\
&= \left(\alpha_{c_2}^{-1} \circ \alpha_{c_2}\right) \circ F(f) \circ \alpha_{c_1}^{-1} && (\alpha_{c_2} \text{ isomorfisme}) \\
&= \alpha_{c_2}^{-1} \circ \left(\alpha_{c_2} \circ F(f)\right) \circ \alpha_{c_2}^{-1} && (\text{Ass. de la composició}) \\
&= \alpha_{c_2}^{-1} \circ \left(G(f) \circ \alpha_{c_1}\right) \circ \alpha_{c_1}^{-1} && (\text{Condició de naturalitat de } \alpha) \\
&= \alpha_{c_2}^{-1} \circ G(f) \circ \left(\alpha_{c_1} \circ \alpha_{c_1}^{-1}\right) && (\text{Ass. de la composició}) \\
&= \alpha_{c_2}^{-1} \circ G(f) \circ \mathrm{id}_{G(c_1)} && (\alpha_{c_1} \text{ isomorfisme}) \\
&= \alpha_{c_2}^{-1} \circ G(f). && (\text{Def. de } \mathrm{id}_{G(c_1)})
\end{aligned}
$$

Així, es complix la condició de naturalitat de α^{-1} i, per tant, α^{-1} és un isomorfisme natural de G en F. $\square$

És immediat comprovar que per a tot isomorfisme natural α es complixen les identitats

$$\alpha^{-1} \circ \alpha = \mathrm{id}_F, \qquad \alpha \circ \alpha^{-1} = \mathrm{id}_G,$$

la qual cosa confirma que α és un isomorfisme en la categoria D^{C}.

Donem un parell d'exemples més de transformacions naturals. Esta vegada estudiarem el cas de la composició $\mathbf{C}_* \circ \mathrm{End}_* \colon \mathsf{Cat}_* \longrightarrow \mathsf{Cat}_*$, el qual ja vam introduir al final de la Nota 2.21. (Els functors involucrats es troben definits als Apartats 2.4.5 i 2.4.3).

Exemple 3.5. Existix una transformació natural de $\mathbf{C}_* \circ \mathrm{End}_*$ en $\mathrm{Id}_{\mathsf{Cat}_*}$.

Construcció. Podem veure que

1. Si (C, c) és un objecte de Cat_*, aleshores

$$(\mathbf{C}_* \circ \mathrm{End}_*)(\mathsf{C}, c) = \mathbf{C}_*\big(\mathrm{End}_*(\mathsf{C}, c)\big) = \mathbf{C}_*\big(\boldsymbol{\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(c)}\big) = \big(\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(c), \mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}\big),$$

   on $\big(\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(c), \mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}\big)$ és la categoria induïda pel monoide $\boldsymbol{\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(c)}$ amb $\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}$ com a únic objecte i els endomorfismes de c en (C, c) com a morfismes.

2. Si $F \colon (\mathsf{C}, c) \longrightarrow (\mathsf{D}, d)$ és morfisme en Cat_*, aleshores

$$(\mathbf{C}_* \circ \mathrm{End}_*)(F) = \mathbf{C}_*\big(\mathrm{End}_*(F)\big) = F.$$

Volem establir una transformació natural per tal que el següent diagrama commute.

$$
\begin{array}{c|ccc}
\mathsf{Cat}_* & & \mathsf{Cat}_* & \\ \cline{2-4}
 & \mathbf{C}_* \circ \mathrm{End}_* & & \mathrm{Id}_{\mathsf{Cat}_*} \\ \hline
(\mathsf{C}, c) & \big(\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(c), \mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}\big) & \xrightarrow{\ ?\ } & (\mathsf{C}, c) \\
F \Big\downarrow & F \Big\downarrow & \circlearrowleft & \Big\downarrow F \\
(\mathsf{D}, d) & \big(\mathsf{End}_{\mathsf{D}}(d), \mathrm{id}_d^{\mathsf{D}}\big) & \xrightarrow[\ ?\ ]{} & (\mathsf{D}, d)
\end{array}
$$

Estudiem com actua F sobre $\big(\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(c), \mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}\big)$:

1. Pel que fa a l'únic objecte no hi ha més opció que $F(\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}) = \mathrm{id}_d^{\mathsf{D}}$.

2. Pel que fa a la identitat en l'únic objecte de $\big(\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(c), \mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}\big)$:

$$F(\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}) = \mathrm{id}_{F(c)}^{\mathsf{D}} = \mathrm{id}_d^{\mathsf{D}}.$$

3. Si f, g són morfismes en $\big(\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(c), \mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}\big)$ (i.e., són endomorfismes de c en C)
$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f),$$
en ser F functor.

La transformació natural que proposem haurà de ser una col·lecció de functors del tipus
$$\big(\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(c), \mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}\big) \longrightarrow (\mathsf{C}, c).$$
Considerem l'assignació:
$$\Gamma_{(\mathsf{C},c)} \colon \big(\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(c), \mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}\big) \longrightarrow (\mathsf{C}, c)$$
$$\begin{tikzcd} \mathrm{id}_c^{\mathsf{C}} \arrow[d, "f"'] & & c \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{id}_c^{\mathsf{C}} \arrow[r, phantom, "\longmapsto"] & & c. \end{tikzcd}$$
La comprovació de que $\Gamma_{(\mathsf{C},c)}$ és functor és directa:

1. Preserva identitats
$$\Gamma_{(\mathsf{C},c)}(\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}) = \mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}.$$
2. Si f, g són morfismes en $\big(\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(c), \mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}\big)$ (i.e., endomorfismes de c en C), aleshores
$$\Gamma_{(\mathsf{C},c)}(g \circ f) = g \circ f = \Gamma_{(\mathsf{C},c)}(g) \circ \Gamma_{(\mathsf{C},c)}(f).$$

Així, considerem $\Gamma = (\Gamma_{(\mathsf{C},c)})_{(\mathsf{C},c) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Cat}_*)}$. Ens queda comprovar la condició de naturalitat de Γ. Per això comprovarem com actuen els functors $F \circ \Gamma_{(\mathsf{C},c)}$ i $\Gamma_{(\mathsf{D},d)} \circ F$ de $\big(\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(c), \mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}\big)$ en (D, d) sobre objectes i morfismes.

1. Pel que fa a l'únic objecte de $\big(\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(c), \mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}\big)$, trobem que
$$\begin{aligned} \big(F \circ \Gamma_{(\mathsf{C},c)}\big)(\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}) &= F\big(\Gamma_{(\mathsf{C},c)}(\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}})\big) && \text{(Def. de composició de functors)} \\ &= F(c) && \text{(Def. de } \Gamma_{(\mathsf{C},c)}\text{)} \\ &= d && \text{(}F\text{ morfisme en } \mathsf{Cat}_*\text{)} \\ &= \Gamma_{(\mathsf{D},d)}(\mathrm{id}_d^{\mathsf{D}}) && \text{(Def. de } \Gamma_{(\mathsf{D},d)}\text{)} \\ &= \Gamma_{(\mathsf{D},d)}\big(F(\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}})\big) && \text{(Pel que hem discutit abans sobre } F\text{)} \\ &= \big(\Gamma_{(\mathsf{D},d)} \circ F\big)(\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}). && \text{(Def. de composició de functors)} \end{aligned}$$
2. Pel que fa als morfismes, si f, g són morfismes en $\big(\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(c), \mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}\big)$, es té que
$$\begin{aligned} \big(F \circ \Gamma_{(\mathsf{C},c)}\big)(g \circ f) &= F\big(\Gamma_{(\mathsf{C},c)}(g \circ f)\big) && \text{(Def. de composició de functors)} \\ &= F(g \circ f) && \text{(Def. de } \Gamma_{(\mathsf{C},c)}\text{)} \\ &= \Gamma_{(\mathsf{D},d)}\big(F(g \circ f)\big) && \text{(Def. de } \Gamma_{(\mathsf{D},d)}\text{)} \\ &= \big(\Gamma_{(\mathsf{D},d)} \circ F\big)(g \circ f). && \text{(Def. de composició de functors)} \end{aligned}$$

Concloem que $F \circ \Gamma_{(\mathsf{C},c)} = \Gamma_{(\mathsf{D},d)} \circ F$ i, per tant, que

$$\Gamma = (\Gamma_{(\mathsf{C},c)})_{(\mathsf{C},c)\in \mathrm{Ob}(\mathsf{Cat}_*)}$$

és una transformació natural de $\mathbf{C}_* \circ \mathrm{End}_*$ en $\mathrm{Id}_{\mathsf{Cat}_*}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Cat}_* \arrow[rr, bend left, "\mathbf{C}_* \circ \mathrm{End}_*"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{Id}_{\mathsf{Cat}_*}"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \Gamma"] & & \mathsf{Cat}_*
\end{tikzcd}$$

□

Ara bé, cal notar que Γ no és isomorfisme natural. Ho provarem per contradicció: suposem que Γ és un isomorfisme natural. Això implicaria que per a cada objecte (C,c) de Cat_*, la component

$$\begin{aligned}
\Gamma_{(\mathsf{C},c)} \colon \big(\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(c), \mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}\big) &\longrightarrow (\mathsf{C},c) \\
\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}} \xrightarrow{f} \mathrm{id}_c^{\mathsf{C}} &\longmapsto c \xrightarrow{f} c
\end{aligned}$$

és un isomorfisme en Cat_*. Com que esta condició s'hauria de complir per a qualsevol categoria puntejada, n'hi ha prou amb considerar (C,c) tal que $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})\backslash\{c\} \neq \emptyset$. En ser $\Gamma_{(\mathsf{C},c)}$ un isomorfisme en Cat_*, hauria d'existir un functor invers $F\colon (\mathsf{C},c) \longrightarrow \big(\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(c), \mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}\big)$ tal que

$$F \circ \Gamma_{(\mathsf{C},c)} = \mathrm{Id}_{(\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(c), \mathrm{id}_c^{\mathsf{C}})}, \quad \Gamma_{(\mathsf{C},c)} \circ F = \mathrm{Id}_{(\mathsf{C},c)}.$$

Siga $c' \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$ tal que $c' \neq c$. Aleshores,

$$\begin{aligned}
(\Gamma_{(\mathsf{C},c)} \circ F)(c') &= \Gamma_{(\mathsf{C},c)}\big(F(c')\big) && \text{(Def. comp. de funtors)} \\
&= \Gamma_{(\mathsf{C},c)}(\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}) && \big(\mathrm{Ob}\big(\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(c)\big) = \{\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}\}\big) \\
&= c && \text{(Def. de } \Gamma_{(\mathsf{C},c)}) \\
&\neq c' && \text{(Per la tria de } c') \\
&= \mathrm{Id}_{(\mathsf{C},c)}(c'). && \text{(Def. de } \mathrm{Id}_{(\mathsf{C},c)})
\end{aligned}$$

Per tant,

$$\Gamma_{(\mathsf{C},c)} \circ F \neq \mathrm{Id}_{(\mathsf{C},c)}$$

i tenim una contradicció.

Nota 3.2. Observem que l'impediment principal per a que Γ siga un isomorfisme natural és l'existència de més d'un objecte en les categories de Cat_*. Si restringim el nostre domini a $\mathsf{Cat}_{*,1}$ —la subcategoria plena de Cat_* formada per categories puntejades amb un sol objecte (vegeu Nota 2.1)—, el functor End_* actua de manera que Γ esdevé, efectivament, un isomorfisme natural.

Denotem —per simplificar notació— $\mathrm{End}_*\!\upharpoonright_1$ i $\mathbf{C}_*\!\upharpoonright^1$ la restricció i correstricció de End_* i $\mathbf{C}_*$ a $\mathsf{Cat}_{*,1}$, respectivament. Sabent, per la Nota 2.9, que $\mathbf{C}_*\!\upharpoonright^1\circ\mathrm{End}_*\!\upharpoonright_1 = (\mathbf{C}_*\circ\mathrm{End}_*)\!\upharpoonright_1^1$, definim, per a cada objecte (C, c) de $\mathsf{Cat}_{*,1}$, l'assignació:

$$\Gamma^{-1}_{(\mathsf{C},c)} : (\mathsf{C}, c) \longrightarrow \big(\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(c), \mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}\big)$$

$$\begin{array}{ccc} c & & \mathrm{id}_c^{\mathsf{C}} \\ f\big\downarrow & \longmapsto & \big\downarrow f \\ c & & \mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}. \end{array}$$

Com en $\mathsf{Cat}_{*,1}$ l'únic objecte de C és precisament c, l'assignació $\Gamma^{-1}_{(\mathsf{C},c)}$ queda determinada de forma unívoca i trivial. És immediat comprovar que:

$$\Gamma^{-1}_{(\mathsf{C},c)} \circ \Gamma_{(\mathsf{C},c)} = \mathrm{Id}_{(\mathsf{C},c)} \quad \text{i} \quad \Gamma_{(\mathsf{C},c)} \circ \Gamma^{-1}_{(\mathsf{C},c)} = \mathrm{Id}_{(\mathbf{C}_*\upharpoonright^1\circ\mathrm{End}_*\upharpoonright_1)(\mathsf{C},c)}$$

D'esta manera, la família $\overline{\Gamma} := (\Gamma_{(\mathsf{C},c)})_{(\mathsf{C},c)\in\mathrm{Ob}(\mathsf{Cat}_{*,1})}$ definix l'isomorfisme natural que buscàvem:

$$\overline{\Gamma} \colon \mathbf{C}_*\!\upharpoonright^1 \circ \mathrm{End}_*\!\upharpoonright_1 \cong \mathrm{Id}_{\mathsf{Cat}_{*,1}}$$

És evident que Cat_1 —la subcategoria plena de Cat formada per categories amb un sol objecte— és isomorfa a $\mathsf{Cat}_{*,1}$. En efecte, la restricció i correstricció simultània $U_*\!\upharpoonright_1^1$ del functor d'oblit U_* —presentat en la Nota 2.8— a $\mathsf{Cat}_{*,1}$ definix un isomorfisme de manera trivial, ja que l'elecció del punt c és única. No obstant això, hem optat per treballar amb $\mathsf{Cat}_{*,1}$ per aprofitar els functors definits al final del Capítol 2.

Reprenem l'estudi de la composició $\mathbf{C}_*\circ\mathrm{End}_*$. No només disposem d'una transformació natural $\mathbf{C}_* \circ \mathrm{End}_* \Longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathsf{Cat}_*}$, sinó que, tot i que ja hem vist que Γ no és isomorfisme natural, també podem trobar una transformació natural en sentit contrari:

Exemple 3.6. Existix una transformació natural de $\mathrm{Id}_{\mathsf{Cat}_*}$ en $\mathbf{C}_* \circ \mathrm{End}_*$. En efecte, si definim

$$K \colon \mathrm{Id}_{\mathsf{Cat}_*} \Longrightarrow \mathbf{C}_* \circ \mathrm{End}_*, \qquad K = (K_{\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}})_{(\mathsf{C},c)\in\mathrm{Ob}(\mathsf{Cat}_*)},$$

on cada component

$$K_{\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}} : (\mathsf{C}, c) \longrightarrow \big(\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(c), \mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}\big)$$

$$\begin{array}{ccc} c_1 & & \mathrm{id}_c^{\mathsf{C}} \\ f\big\downarrow & \longmapsto & \big\downarrow \mathrm{id}_c^{\mathsf{C}} \\ c_2 & & \mathrm{id}_c^{\mathsf{C}} \end{array}$$

actua com el functor constant sobre l'objecte destacat. És a dir, per l'estudi d'actuació fet al principi de l'Exemple 3.5, ens trobem en la següent situació.

$$\begin{array}{c|c}
\mathsf{Cat}_* & \mathsf{Cat}_* \\ \cline{2-2}
 & \mathrm{Id}_{\mathsf{Cat}_*} \qquad\qquad \mathbf{C}_* \circ \mathrm{End}_* \\ \hline
\begin{tikzcd} (\mathsf{C}, c) \arrow[d, "F"'] \\ (\mathsf{D}, d) \end{tikzcd} &
\begin{tikzcd} (\mathsf{C}, c) \arrow[r, "K_{\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}}"] \arrow[d, "F"'] & \big(\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(c), \mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}\big) \arrow[d, "F"] \\ (\mathsf{D}, d) \arrow[r, "K_{\mathrm{id}_d^{\mathsf{D}}}"'] & \big(\mathsf{End}_{\mathsf{D}}(d), \mathrm{id}_d^{\mathsf{D}}\big) \end{tikzcd}
\end{array}$$

Comprovem que K complix la condició de naturalitat. Siga $F\colon (\mathsf{C}, c) \longrightarrow (\mathsf{D}, d)$ morfisme en Cat_* i veiem com actuen els functors $F \circ K_{\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}}$ i $K_{\mathrm{id}_d^{\mathsf{D}}} \circ F$ sobre objectes i morfismes. Siga c_0 objecte en C. Així,

$$\begin{aligned}
(F \circ K_{\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}})(c_0) &= F\big(K_{\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}}(c_0)\big) && \text{(Def. comp. de functors)} \\
&= F(\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}) && \text{(Def. de } K_{\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}}\text{)} \\
&= \mathrm{id}_d^{\mathsf{D}} && \big(\mathrm{Ob}\big(\mathsf{End}_{\mathsf{D}}(d)\big) = \{\mathrm{id}_d^{\mathsf{D}}\}\big) \\
&= K_{\mathrm{id}_d^{\mathsf{D}}}\big(F(c_0)\big) && \text{(Def. de } K_{\mathrm{id}_d^{\mathsf{D}}}\text{)} \\
&= (K_{\mathrm{id}_d^{\mathsf{D}}} \circ F)(c_0). && \text{(Def. comp. de functors)}
\end{aligned}$$

Siga ara f un morfisme en C. Tenim

$$\begin{aligned}
(F \circ K_{\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}})(f) &= F\big(K_{\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}}(f)\big) && \text{(Def. comp. de functors)} \\
&= F(\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}) && \text{(Def. de } K_{\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}}\text{)} \\
&= \mathrm{id}_{F(c)}^{\mathsf{D}} && (F \text{ functor}) \\
&= \mathrm{id}_d^{\mathsf{D}} && (F \text{ morfisme en } \mathsf{Cat}_*) \\
&= K_{\mathrm{id}_d^{\mathsf{D}}}\big(F(f)\big) && \text{(Def. de } K_{\mathrm{id}_d^{\mathsf{D}}}\text{)} \\
&= (K_{\mathrm{id}_d^{\mathsf{D}}} \circ F)(f). && \text{(Def. comp. de functors)}
\end{aligned}$$

Concloem que

$$F \circ K_{\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}} = K_{\mathrm{id}_d^{\mathsf{D}}} \circ F,$$

i, per tant, que K és transformació natural.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Cat}_* \arrow[rr, bend left, "\mathrm{Id}_{\mathsf{Cat}_*}"] \arrow[rr, bend right, "\mathbf{C}_* \circ \mathrm{End}_*"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow K"] & & \mathsf{Cat}_*
\end{tikzcd}$$

K, però, tampoc no és isomorfisme natural. Procedirem novament per reducció a l'absurd: suposem que K és un isomorfisme natural, és a dir, que cada component de K és un isomorfisme en Cat_*. En particular, si prenem una categoria puntejada (C, c) tal que existisca algun endomorfisme no trivial, i.e., $\mathrm{End}_{\mathsf{C}}(c) \setminus \{\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}\} \neq \emptyset$, hauria d'existir un functor invers $F\colon \big(\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(c), \mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}\big) \longrightarrow (\mathsf{C}, c)$ tal que

$$F \circ K_{\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}} = \mathrm{Id}_{(\mathsf{C},c)}, \quad K_{\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}} \circ F = \mathrm{Id}_{(\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(c), \mathrm{id}_c^{\mathsf{C}})}.$$

Siga $f \in \mathrm{End}_{\mathsf{C}}(c)$ tal que $f \neq \mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}$. Aleshores,

$$\begin{aligned}
(K_{\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}} \circ F)(f) &= K_{\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}}\big(F(f)\big) && \text{(Def. comp. de functors)} \\
&= \mathrm{id}_c^{\mathsf{C}} && \text{(Def. de } K_{\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}}\text{)} \\
&\neq f && \text{(Per la tria de } f\text{)} \\
&= \mathrm{Id}_{(\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(c), \mathrm{id}_c^{\mathsf{C}})}(f). && \text{(Def. de } \mathrm{Id}_{(\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(c), \mathrm{id}_c^{\mathsf{C}})}\text{)}
\end{aligned}$$

Per tant,

$$K_{\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}} \circ F \neq \mathrm{Id}_{(\mathsf{End}_{\mathsf{C}}(c), \mathrm{id}_c^{\mathsf{C}})}$$

i tenim una contradicció.

3.3 Composició horitzontal

No hauríem anomenat l'anterior composició "vertical" si no existira una altra forma de composició de transformacions naturals. Considerem la següent situació:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C} \arrow[r, bend left=50, "F"{name=F}] \arrow[r, bend right=50, "G"'{name=G}] \arrow[from=F, to=G, Rightarrow, "\alpha"] & \mathsf{D} \arrow[r, bend left=50, "H"{name=H}] \arrow[r, bend right=50, "K"'{name=K}] \arrow[from=H, to=K, Rightarrow, "\beta"] & \mathsf{E}.
\end{tikzcd}$$

Sabem que podem compondre functors i, per tant, resulta natural preguntar-nos si hi ha alguna relació entre les composicions $H \circ F\colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{E}$ i $K \circ G\colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{E}$. La resposta és afirmativa: $\beta * \alpha$, anomenada composició horitzontal, és una transformació natural de $H \circ F$ en $K \circ G$. Per construir les components, observem primer la situació següent:

$$\begin{array}{c|cc}
\mathsf{D} & \multicolumn{2}{c}{\mathsf{E}} \\ \cline{2-3}
 & H & K \\ \hline
\begin{tikzcd} F(c) \arrow[d, "\alpha_c"'] \\ G(c) \end{tikzcd} & \multicolumn{2}{c}{\begin{tikzcd} (H \circ F)(c) \arrow[r, "\beta_{F(c)}"] \arrow[d, "H(\alpha_c)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & (K \circ F)(c) \arrow[d, "K(\alpha_c)"] \\ (H \circ G)(c) \arrow[r, "\beta_{G(c)}"'] & (K \circ G)(c) \end{tikzcd}}
\end{array}$$

El quadrat en E commuta perquè β és una transformació natural. Açò ens dona dues expressions equivalents per a definir les components de $\beta * \alpha$ corresponents a la diagonal del quadrat:

$$\beta_{G(c)} \circ H(\alpha_c) = K(\alpha_c) \circ \beta_{F(c)}.$$

En la definició següent adoptarem l'expressió de l'esquerra, tot i que ambdues són totalment intercanviables.

Proposició 3.4. *Siguen C, D, E categories, $F, G, : \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ i $H, K : \mathsf{D} \longrightarrow \mathsf{E}$ functors i $\alpha : F \Longrightarrow G$, $\beta : H \Longrightarrow K$ transformacions naturals amb $\alpha = (\alpha_c)_{c \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})}$ i $\beta = (\beta_d)_{d \in \mathrm{Ob}(\mathsf{D})}$. Aleshores, $\big(\beta_{G(c)} \circ H(\alpha_c)\big)_{c \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})}$ és una transformació natural de $H \circ F$ en $K \circ G$.*

Anomenem composició horitzontal de α i β, i ho denotarem per $\beta * \alpha$, a la transformació natural

$$\beta * \alpha := \big(\beta_{G(c)} \circ H(\alpha_c)\big)_{c \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})}.$$

És a dir, tenim

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathsf{D} \arrow[r, bend left, "H"] \arrow[r, bend right, "K"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathsf{E}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathsf{C} \arrow[r, bend left, "H \circ F"] \arrow[r, bend right, "K \circ G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta * \alpha"] & \mathsf{E}.
\end{tikzcd}$$

Demostració. Considerem c_1, c_2 objectes en C i $f : c_1 \longrightarrow c_2$ morfisme en C. En ser α i β transformacions naturals, tenim

$$\begin{tikzcd}
(H \circ F)(c_1) \arrow[r, "H(\alpha_{c_1})"] \arrow[d, "(H \circ F)(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & (H \circ G)(c_1) \arrow[r, "\beta_{G(c_1)}"] \arrow[d, "(H \circ G)(f)"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & (K \circ G)(c_1) \arrow[d, "(K \circ G)(f)"] \\
(H \circ F)(c_2) \arrow[r, "H(\alpha_{c_2})"'] & (H \circ G)(c_2) \arrow[r, "\beta_{G(c_2)}"'] & (K \circ G)(c_2)
\end{tikzcd}$$

Volem veure que el següent diagrama commuta:

C	E	
	$H \circ F$	$K \circ G$

$$\begin{tikzcd} c_1 \arrow[d, "f"'] \\ c_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (H \circ F)(c_1) \arrow[rr, "\beta_{G(c_1)} \circ H(\alpha_{c_1})"] \arrow[d, "(H \circ F)(f)"'] & & (K \circ G)(c_1) \arrow[d, "(K \circ G)(f)"] \\ (H \circ F)(c_2) \arrow[rr, "\beta_{G(c_2)} \circ H(\alpha_{c_2})"'] & & (K \circ G)(c_2) \end{tikzcd}$$

És a dir, comprovem si es complix la condició de naturalitat.

$$\begin{aligned}
&(K \circ G)(f) \circ \big(\beta_{G(c_1)} \circ H(\alpha_{c_1})\big) \\
&\qquad = \big((K \circ G)(f) \circ \beta_{G(c_1)}\big) \circ H(\alpha_{c_1}) && \text{(Ass. de la composició)} \\
&\qquad = \Big(K\big(G(f)\big) \circ \beta_{G(c_1)}\Big) \circ H(\alpha_{c_1}) && \text{(Def. de composició de functors)} \\
&\qquad = \Big(\beta_{G(c_2)} \circ H\big(G(f)\big)\Big) \circ H(\alpha_{c_1}) && \text{(Condició de naturalitat de } \beta\text{)} \\
&\qquad = \beta_{G(c_2)} \circ \Big(H\big(G(f)\big) \circ H(\alpha_{c_1})\Big) && \text{(Ass. de la composició)} \\
&\qquad = \beta_{G(c_2)} \circ H\big(G(f) \circ \alpha_{c_1}\big) && \text{(}H\text{ functor)} \\
&\qquad = \beta_{G(c_2)} \circ H\big(\alpha_{c_2} \circ F(f)\big) && \text{(Condició de naturalitat de } \alpha\text{)} \\
&\qquad = \beta_{G(c_2)} \circ \Big(H(\alpha_{c_2}) \circ H\big(F(f)\big)\Big) && \text{(}H\text{ functor)} \\
&\qquad = \beta_{G(c_2)} \circ \big(H(\alpha_{c_2}) \circ (H \circ F)(f)\big) && \text{(Def. de composició de functors)} \\
&\qquad = \big(\beta_{G(c_2)} \circ H(\alpha_{c_2})\big) \circ (H \circ F)(f). && \text{(Ass. de la composició)}
\end{aligned}$$

Concloem que $\beta * \alpha$ és una transformació natural. $\square$

Nota 3.3. Fem a continuació una breu enumeració de les propietats algebraiques bàsiques de la composició horitzontal.

1. La composició horitzontal de transformacions naturals és associativa sempre que estiga definida.

2. Té element neutre: per a cada transformació natural $\alpha\colon F \Longrightarrow G$, amb $F, G\colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$, es complix que
$$\mathrm{id}_{\mathrm{Id}_{\mathsf{D}}} * \alpha = \alpha = \alpha * \mathrm{id}_{\mathrm{Id}_{\mathsf{C}}}.$$
Cal notar que $\mathrm{id}_{\mathrm{Id}_{\mathsf{C}}}$ i $\mathrm{id}_{\mathrm{Id}_{\mathsf{D}}}$ també fan de neutre per a la composició vertical.

3. Si α i β són isomorfismes naturals, aleshores $\beta * \alpha$ també és un isomorfisme natural (sempre que la composició estiga definida). Això es deu al fet que els functors preserven la condició d'isomorfisme i que la composició d'isomorfismes és isomorfisme.

4. Donats dos functors $F\colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ i $G\colon \mathsf{D} \longrightarrow \mathsf{E}$, es complix $\mathrm{id}_G * \mathrm{id}_F = \mathrm{id}_{G\circ F}$.

5. En general, no existixen inversos per a la composició horitzontal.

Nota 3.4. El fet que la composició horitzontal d'isomorfismes naturals siga isomorfisme natural ens permet concloure que, si tenim dos parells de functors isomorfs entre categories consecutives, les seues respectives composicions també seran isomorfes entre si. Formalment, si $F, G\colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ i $H, K\colon \mathsf{D} \longrightarrow \mathsf{E}$ i es té que $\alpha\colon F \cong G$ i $\beta\colon H \cong K$, aleshores $\beta * \alpha\colon H \circ F \cong K \circ G$. És a dir, la composició de functors preserva la relació d'isomorfia.

Fàcilment es comprova que les igualtats que hem obtingut anteriorment en analitzar la diagonal del quadrat per a definir les components de la composició horitzontal es poden reescriure de la manera següent:

$$\beta * \alpha = (\beta * \mathrm{id}_G) \circ (\mathrm{id}_H * \alpha) = (\mathrm{id}_I * \alpha) \circ (\beta * \mathrm{id}_F).$$

Existix, però, una regla més general que governa la interacció d'ambdós tipus de composicions (horitzontal i vertical). Considerem tres categories i quatre transformacions disposades segons el diagrama següent:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C} \arrow[r, bend left=60, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=60, "H"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow\beta"] & \mathsf{D} \arrow[r, bend left=60, "I"] \arrow[r, "J" description] \arrow[r, bend right=60, "K"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow\gamma"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow\delta"] & \mathsf{E}.
\end{tikzcd}$$

Ara tenim dues formes diferents per construir una transformació natural de $I \circ F$ en $K \circ H$: $(\delta * \beta) \circ (\gamma * \alpha)$ i $(\delta \circ \gamma) * (\beta \circ \alpha)$. Les composicions verticals sota $\circ$ i les composicions horitzontals sota $*$ es relacionen segons la *llei d'intercanvi*:

Teorema 3.1 (Llei d'intercanvi)**.** *Considerem les categories* $\mathsf{C}, \mathsf{D}, \mathsf{E}$*, els functors* $F, G, H\colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ *i* $I, J, K\colon \mathsf{D} \longrightarrow \mathsf{E}$*, i les transformacions naturals* $\alpha\colon F \Longrightarrow G$*,* $\beta\colon G \Longrightarrow H$*,* $\gamma\colon I \Longrightarrow J$ *i* $\delta\colon J \Longrightarrow K$ *disposats segons el diagrama anterior. Aleshores, les operacions de composició vertical i composició horitzontal satisfan*

$$(\delta * \beta) \circ (\gamma * \alpha) = (\delta \circ \gamma) * (\beta \circ \alpha).$$

Demostració. Escrivim

$$\alpha = (\alpha_c)_{c \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})}, \qquad \beta = (\beta_c)_{c \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})},$$

$$\gamma = (\gamma_d)_{d \in \mathrm{Ob}(\mathsf{D})}, \qquad \delta = (\delta_d)_{d \in \mathrm{Ob}(\mathsf{D})}.$$

Fixat un objecte c en C, en ser γ transformació natural, el següent diagrama commuta:

$$\begin{tikzcd}
(I \circ F)(c) \arrow[r, "I(\alpha_c)"] & (I \circ G)(c) \arrow[r, "I(\beta_c)"] \arrow[d, "\gamma_{G(c)}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & (I \circ H)(c) \arrow[d, "\gamma_{H(c)}"] \\
& (J \circ G)(c) \arrow[r, "J(\beta_c)"'] & (J \circ H)(c) \arrow[d, "\delta_{H(c)}"] \\
& & (K \circ H)(c).
\end{tikzcd}$$

És a dir,

$$\begin{aligned}
&\big((\delta * \beta) \circ (\gamma * \alpha)\big)_c \\
&\qquad = (\delta * \beta)_c \circ (\gamma * \alpha)_c && \text{(Def. de composició vertical)} \\
&\qquad = \big(\delta_{H(c)} \circ J(\beta_c)\big) \circ \big(\gamma_{G(c)} \circ I(\alpha_c)\big) && \text{(Def. de composició horitzontal)} \\
&\qquad = \delta_{H(c)} \circ \big(J(\beta_c) \circ \gamma_{G(c)}\big) \circ I(\alpha_c) && \text{(Ass. de la composició)} \\
&\qquad = \delta_{H(c)} \circ \big(\gamma_{H(c)} \circ I(\beta_c)\big) \circ I(\alpha_c) && \text{(Condició de naturalitat de } \gamma\text{)} \\
&\qquad = \big(\delta_{H(c)} \circ \gamma_{H(c)}\big) \circ \big(I(\beta_c) \circ I(\alpha_c)\big) && \text{(Ass. de la composició)} \\
&\qquad = \big(\delta_{H(c)} \circ \gamma_{H(c)}\big) \circ I(\beta_c \circ \alpha_c) && (I \text{ functor}) \\
&\qquad = (\delta \circ \gamma)_{H(c)} \circ I\big((\beta \circ \alpha)_c\big) && \text{(Def. de composició vertical)} \\
&\qquad = \big((\delta \circ \gamma) * (\beta \circ \alpha)\big)_c. && \text{(Def. de composició vertical)}
\end{aligned}$$

Açò demostra la Llei d'intercanvi. $\square$

Nota 3.5. De la Llei d'intercanvi es deduïx que l'invers per a la composició vertical d'una composició horitzontal d'isomorfismes naturals $\beta * \alpha$ és $\beta^{-1} * \alpha^{-1}$. En efecte, si $\alpha\colon F \cong G$ i $\beta\colon H \cong I$ són isomorfismes naturals per a $F, G\colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$, $H, I\colon \mathsf{D} \longrightarrow \mathsf{E}$, es té que

$$(\beta^{-1} * \alpha^{-1}) \circ (\beta * \alpha) = (\beta^{-1} \circ \beta) * (\alpha^{-1} \circ \alpha) = \mathrm{id}_H * \mathrm{id}_F = \mathrm{id}_{H \circ F},$$

$$(\beta * \alpha) \circ (\beta^{-1} * \alpha^{-1}) = (\beta \circ \beta^{-1}) * (\alpha \circ \alpha^{-1}) = \mathrm{id}_I * \mathrm{id}_G = \mathrm{id}_{I \circ G}.$$

Tot i que no aprofundirem en esta qüestió, cal comentar, com a nota cultural, que la llei d'intercanvi té un paper fonamental en la definició de les 2-categories i, per extensió, de les n-categories.

Capítol 4

Comparació de categories

Ara que ja tenim establerts els fonaments de l'estructura interna de les categories, el següent pas natural és definir criteris que ens permeten comparar-les. Fins ara, hem presentat dos graus de comparació: la igualtat estricta i l'isomorfisme de categories (vegeu Definicions 2.3 i 2.10).

Tanmateix, hi ha certes situacions en què queda clara la forta relació que s'establix entre dues categories però les nocions d'igualtat i isomorfisme resulten massa restrictives per descriure tal relació; és el cas, per exemple, de Mon i $\mathsf{Cat}_{*,1}$. Cal, doncs, buscar criteris de comparació més febles i, per tant, més universals.

En este capítol explorarem com l'equivalència, juntament amb el concepte encara més general d'adjunció, ens permeten comparar categories que, tot i no ser idèntiques en un sentit rígid, compartixen una mateixa essència estructural.

4.1 Equivalència

Construirem la definició d'equivalència com una relaxació natural de la d'isomorfisme. L'isomorfisme exigix que dues composicions de functors siguen exactament iguals als functors identitat. En fer-ho, estem exigint una igualtat estricta entre functors, la qual cosa implica tractar-los com a mers elements d'un conjunt, imposant una rigidesa que ignora la seua estructura interna, però cal recordar que els functors són objectes de la categoria de functors.

Seguint la mateixa lògica per la qual s'ha establit que la noció "correcta" d'igualtat entre objectes és l'isomorfisme, la noció adequada per a comparar functors no ha de ser la identitat, sinó l'isomorfisme natural. Considerarem, doncs, que dues categories són *essencialment la mateixa* quan podem trobar dos functors —un en cada direcció— les composicions dels quals siguen, no iguals, sinó naturalment isomorfes a la identitat. Esta noció, més dèbil i útil en la pràctica, és la que anomenarem equivalència de categories.

Definició 4.1 (Equivalència)**.** Direm que les categories C i D són equivalents, i ho escriurem $\mathsf{C} \simeq \mathsf{D}$, si podem trobar dos functors $F\colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ i $G\colon \mathsf{D} \longrightarrow \mathsf{C}$ per als què existixen isomorfismes naturals $\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathsf{C}} \cong G \circ F$ i $\varepsilon\colon F \circ G \cong \mathrm{Id}_{\mathsf{D}}$. Per la Proposició 3.3

és indiferent la direcció dels isomorfismes.

En esta situació direm que G (respectivament, F) és un invers feble de F (respectivament, G). Els inversos febles són únics (llevat d'isomorfisme). Fàcilment es comprova que $\simeq$ és relació d'equivalència.

Les tres nocions de comparació definides fins ara mantenen una jerarquia pel que fa a la seua força comparativa. La següent proposició formalitza esta idea:

Proposició 4.1. *Siguen* C *i* D *dues categories. Aleshores, si* $\mathsf{C} = \mathsf{D}$*, llavors* $\mathsf{C} \cong \mathsf{D}$ *i, si* $\mathsf{C} \cong \mathsf{D}$*, llavors* $\mathsf{C} \simeq \mathsf{D}$.

Demostració. Immediata prenint $F = G = \mathrm{Id}_{\mathsf{C}}$ per a la primera implicació i $\varepsilon = \mathrm{id}_{\mathrm{Id}_{\mathsf{C}}}$, $\eta = \mathrm{id}_{\mathrm{Id}_{\mathsf{D}}}$ per la segona. $\square$

Exemple 4.1. Per les Notes 2.9 i 2.21 sabem que $\mathrm{End}_*\restriction_1 \circ \mathbf{C}_*\restriction^1 = \mathrm{End}_* \circ \mathbf{C}_* = \mathrm{Id}_{\mathsf{Mon}}$, d'on deduïm trivialment que $\mathrm{id}_{\mathrm{Id}_{\mathsf{Mon}}} \colon \mathrm{End}_*\restriction_1 \circ \mathbf{C}_*\restriction^1 \cong \mathrm{Id}_{\mathsf{Mon}}$. D'altra banda, en la Nota 3.2 vam veure que $\overline{\Gamma} \colon \mathbf{C}_*\restriction^1 \circ \mathrm{End}_*\restriction_1 \cong \mathrm{Id}_{\mathsf{Cat}_{*,1}}$. Estos dos fets garantixen que els functors $\mathbf{C}_*\restriction^1$ i $\mathrm{End}_*\restriction_1$ són inversos febles i, per tant, que:

$$\mathsf{Mon} \simeq \mathsf{Cat}_{*,1}.$$

Atés l'isomorfisme $\mathsf{Cat}_{*,1} \cong \mathsf{Cat}_1$, tenim també per transitivitat que $\mathsf{Mon} \simeq \mathsf{Cat}_1$. Este resultat formalitza la intuïció presentada al Capítol 2 després de definir la categoria induïda per un monoide, on descrivíem els monoides, precisament, com a categories amb un sol objecte.

Si assumim l'axioma d'elecció, la proposició següent caracteritza l'equivalència de dues categories exigint només certes propietats a un sol functor. Això resulta molt pràctic, ja que ens estalvia haver de trobar explícitament un invers feble i definir els isomorfismes naturals amb la identitat.

Proposició 4.2. *Dues categories* C*,* D *són equivalents si, i només si, existix un functor* $F \colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ *plenament fidel i essencialment sobrejectiu, i.e., cada objecte* d *en* D *és isomorf a algun objecte de la forma* $F(c)$ *amb* c *objecte en* C.

Demostració. ($\Longrightarrow$) Suposem que C i D són equivalents. Per definició, existixen functors $F \colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ i $G \colon \mathsf{D} \longrightarrow \mathsf{C}$ i isomorfismes naturals $\eta \colon \mathrm{Id}_{\mathsf{C}} \cong G \circ F$ i $\varepsilon \colon F \circ G \cong \mathrm{Id}_{\mathsf{D}}$.

L'existència de ε implica que, per a cada objecte $d \in \mathrm{Ob}(\mathsf{D})$, $\varepsilon_d \colon F(G(d)) \longrightarrow d$ és un isomorfisme. Per tant, tot objecte d és isomorf a un objecte de la forma $F(c)$ prenent $c = G(d)$, la qual cosa prova que F és essencialment sobrejectiu.

Per la naturalitat de η, tenim el següent diagrama commutatiu per a qualsevol morfisme $h \colon c_1 \longrightarrow c_2$:

C	C	
	Id_{C}	$G \circ F$

$$\begin{tikzcd} c_1 \arrow[d, "h"'] & c_1 \arrow[r, "\eta_{c_1}"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & (G \circ F)(c_1) \arrow[d, "(G \circ F)(h)"] \\ c_2 & c_2 \arrow[r, "\eta_{c_2}"'] & (G \circ F)(c_2) \end{tikzcd}$$

Per tant, $h = \eta_{c_2}^{-1} \circ (G \circ F)(h) \circ \eta_{c_1}$, d'on se seguix que F és fidel. Simètricament, la naturalitat de $\varepsilon \colon F \circ G \cong \mathrm{Id}_{\mathsf{D}}$ prova que G també és fidel.

Finalment, per veure que F és ple, considerem un morfisme qualsevol $g \colon F(c_1) \longrightarrow F(c_2)$ en D i definim el morfisme $f := \eta_{c_2}^{-1} \circ G(g) \circ \eta_{c_1}$ en C. Per la naturalitat de η, sabem que $(G \circ F)(f) = \eta_{c_2} \circ f \circ \eta_{c_1}^{-1}$. Substituint la definició de f, tenim:

$$(G \circ F)(f) = \eta_{c_2} \circ (\eta_{c_2}^{-1} \circ G(g) \circ \eta_{c_1}) \circ \eta_{c_1}^{-1} = G(g).$$

Atés que G és fidel, de la igualtat $G(F(f)) = G(g)$ se seguix que $F(f) = g$.

($\Longleftarrow$) Suposem ara que existix un functor $F \colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ plenament fidel i essencialment sobrejectiu. Per a provar que F definix una equivalència, hem de construir un invers feble $G \colon \mathsf{D} \longrightarrow \mathsf{C}$.

Primer definim la imatge de G respecte dels objectes. Com F és essencialment sobrejectiu, podem aplicar l'axioma d'elecció per triar, per a cada objecte d en D, un objecte c_d en C i un isomorfisme $\varepsilon_d \colon F(c_d) \longrightarrow d$. Definim, doncs, $G(d) := c_d$.

Definim ara l'acció de G sobre els morfismes. Siga $f \colon d_1 \longrightarrow d_2$ un morfisme en D. Considerem la composició:

$$\varepsilon_{d_2}^{-1} \circ f \circ \varepsilon_{d_1} \colon F\big(G(d_1)\big) \longrightarrow F\big(G(d_2)\big).$$

Com que el functor F és plenament fidel, aleshores

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}\big(G(d_1), G(d_2)\big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}\Big(F\big(G(d_1)\big), F\big(G(d_2)\big)\Big)$$

i, per tant, existix un únic morfisme en C, que anomenarem $G(f) \colon G(d_1) \longrightarrow G(d_2)$, tal que:

$$F\big(G(f)\big) = \varepsilon_{d_2}^{-1} \circ f \circ \varepsilon_{d_1}.$$

Esta assignació respecta identitats i composicions gràcies a la unicitat garantida per la fidelitat de F, la qual cosa convertix a G en un functor. En efecte, si $f \colon d_1 \longrightarrow d_2$ i

$g\colon d_2 \longrightarrow d_3$,

$$\begin{aligned}
F\big(G(g\circ f)\big) &= \varepsilon_{d_3}^{-1}\circ(g\circ f)\circ\varepsilon_{d_1} && \text{(Def. de } G\text{)}\\
&= \varepsilon_{d_3}^{-1}\circ g\circ \mathrm{id}_{d_2}\circ f\circ\varepsilon_{d_1} && \text{(Def. del morfisme identitat)}\\
&= (\varepsilon_{d_3}^{-1}\circ g\circ\varepsilon_{d_2})\circ(\varepsilon_{d_2}^{-1}f\circ\varepsilon_{d_1}) && (\varepsilon_{d_2}\text{ isomorfisme})\\
&= F\big(G(g)\big)\circ F\big(G(f)\big) && \text{(Def. de } G\text{)}\\
&= F\big(G(g)\circ G(f)\big). && (F\text{ functor})
\end{aligned}$$

Com F és fidel, aleshores $G(g\circ f) = G(g)\circ G(f)$. També,

$$\begin{aligned}
F\big(G(\mathrm{id}_d)\big) &= \varepsilon_d^{-1}\circ\mathrm{id}_c\circ\varepsilon_d && \text{(Def. de } G\text{)}\\
&= \varepsilon_d^{-1}\circ\varepsilon_d && \text{(Def. del morfisme identitat)}\\
&= \mathrm{id}_{F(G(d))} && \text{(Def. de } \varepsilon_d \text{ i de morfisme invers)}\\
&= F(\mathrm{id}_{G(d)}) && (F\text{ functor})
\end{aligned}$$

i, com F és fidel, aleshores $G(\mathrm{id}_d) = \mathrm{id}_{G(d)}$. Ens queda provar que G és invers feble de F. Per la definició de $G(f)$, el següent diagrama commuta per a tot $f\colon d_1 \longrightarrow d_2$:

$$\begin{tikzcd}
F\big(G(d_1)\big) \arrow[r, "\varepsilon_{d_1}"] \arrow[d, "F(G(f))"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & d_1 \arrow[d, "f"] \\
F\big(G(d_2)\big) \arrow[r, "\varepsilon_{d_2}"'] & d_2.
\end{tikzcd}$$

Això prova que la família $\varepsilon = (\varepsilon_d)_{d\in\mathrm{Ob}(\mathsf{D})}$ és una transformació natural. Com que cada component és un isomorfisme, concloem que $\varepsilon\colon F\circ G \cong \mathrm{Id}_{\mathsf{D}}$.

Ara, per a cada objecte c en C, considerem l'isomorfisme $\varepsilon_{F(c)}\colon F\big(G\big(F(c)\big)\big) \longrightarrow F(c)$ definit anteriorment. Com F és plenament fidel, existix un únic isomorfisme $\eta_c\colon c \longrightarrow G\big(F(c)\big)$ tal que $F(\eta_c) = \varepsilon_{F(c)}^{-1}$. La naturalitat de $\eta = (\eta_c)_{c\in\mathrm{Ob}(\mathsf{C})}$ s'obté anàlogament mitjançant la plenitud i fidelitat de F. En efecte, per a $f\colon c_1 \longrightarrow c_2$:

$$\begin{aligned}
F\big(G\big(F(f)\big)\big) &= \varepsilon_{F(c_1)}^{-1}\circ F(f)\circ\varepsilon_{F(c_1)} && \text{(Def. de } G\text{)}\\
&= F(\eta_{c_2})\circ F(f)\circ F(\eta_{c_1})^{-1} && \text{(Def. de } \eta\text{)}\\
&= F(\eta_{c_2})\circ F(f)\circ F(\eta_{c_1}^{-1}) && (F\text{ functor})\\
&= F(\eta_{c_2}\circ f\circ\eta_{c_1}^{-1}). && (F\text{ functor})
\end{aligned}$$

Com F és fidel, aleshores $G\big(F(f)\big) = \eta_{c_2}\circ f\circ\eta_{c_1}^{-1}$. És a dir, el següent diagrama commuta:

$$
\begin{tikzcd}
c_1 \arrow[rr, "\eta_{c_1}"] \arrow[d, "f"'] & & G\big(F(c_1)\big) \arrow[d, "G(F(f))"] \\
c_2 \arrow[rr, "\eta_{c_2}"'] \arrow[urr, phantom, "\circlearrowright"] & & G\big(F(c_2)\big).
\end{tikzcd}
$$

Així, $\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathsf{C}} \cong G \circ F$ i, per tant, F i G constituïxen una equivalència de categories. $\square$

Direm que un functor $F\colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ definix una equivalència de categories $\mathsf{C} \simeq \mathsf{D}$ si és plenament fidel i essencialment sobrejectiu. Esta caracterització permet contrastar la noció d'equivalència amb la d'isomorfisme d'una manera directa: mentre que l'isomorfisme de categories exigix un functor plenament fidel i bijectiu en objectes, una equivalència relaxa la segona condició requerint únicament que el functor siga essencialment sobrejectiu. Des d'esta perspectiva, l'equivalència es pot interpretar com un isomorfisme que ignora les distincions redundants entre objectes isomorfs.

Exemple 4.2. Podem aplicar esta caracterització per a comprovar d'una manera alternativa que $\mathsf{Mon} \simeq \mathsf{Cat}_{*,1}$. En efecte, per un raonament anàleg al fet en la Nota 2.22, tenim que el functor $\mathbf{C}_*\!\restriction^1\colon \mathsf{Mon} \longrightarrow \mathsf{Cat}_{*,1}$ és plenament fidel.

D'altra banda, d'acord amb la Nota 3.2, existix un isomorfisme natural $\overline{\Gamma}\colon \mathbf{C}_*\!\restriction^1 \circ \mathrm{End}_*\!\restriction_1 \cong \mathrm{Id}_{\mathsf{Cat}_{*,1}}$. D'ací deduïm que, per a qualsevol objecte (C, c) de $\mathsf{Cat}_{*,1}$, es complix

$$\mathbf{C}_*\!\restriction^1\big(\mathbf{End}_{\mathsf{C}}(\boldsymbol{c})\big) \cong (\mathsf{C}, c).$$

Això prova que $\mathbf{C}_*\!\restriction^1$ és essencialment sobrejectiu i, en ser també plenament fidel, concloem que definix una equivalència de categories.

Proposició 4.3. *Dues categories induïdes per monoides són isomorfes si, i només si, són equivalents.*

Demostració. La implicació cap a la dreta és trivial. Per a la recíproca, siga $F\colon \mathsf{M} \longrightarrow \mathsf{N}$ el functor que definix l'equivalència. Atés que F és un functor plenament fidel i que les categories M i N tenen un únic objecte ($e_{\mathbf{M}}$ i $e_{\mathbf{N}}$, respectivament), F induïx una bijecció entre els conjunts de morfismes:

$$F_{e_{\mathbf{M}}, e_{\mathbf{N}}}\colon \mathrm{Hom}_{\mathsf{M}}(e_{\mathbf{M}}, e_{\mathbf{M}}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathsf{N}}(e_{\mathbf{N}}, e_{\mathbf{N}}).$$

Per definició, estos conjunts Hom amb l'operació de composició són els monoides originals $\mathbf{M}$ i $\mathbf{N}$. Com que F és un functor, preserva la composició i l'element neutre i, per tant, l'aplicació bijectiva anterior és un isomorfisme de monoides $\mathbf{M} \cong \mathbf{N}$. Finalment, per l'Exemple 2.11, $\mathsf{M} \cong \mathsf{N}$. $\square$

4.1.1 Esquelets

Una via canònica per a obtenir equivalències en qualsevol categoria —i que resulta especialment il·lustrativa per a comprendre com esta noció capta l'essència estructural— és la construcció de l'*esquelet.*

Definició 4.2 (Esquelet)**.** Un esquelet d'una categoria C és una subcategoria plena E de C tal que cada objecte de C és isomorf a exactament un objecte de E.

En altres paraules, un esquelet es construïx triant un representant de cada classe d'isomorfia d'objectes de la categoria original, eliminant així tota la "redundància" estructural.

Exemple 4.3. Un esquelet de la categoria de tots els conjunts finits és la subcategoria plena que té per objectes tots els nombres cardinals finits $0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$

Teorema 4.1.

1. *Tota categoria té un esquelet.*
2. *Qualsevol esquelet d'una categoria* C *és equivalent a* C.
3. *L'esquelet d'una categoria és únic (llevat d'isomorfisme).*

Demostració.

1. Se seguix de l'aplicació de l'axioma d'elecció a la relació d'equivalència d'isomorfia en la col·lecció d'objectes de la categoria.
2. Siga E un esquelet de C. Aleshores, cada objecte c en C és isomorf en C a un únic objecte en E. Denotem este objecte per $T(c)$ i triem per a cada objecte c en E un isomorfisme $\theta_c \colon c \longrightarrow T(c)$. Definim el functor esqueletitzador $T \colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{E}$ com l'assignació que envia cada objecte c a $T(c)$ i cada morfisme $f \colon c_1 \longrightarrow c_2$ en C a l'únic morfisme en E que fa que el següent diagrama commute:

$$\begin{tikzcd} c_1 \arrow[r, "\theta_{c_1}"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & T(c_1) \arrow[d, "T(f)"] \\ c_2 \arrow[r, "\theta_{c_2}"'] & T(c_2). \end{tikzcd}$$

És a dir, $T(f) = \theta_{c_2} \circ f \circ \theta_{c_1}^{-1}$. Així, $\theta = (\theta_c)_{c \in \mathsf{C}}$ definix un isomorfisme natural $\theta \colon \mathrm{Id}_{\mathsf{C}} \cong I_{\mathsf{E}} \circ T$. D'altra banda, com que E és una subcategoria plena i hem triat exactament un representant per classe, es té directament que $T \circ I_{\mathsf{E}} = \mathrm{Id}_{\mathsf{E}}$.

3. Siguen E_1 i E_2 esquelets de C. Aleshores, el functor esqueletitzador $T\colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{E}_2$ restringit a E_1 definix un isomorfisme de categories $T\restriction_{\mathsf{E}_1}\colon \mathsf{E}_1 \longrightarrow \mathsf{E}_2$.

□

La unicitat justifica l'ús de la notació $\mathsf{sk}(\mathsf{C})$ per denotar l'esquelet de la categoria C.

Corol·lari 4.1. *Dues categories són equivalents si, i només si, els seus esquelets són isomorfs.*

Demostració. ($\Longrightarrow$) Suposem $\mathsf{C} \simeq \mathsf{D}$ i siguen $\mathsf{sk}(\mathsf{C})$ i $\mathsf{sk}(\mathsf{D})$ els seus esquelets. Per la transitivitat de l'equivalència i perquè tota categoria és equivalent al seu esquelet tenim $\mathsf{sk}(\mathsf{C}) \simeq \mathsf{sk}(\mathsf{D})$. Siga $F\colon \mathsf{sk}(\mathsf{C}) \longrightarrow \mathsf{sk}(\mathsf{D})$ el functor que definix esta equivalència.

En primer lloc, provem que F és injectiu sobre els objectes. Siguen c_1, c_2 objectes en C tals que $F(c_1) = F(c_2)$. Aleshores, podem considerar el morfisme $\mathrm{id}_{F(c_1)}\colon F(c_1) \longrightarrow F(c_2)$. Com F és plenament fidel, existix un únic morfisme $f\colon c_1 \longrightarrow c_2$ en C tal que $F(f) = \mathrm{id}_{F(c_1)}$. Per definició de functor, $f = \mathrm{id}_{c_1}$ i, per tant $c_1 = c_2$.

En segon lloc, provem la sobrejectivitat sobre objectes. En ser F essencialment sobrejectiu, per a cada objecte d en $\mathsf{sk}(\mathsf{D})$ existix un objecte c tal que $d \cong F(c)$. Ara bé, per definició d'esquelet, dos objectes isomorfs han de ser idèntics; per tant, $d = F(c)$.

Així, F induïx una bijecció entre les col·leccions d'objectes de $\mathsf{sk}(\mathsf{C})$ i $\mathsf{sk}(\mathsf{D})$. Ens ser plenament fidel i bijectiu sobre els objectes, F és un isomorfisme de categories. Per tant, $\mathsf{sk}(\mathsf{C}) \cong \mathsf{sk}(\mathsf{D})$.

($\Longleftarrow$) Tenim $\mathsf{C} \simeq \mathsf{sk}(\mathsf{C}) \cong \mathsf{sk}(\mathsf{D}) \simeq \mathsf{D}$. Per tant, $\mathsf{C} \simeq \mathsf{D}$. □

Este resultat ens permet reforçar encara més la idea del monoide com a categoria amb un sol objecte partint de la noció d'isomorfisme com a substitut de la igualtat. En efecte, si considerem els esquelets de les categories per a obviar les seues presentacions concretes, els monoides i les categories amb un sol objecte resulten ser la mateixa cosa. Tot i això, encara no hem sigut capaços de transcendir els límits de Cat_1 en el nostre estudi comparatiu de Mon amb Cat. Si pretenem establir un pont entre els monoides i la totalitat de Cat, necessitarem relaxar el nostre criteri de comparació, cosa que ens conduïx al següent grau en la jerarquia de relacions entre categories: l'adjunció.

4.2 Adjuncions

"Adjoint functors arise everywhere."

Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician.*

L'adjunció respon a un problema poc sorprenent de la teoria de categories: el fet que, en general, els functors no admeten inversos ni en un sentit estricte (composició igual a la identitat), ni en un sentit d'equivalència (composició isomorfa a la identitat).

Tot i això, existixen moltes situacions en què trobem functors que actuen com a *inversos conceptuals*, tot i no ser-ho en el sentit clàssic. Podem pensar l'adjunció, precisament, com la formalització d'esta "inversió conceptual". La millor forma d'il·lustrar açò és mitjançant un exemple: considerem el functor d'oblit $U\colon \mathsf{Mon} \longrightarrow \mathsf{Set}$. Evidentment, les categories Mon i Set no són ni isomorfes ni equivalents (un argument simple és que Mon posseïx un objecte nul —el monoide trivial—, mentre que Set no en té). Per tant, no és possible trobar un functor invers de U en cap dels dos sentits descrits fins ara.

Ara bé, al llarg del Capítol 1 hem vist que existixen moltes maneres de definir una estructura de monoide sobre un conjunt donat A, i és esperable que alguna d'elles siga functorial i estiga relacionada sistemàticament amb U. Quin seria l'invers conceptual del procés d'oblidar l'estructura de monoide? Doncs construir el monoide "més simple possible" a partir d'un conjunt basant-se exclusivament en el concepte de monoide i res més. Esta situació ja l'hem estudiada: es tracta del monoide lliure, una construcció $(\,\bullet\,)^*$ que és functorial (vegeu l'apartat 2.4.1). Ens trobem, per tant, amb dos contextos (el dels monoides i el dels conjunts) i dos functors que es mouen sistemàticament de l'un a l'altre en direccions oposades. Però és que, a més, estos functors estan relacionats mitjançant una regla simple, com bé auguràvem, que descrivim a continuació.

La relació d'inversos conceptuals s'expressa formalment així: aplicar primer $(\,\bullet\,)^*$ i després U no ens retorna el conjunt original A, però existix una relació canònica entre A i el conjunt de paraules $\big(U \circ (\,\bullet\,)^*\big)(A)$. En efecte, disposem de l'aplicació

$$\eta_A\colon A \longrightarrow \big(U \circ (\,\bullet\,)^*\big)(A),$$

anomenada *unitat* de l'adjunció, que envia cada element d'A a si mateix com a paraula de longitud 1 (vegeu Exemple 3.2). Esta aplicació sabem que satisfà la següent propietat universal:

> Per a tot monoide $\mathbf{M}$ i tota aplicació $f\colon A \longrightarrow U(\mathbf{M})$, existix un **únic** homomorfisme de monoides $f^\sharp\colon \mathbf{A}^* \longrightarrow \mathbf{M}$ satisfent $U(f^\sharp) \circ \eta_A = f$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "f"'] & U\big((\,\bullet\,)^*(A)\big) \arrow[d, dashed, "\exists!\, U(f^\sharp)"] \\
& U(\mathbf{M}).
\end{tikzcd}$$

En altres paraules, $U \circ (\,\bullet\,)^*$ és la millor[1] solució possible al problema d'inserir elements d'A en un monoide (el que s'anomena *inserció de generadors*).

[1] La millor en el sentit que existix per a tot monoide, és universal i no depén d'una tria arbitrària de generadors.

Simètricament, la composició oposada aplicada sobre un monoide $\mathbf{M}$ tampoc no ens torna el monoide original però l'objecte resultant i l'original estan també relacionats. Com ja hem vist, disposem d'un homomorfisme de monoides

$$\varepsilon_{\mathbf{M}} \colon \big((\,\bullet\,)^* \circ U\big)(\mathbf{M}) \longrightarrow \mathbf{M},$$

anomenat *counitat* de l'adjunció, que "multiplica" les lletres d'una paraula segons el producte de $\mathbf{M}$ (vegeu Exemple 3.3). Esta counitat, com vam veure en la Nota 3.1, també satisfà una propietat universal simètrica:

> Per a tot conjunt A i tot homomorfisme de monoides $g \colon \mathbf{A}^* \longrightarrow \mathbf{M}$, existix una **única** aplicació de conjunts $g^\flat \colon A \longrightarrow U(\mathbf{M})$ satisfent $\varepsilon_{\mathbf{M}} \circ (\,\bullet\,)^*(g^\flat) = g$.

$$\begin{tikzcd}
\big((\,\bullet\,)^* \circ U\big)(\mathbf{A}^*) \arrow[d, dashed, "\exists!\,(\,\bullet\,)^*(g^\flat)"'] \arrow[dr, "g"] & \\
\big((\,\bullet\,)^* \circ U\big)(\mathbf{M}) \arrow[r, "\varepsilon_{\mathbf{M}}"'] & \mathbf{M}
\end{tikzcd}$$

Així, $U \circ (\,\bullet\,)^*$ constituïx la millor solució al problema de representar $\mathbf{M}$ com a quocient d'un monoide lliure (vegeu la Nota 1.2):

$$\mathbf{M} \cong \mathbf{M}^* / \mathrm{Ker}(\varepsilon_{\mathbf{M}}).$$

Finalment, tot i que U i $(\,\bullet\,)^*$ no són inversos, com a conseqüència de les propietats universals de η i ε, les seues estructures estan lligades per les identitats:

$$\mathrm{id}_{\mathbf{A}^*} = \varepsilon_{\mathbf{A}^*} \circ (\eta_A)^* \quad \text{i} \quad \mathrm{id}_M = U(\varepsilon_{\mathbf{M}}) \circ \eta_M.$$

En vistes de tot el que hem exposat fins ara donem la definició formal d'adjunció:

Definició 4.3. Una adjunció és una 6-tupla $(\mathsf{C}, \mathsf{D}, F, G, \eta, \varepsilon)$ on C i D són categories, $F \colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ i $G \colon \mathsf{D} \longrightarrow \mathsf{C}$ són functors i $\eta \colon \mathrm{Id}_{\mathsf{C}} \Longrightarrow G \circ F$ i $\varepsilon \colon F \circ G \Longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathsf{D}}$ són transformacions naturals que satisfan les anomenades *identitats triangulars*:

$$(\varepsilon * \mathrm{id}_F) \circ (\mathrm{id}_F * \eta) = \mathrm{id}_F, \quad (\mathrm{id}_G * \varepsilon) \circ (\eta * \mathrm{id}_G) = \mathrm{id}_G.$$

És a dir, els diagrames següents (en D^{C} i C^{D}, respectivament) commuten:

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, Rightarrow, "\mathrm{id}_F * \eta"] \arrow[dr, Rightarrow, "\mathrm{id}_F"'] & F \circ G \circ F \arrow[d, Rightarrow, "\varepsilon * \mathrm{id}_F"] \\
& F
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, Rightarrow, "\eta * \mathrm{id}_G"] \arrow[dr, Rightarrow, "\mathrm{id}_G"'] & G \circ F \circ G \arrow[d, Rightarrow, "\mathrm{id}_G * \varepsilon"] \\
& G.
\end{tikzcd}$$

En esta situació direm que tenim una situació d'adjunció de C en D, que G és adjunt per la dreta de F i que F és adjunt per l'esquerra de G. Anomenarem a la transformació η *unitat* de l'adjunció i a la transformació ε *counitat* de l'adjunció. Denotarem la situació d'adjunció per $F \dashv G$.

Convé subratllar que l'adjunció és una relació que s'establix entre functors concrets que actuen com a "inversos conceptuals" l'un de l'altre. A diferència de l'isomorfisme o de l'equivalència, on l'interés recau en determinar fins a quin punt dues categories són "la mateixa", l'adjunció se centra en la naturalesa de la interacció entre dues transformacions concretes. No obstant això, esta relació sovint acaba revelant propietats estructurals de les categories implicades, actuant com una finestra a la seua organització interna.

Nota 4.1. Les identitats triangulars demanen que la counitat i la unitat actuen com a inverses llevat de transport pels functors F i G. És evident que no poden ser inverses en el sentit clàssic, atés que les components de η residixen en C mentre que les de ε estan en D i, per tant, no es poden compondre. Tot i això, si "traslladem" la unitat mitjançant F, obtenim un morfisme en D:

$$F(\eta_c)\colon F(c) \longrightarrow (F \circ G \circ F)(c)$$

el qual admet $\varepsilon_{F(c)}$ com a invers per l'esquerra. Anàlogament, si "traslladem" la counitat mitjançant G, obtenim un morfisme en C

$$G(\varepsilon_d)\colon (G \circ F \circ G)(d) \longrightarrow G(d)$$

que admet $\eta_{G(d)}$ com a invers per la dreta. En definitiva, les identitats triangulars garantixen que estes transformacions es cancel·len una vegada situades en la mateixa categoria:

$$\mathrm{id}_{F(c)} = \varepsilon_{F(c)} \circ F(\eta_c), \qquad \mathrm{id}_{G(d)} = G(\varepsilon_d) \circ \eta_{G(d)}.$$

En efecte, si desenvolupem les components c de $(\varepsilon * \mathrm{id}_F)$ i $(\mathrm{id}_F * \eta)$, trobem

$$\begin{aligned}
(\varepsilon * \mathrm{id}_F)_c &= \varepsilon_{F(c)} \circ (F \circ G)\big((\mathrm{id}_F)_c\big) && \text{(Def. comp. horitzontal)}\\
&= \varepsilon_{F(c)} \circ (F \circ G)(\mathrm{id}_{F(c)}) && \text{(Def. de } \mathrm{id}_F\text{)}\\
&= \varepsilon_{F(c)} \circ \mathrm{id}_{(F\circ G)(F(c))} && (F \circ G \text{ functor})\\
&= \varepsilon_{F(c)}, && \text{(Def. de morfisme identitat)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathrm{id}_F * \eta)_c &= (\mathrm{id}_F)_{(G\circ F)(c)} \circ F(\eta_c) && \text{(Def. comp. horitzontal)}\\
&= \mathrm{id}_{F((G\circ F)(c))} \circ F(\eta_c) && \text{(Def. de } \mathrm{id}_F\text{)}\\
&= F(\eta_c). && \text{(Def. de morfisme identitat)}
\end{aligned}$$

No ho farem per brevetat però anàlogament es comprova que, per a tot objecte d en D, $(\mathrm{id}_G * \varepsilon)_d = G(\varepsilon_d)$ i $(\eta * \mathrm{id}_G)_d = \eta_{G(d)}$. Per tant, per definició de composició vertical, tenim, per una banda

$$\big((\varepsilon * \mathrm{id}_F) \circ (\mathrm{id}_F * \eta)\big)_c = \varepsilon_{F(c)} \circ F(\eta_c)$$

i, per una altra banda,

$$\big((\mathrm{id}_G * \varepsilon) \circ (\eta * \mathrm{id}_G)\big)_d = G(\varepsilon_d) \circ \eta_{G(d)}.$$

Així, les identitats triangulars se satisfan si, i només si, estes components són totes iguals als morfismes identitat corresponents.

Exemple 4.4. Gràcies a la nota anterior i després d'una revisió de l'exemple que introduïa la definició d'adjunció, resulta evident que $\big(\mathsf{Set}, \mathsf{Mon}, (\,\bullet\,)^*, U, \eta, \varepsilon\big)$ és, efectivament, una adjunció.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Set} \arrow[r, shift left=2, "(\,\bullet\,)^*"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{Mon}. \arrow[l, shift left=2, "U"] \end{tikzcd}$$

L'adjunció que acabem de descriure entre el functor $(\,\bullet\,)^*$ i el functor d'oblit U no és un fet aïllat, sinó el prototip d'un fenomen recurrent en matemàtiques: la construcció d'estructures lliures. Es poden definir l'anell lliure sobre un conjunt o sobre un grup abelià, el mòdul lliure sobre un grup abelià, el $\mathbb{K}$-espai vectorial lliure sobre un conjunt —donat un cos $\mathbb{K}$—, etc. En general, la noció d'objecte lliure sobre un conjunt de generadors es clarifica mitjançant l'existència d'un functor adjunt per l'esquerra d'un functor d'oblit.

Enunciem a continuació un resultat que ajuda a consolidar la visió de l'adjunt com a *invers conceptual*: la seua unicitat.

Teorema 4.2. *Si un functor té un adjunt, aleshores este és únic (llevat d'isomorfisme). És a dir, si $F \dashv G$ i $F \dashv G'$, aleshores $G \cong G'$ i, si $F \dashv G$ i $F' \dashv G$, aleshores $F \cong F'$.*

Demostració. Siguen $(\mathsf{C}, \mathsf{D}, F, G, \eta, \varepsilon)$ i $(\mathsf{C}, \mathsf{D}, F, G', \eta', \varepsilon')$ dues adjuncions per al mateix functor F. Volem construir un isomorfisme natural $\theta\colon G \Longrightarrow G'$. Usant les unitats i counitats, definim les transformacions $\theta\colon G \Longrightarrow G'$ i $\phi\colon G' \Longrightarrow G$ definint les seues components de la manera següent:

$$\theta_d := G'(\varepsilon_d) \circ \eta'_{G(d)}\colon G(d) \longrightarrow (G' \circ F \circ G)(d) \longrightarrow G'(d),$$

$$\phi_d := G(\varepsilon'_d) \circ \eta_{G'(d)}\colon G'(d) \longrightarrow (G \circ F \circ G')(d) \longrightarrow G(d).$$

Cal notar que θ i ϕ són, efectivament, transformacions naturals, atés que les seues components s'han definit exclusivament a partir de la composició de functors i transformacions naturals ja establertes; la comprovació és rutinària. Veurem a continuació que $\phi = \theta^{-1}$. Per a qualsevol objecte d en D trobem que

$$\begin{aligned}
\phi_d \circ \theta_d &= \big(G(\varepsilon'_d) \circ \eta_{G'(d)}\big) \circ \theta_d && \text{(Def. de } \phi\text{)} \\
&= G(\varepsilon'_d) \circ (\eta_{G'(d)} \circ \theta_d) && \text{(Ass. de la composició)} \\
&= G(\varepsilon'_d) \circ \big((G \circ F)(\theta_d) \circ \eta_{G(d)}\big) && \text{(Naturalitat de } \eta\text{)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= G(\varepsilon'_d) \circ (G \circ F)\big(G'(\varepsilon_d) \circ \eta'_{G(d)}\big) \circ \eta_{G(d)} && \text{(Def. de } \theta\text{)}\\
&= G\big(\varepsilon'_d \circ (F \circ G')(\varepsilon_d)\big) \circ (G \circ F)(\eta'_{G(d)}) \circ \eta_{G(d)} && \text{(} G \text{ i } F \text{ functors)}\\
&= G\big(\varepsilon_d \circ \varepsilon'_{(F\circ G)(d)}\big) \circ (G \circ F)(\eta'_{G(d)}) \circ \eta_{G(d)} && \text{(Naturalitat de } \varepsilon\text{)}\\
&= G(\varepsilon_d) \circ G\big(\varepsilon'_{F(G(d))} \circ F(\eta'_{G(d)})\big) \circ \eta_{G(d)} && \text{(} G \text{ functor)}\\
&= G(\varepsilon_d) \circ G(\mathrm{id}_{F(G(d))}) \circ \eta_{G(d)} && \text{(Identitat triangular)}\\
&= G(\varepsilon_d) \circ \mathrm{id}_{(G(F(G(d)))} \circ \eta_{G(d)} && \text{(} G \text{ functor)}\\
&= G(\varepsilon_d) \circ \mathrm{id}_{(G\circ F)(G(d))} \circ \eta_{G(d)} && \text{(Def. composició de functors)}\\
&= G(\varepsilon_d) \circ \eta_{G(d)} && \text{(Def. de morfisme identitat)}\\
&= \mathrm{id}_{G(d)}. && \text{(Identitat triangular)}
\end{aligned}
$$

Per la definició de composició vertical, $(\phi\circ\theta)_d = \mathrm{id}_{G(d)}$ i, per tant, $\phi\circ\theta = \mathrm{id}_G$. Canviant G per G', η per η' i ε per ε', es comprova que $\theta \circ \phi = \mathrm{id}_{G'}$. Així, $\phi = \theta^{-1}$, cosa que prova que θ és un isomorfisme natural $\theta\colon G \cong G'$.

Demostrar que dues adjuncions $(\mathsf{C}, \mathsf{D}, F, G, \eta, \varepsilon)$ i $(\mathsf{C}, \mathsf{D}, F', G, \eta', \varepsilon')$ del mateix functor G impliquen que $F \cong F'$ és un procés anàleg i no el farem. $\square$

Ara bé, és cert que esta definició d'adjunció pot resultar complicada d'entendre i també d'usar en la pràctica. Intentem derivar l'adjunció des d'una altra perspectiva. Al final de l'apartat anterior introduíem la necessitat d'una regla de comparació més feble que l'equivalència. Seguim, doncs, este camí. L'equivalència, en exigir un isomorfisme entre les composicions i les identitats, imposa una condició de reversibilitat molt estricta que, com ja hem discutit, molts functors d'interés no poden satisfer.

Esta rigidesa prové del fet que l'equivalència requerix una col·lecció d'isomorfismes entre objectes en cadascuna de les dues categories. Seguint la filosofia de Mac Lane —en la qual l'atenció es desplaça dels objectes cap als morfismes—, podem pensar en relaxar esta exigència: oblidem l'isomorfisme entre objectes i demanem només isomorfismes entre col·leccions de morfismes. Esta idea es concreta en passar de demanar isomorfismes naturals entre composicions i identitats a demanar, simplement, transformacions naturals. Ara bé, com han de ser estes transformacions? Quina classe d'isomorfismes entre conjunts de morfismes volem?

Isomorfisme	**Equivalència**	**Adjunció**
$G\circ F = \mathrm{Id}_{\mathsf{C}}$	$G\circ F \cong \mathrm{Id}_{\mathsf{C}}$	$G\circ F \Longleftarrow \mathrm{Id}_{\mathsf{C}}$
$F\circ G = \mathrm{Id}_{\mathsf{D}}$	$F\circ G \cong \mathrm{Id}_{\mathsf{D}}$	$F\circ G \Longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathsf{D}}$

En la discussió prèvia a la definició d'adjunció discutíem com les transformacions naturals η i ε satisfeien cadascuna una propietat universal. Pel que vam estudiar en la

Nota 3.1, la propietat universal de ε ens permet definir una aplicació entre conjunts

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & \mathrm{Hom}_{\mathsf{Mon}}\big((\,\bullet\,)^*(A),\mathbf{M}\big) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}\big(A,U(\mathbf{M})\big) \\ & g & \longmapsto & U(g)\circ\eta_A. \end{array}$$

L'existència i unicitat garantides per les propietats universals de η i ε obliguen a que φ siga una bijecció i, per tant, induïsca un isomorfisme de conjunts:

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Mon}}\big((\,\bullet\,)^*(A),\mathbf{M}\big)\cong\mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}\big(A,U(\mathbf{M})\big).$$

És senzill comprovar que esta aplicació és natural en A i $\mathbf{M}$ i, per tant, φ definix un isomorfisme natural

$$\varphi\colon \mathrm{Hom}_{\mathsf{Mon}}\circ\big((\,\bullet\,)^{*\mathrm{op}}\times\mathrm{Id}_{\mathsf{Mon}}\big)\cong\mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}\circ(\mathrm{Id}_{\mathsf{Set}}^{\mathrm{op}}\times U).$$

Esta anàlisi suggerix definir l'adjunció entre dos functors $F\colon \mathsf{C}\longrightarrow\mathsf{D}$ i $G\colon\mathsf{D}\longrightarrow\mathsf{C}$ com l'existència d'un isomorfisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}\big(F(c),d\big)\cong\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}\big(c,G(d)\big)$$

natural en c i en d. El següent resultat reconcilia esta intuïció amb la nostra definició d'adjunció com a busca d'inversos conceptuals i la noció d'existència de propietats universals que hem anat introduint al llarg de la secció: les tres són equivalents. Açò no només és útil en la pràctica, sinó que, a més, ens dona una visió més àmplia de l'adjunció que resulta esclaridora quan intentem comprendre el concepte en tota la seua profunditat.

Teorema 4.3. *Siguen* C *i* D *categories. Són equivalents:*

1. *Existix una adjunció* $(\mathsf{C},\mathsf{D},F,G,\eta,\varepsilon)$.

2. (Propietat universal) *Existixen* $F\colon\mathsf{C}\longrightarrow\mathsf{D}$ *i* $G\colon\mathsf{D}\longrightarrow\mathsf{C}$ *functors i una transformació natural* $\eta\colon\mathrm{Id}_{\mathsf{C}}\Longrightarrow G\circ F$ *tal que, per a cada* $c\in\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$, $d\in\mathrm{Ob}(\mathsf{D})$ *i* $f\in\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}\big(c,G(d)\big)$ *existix un únic morfisme* $f^\sharp\in\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}\big(F(c),d\big)$ *de forma que* $f=G(f^\sharp)\circ\eta_c$.

3. *Existixen* $F\colon\mathsf{C}\longrightarrow\mathsf{D}$ *i* $G\colon\mathsf{D}\longrightarrow\mathsf{C}$ *functors i un isomorfisme natural*

$$\varphi\colon\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(\bullet,\bullet)\circ(F^{\mathrm{op}}\times\mathrm{Id}_{\mathsf{D}})\cong\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(\bullet,\bullet)\circ(\mathrm{Id}_{\mathsf{C}}^{\mathrm{op}}\times G),$$

$$\varphi=\big(\varphi_{(c,d)}\big)_{(c,d)\in\mathrm{Ob}(\mathsf{C}^{\mathrm{op}}\times\mathsf{D})},\ \varphi_{(c,d)}\colon\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}\big(F(c),d\big)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}\big(c,G(d)\big).$$

Demostració. (1. $\Longrightarrow$ 2.) Comprovem primer l'existència. Siguen $c\in\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$, $d\in\mathrm{Ob}(\mathsf{D})$ i $f\in\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}\big(c,G(d)\big)$. Definim

$$f^\sharp=\varepsilon_d\circ F(f).$$

Observem que

$$\begin{aligned}
G(f^\sharp)\circ\eta_c &= G\big(\varepsilon_d\circ F(f)\big)\circ\eta_c && \text{(Def. de } f^\sharp\text{)}\\
&= \Big(G(\varepsilon_d)\circ G\big(F(f)\big)\Big)\circ\eta_c && \text{(}G\text{ functor)}\\
&= \big(G(\varepsilon_d)\circ(G\circ F)(f)\big)\circ\eta_c && \text{(Def. comp. de functors)}\\
&= G(\varepsilon_d)\circ\big((G\circ F)(f)\circ\eta_c\big) && \text{(Associativitat de la comp.)}\\
&= G(\varepsilon_d)\circ\big(\eta_{G(d)}\circ \mathrm{Id}_{\mathsf{C}}(f)\big) && \text{(Cond. de naturalitat de } \eta\text{)}\\
&= G(\varepsilon_d)\circ\big(\eta_{G(d)}\circ f\big) && \text{(Def. de Id}_{\mathsf{C}}\text{)}\\
&= \big(G(\varepsilon_d)\circ\eta_{G(d)}\big)\circ f && \text{(Associativitat de la comp.)}\\
&= \mathrm{id}_{G(d)}\circ f && \text{(Segona id. triangular)}\\
&= f. && \text{(Def. de id}_{G(d)}\text{)}
\end{aligned}$$

Així, $f^\sharp$ satisfà la igualtat en 2. Passem ara a comprovar la unicitat. Suposem que existix $g\in\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}\big(F(c),d\big)$ tal que $f=G(g)\circ\eta_c$. Aleshores,

$$\begin{aligned}
g &= g\circ\mathrm{id}_{\mathrm{F(c)}} && \text{(Def. de id}_{F(c)}\text{)}\\
&= g\circ\big(\varepsilon_{F(c)}\circ F(\eta_c)\big) && \text{(Primera id. triangular)}\\
&= \mathrm{Id}_{\mathsf{D}}(g)\circ\big(\varepsilon_{F(c)}\circ F(\eta_c)\big) && \text{(Def. de Id}_{\mathsf{D}}\text{)}\\
&= \big(\mathrm{Id}_{\mathsf{D}}(g)\circ\varepsilon_{F(c)}\big)\circ F(\eta_c) && \text{(Associativitat de la comp.)}\\
&= \big(\varepsilon_d\circ(F\circ G)(g)\big)\circ F(\eta_c) && \text{(Cond. de naturalitat de } \varepsilon\text{)}\\
&= \Big(\varepsilon_d\circ F\big(G(g)\big)\Big)\circ F(\eta_c) && \text{(Def. comp. de functors)}\\
&= \varepsilon_d\circ\Big(F\big(G(g)\big)\circ F(\eta_c)\Big) && \text{(Associativitat de la comp.)}\\
&= \varepsilon_d\circ F\big(G(g)\circ\eta_c\big) && \text{(}F\text{ functor)}\\
&= \varepsilon_d\circ F(f) && \text{(Per hipòtesi)}\\
&= f^\sharp. && \text{(Def. de } f^\sharp\text{)}
\end{aligned}$$

(2. $\Longrightarrow$ 1.) Hem de definir qui és $\varepsilon=(\varepsilon_d)_{d\in\mathrm{Ob}(\mathsf{D})}$. Siga $d\in\mathrm{Ob}(\mathsf{D})$ i considerem $G(d)\in\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$ i $\mathrm{id}_{G(d)}\in\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}\big(G(d),G(d)\big)$. Per hipòtesi, existix un únic $\mathrm{id}^\sharp_{G(d)}\in\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}\big(F\big(G(d)\big),d\big)=\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}\big((F\circ G)(d),d\big)$. Així, definim

$$\varepsilon_d=\mathrm{id}^\sharp_{G(d)}.$$

Hem de comprovar que ε és transformació natural i que se satisfan les identitats triangulars. Començarem comprovant la segona identitat triangular, per la seua trivialitat i perquè ens farà falta per comprovar que ε és transformació natural. Així,

$$\begin{aligned}
G(\varepsilon_{d_1})\circ\eta_{G(d_1)} &= G(\mathrm{id}^\sharp_{G(d_1)})\circ\eta_{G(d_1)} && \text{(Def. de } \varepsilon\text{)}\\
&= \mathrm{id}_{G(d_1)}. && \text{(Def. de id}^\sharp_{G(d_1)}\text{)}
\end{aligned}$$

Ara veurem que ε és transformació natural comprovant que es complix la condició de naturalitat. Siguen $d_1, d_2 \in \mathrm{Ob}(\mathsf{D})$ i $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(d_1, d_2)$. Volem veure que

$$\mathrm{Id}_{\mathsf{D}}(f) \circ \varepsilon_{d_1} = \varepsilon_{d_2} \circ (F \circ G)(f).$$

Notem que $G(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}\big(G(d_1), G(d_2)\big)$. Per hipòtesi, tenim que existix un únic $G(f)^\sharp \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}\big(F\big(G(d_1)\big), d_2\big)$ tal que

$$G\big(G(f)^\sharp\big) \circ \eta_{G(d_1)} = G(f).$$

Ara bé, trobem que

$$\begin{aligned}
G\big(\mathrm{Id}_{\mathsf{D}}(f) \circ \varepsilon_{d_1}\big) \circ \eta_{G(d_1)} &= G(f \circ \varepsilon_{d_1}) \circ \eta_{G(d_1)} && (\text{Def. de } \mathrm{Id}_{\mathsf{D}})\\
&= \big(G(f) \circ G(\varepsilon_{d_1})\big) \circ \eta_{G(d_1)} && (G \text{ functor})\\
&= G(f) \circ \big(G(\varepsilon_{d_1}) \circ \eta_{G(d_1)}\big) && (\text{Associativitat de la comp.})\\
&= G(f) \circ \mathrm{id}_{G(d_1)} && (\text{Segona id. triangular})\\
&= G(f). && (\text{Def. de } \mathrm{id}_{G(d_1)})
\end{aligned}$$

Però també trobem que

$$\begin{aligned}
&G\big(\varepsilon_{d_2} \circ (F \circ G)(f)\big) \circ \eta_{G(d_1)}\\
&\quad= \Big(G(\varepsilon_{d_2}) \circ G\big((F \circ G)(f)\big)\Big) \circ \eta_{G(d_1)} && (G \text{ functor})\\
&\quad= \Big(G(\varepsilon_{d_2}) \circ (G \circ F)\big(G(f)\big)\Big) \circ \eta_{G(d_1)} && (\text{Ass. de la comp. de functors})\\
&\quad= G(\varepsilon_{d_2}) \circ \Big((G \circ F)\big(G(f)\big) \circ \eta_{G(d_1)}\Big) && (\text{Ass. de la comp.})\\
&\quad= G(\varepsilon_{d_2}) \circ \Big(\eta_{G(d_2)} \circ \mathrm{Id}_{\mathsf{C}}\big(G(f)\big)\Big) && (\text{Cond. de naturalitat de } \eta)\\
&\quad= G(\varepsilon_{d_2}) \circ \big(\eta_{G(d_2)} \circ G(f)\big) && (\text{Def. de } \mathrm{Id}_{\mathsf{C}})\\
&\quad= \big(G(\varepsilon_{d_2}) \circ \eta_{G(d_2)}\big) \circ G(f) && (\text{Ass. de la comp.})\\
&\quad= \mathrm{id}_{G(d_2)} \circ G(f) && (\text{Segona id. triangular})\\
&\quad= G(f). && (\text{Def. de } \mathrm{id}_{G(d_2)}
\end{aligned}$$

Per unicitat, concloem que

$$\mathrm{Id}_{\mathsf{D}}(f) \circ \varepsilon_{d_1} = G(f)^\sharp = \varepsilon_{d_2} \circ (F \circ G)(f)$$

i, per tant, que ε és transformació natural.

Ens queda la primera identitat triangular però abans farem una observació. I és que, per a qualsevol $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}\big(c, G(d)\big)$, es té que

$$f^\sharp = \varepsilon_d \circ F(f).$$

Açò és així pel mateix raonament fet en la primera implicació després de definir la candidata a $f^\sharp$ i per unicitat. Així, per a $f = \eta_c \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}\big(c, (G \circ F)(c)\big)$, tenim que

$$\eta_c^\sharp = \varepsilon_d \circ F(\eta_c)$$

i, de la següent cadena d'igualtats

$$\begin{aligned}
\eta_c &= \mathrm{id}_{(G\circ F)(c)} \circ \eta_c && (\text{Def. de } \mathrm{id}_{(G\circ F)(c)})\\
&= \mathrm{id}_{G(F(c))} \circ \eta_c && (\text{Def. comp. de functors})\\
&= G(\mathrm{id}_{F(c)}) \circ \eta_c, && (G \text{ functor})
\end{aligned}$$

i la unicitat de $\eta_c^\sharp$, tenim la primera identitat triangular

$$\mathrm{id}_{G(d)} = \eta_c^\sharp = \varepsilon_d \circ F(\eta_c).$$

Concloem que $(\mathsf{C}, \mathsf{D}, F, G, \eta, \varepsilon)$ és adjunció.

(1. $\Longrightarrow$ 3.) Per a cada parell $(c, d) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{D})$, definim l'assignació

$$\begin{aligned}
\varphi_{(c,d)} \colon \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}\big(F(c), d\big) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}\big(c, G(d)\big)\\
g &\longmapsto G(g) \circ \eta_c.
\end{aligned}$$

Notem que $\varphi_{(c,d)}$ és una bijecció amb inversa $\varphi_{(c,d)}^{-1}(f) = \varepsilon_d \circ F(f)$ i, per tant, definix un isomorfisme

$$\varphi_{(c,d)} \colon \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}\big(F(c), d\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}\big(c, G(d)\big)$$

en Set. La comprovació és senzilla:

$$\begin{aligned}
(\varphi_{(c,d)}^{-1} \circ \varphi_{(c,d)})(g) &= \varphi_{(c,d)}^{-1}\big(\varphi_{(c,d)}(g)\big) && (\text{Def. de composició})\\
&= \varphi_{(c,d)}^{-1}\big(G(g) \circ \eta_c\big) && (\text{Def. de } \varphi_{(c,d)})\\
&= \varepsilon_d \circ F\big(G(g) \circ \eta_c\big) && (\text{Def. de } \varphi_{(c,d)}^{-1})\\
&= \varepsilon_d \circ F\big(G(g)\big) \circ F(\eta_c) && (F \text{ functor})\\
&= g \circ \varepsilon_{F(c)} \circ F(\eta_c) && (\text{Naturalitat de } \varepsilon)\\
&= g \circ \mathrm{id}_{F(c)} && (\text{Nota 4.1})\\
&= g && (\text{Def. de morfisme identitat})\\
&= \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(F(c),d)}(g), && (\text{Def. de morfisme identitat})
\end{aligned}$$

d'on concloem que $\varphi_{(c,d)}^{-1} \circ \varphi_{(c,d)} = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(F(c),d)}$. Anàlogament, es comprova la identitat $\varphi_{(c,d)} \circ \varphi_{(c,d)}^{-1} = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(c,G(d))}$. Queda provar la naturalitat de $\varphi_{(c,d)}$. Siguen $h^{\mathrm{op}} \colon c_1 \longrightarrow c_2$ i $k \colon d_1 \longrightarrow d_2$ morfismes en C^{op} i D, respectivament. Hem de veure que el següent diagrama commuta. (Recordem que $F^{\mathrm{op}}(h^{\mathrm{op}}) = F(h)^{\mathrm{op}}$ per definició de functor oposat):

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}\big(F(c_1), d_1\big) \arrow[r, "\varphi_{(c_1,d_1)}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(F(h)^{\mathrm{op}}, k)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}\big(c_1, G(d_1)\big) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(h^{\mathrm{op}}, G(k))"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}\big(F(c_2), d_2\big) \arrow[r, "\varphi_{(c_2,d_2)}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}\big(c_2, G(d_2)\big).
\end{tikzcd}$$

Per això, considerem $g \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}\big(F(c_1), d_1\big)$ i veiem que

$$\begin{aligned}
&\big(\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}\big(h^{\mathrm{op}}, G(k)\big) \circ \varphi_{(c_1,d_1)}\big)(g) \\
&\qquad = \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}\big(h^{\mathrm{op}}, G(k)\big)\big(\varphi_{(c_1,d_1)}(g)\big) && \text{(Def. de composició)} \\
&\qquad = \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}\big(h, G(k)\big)\big(G(g) \circ \eta_{c_1}\big) && \text{(Def. de } \varphi_{(c_1,d_1)}) \\
&\qquad = G(k) \circ \big(G(g) \circ \eta_{c_1}\big) \circ h && \text{(Def. de } \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(\bullet,\bullet)) \\
&\qquad = G(k) \circ G(g) \circ \big(G \circ F\big)(h) \circ \eta_{c_2} && \text{(Naturalitat de } \eta) \\
&\qquad = G(k) \circ G(g) \circ G\big(F(h)\big) \circ \eta_{c_2} && \text{(Def. de composició)} \\
&\qquad = G\big(k \circ g \circ F(h)\big) \circ \eta_{c_2} && (G \text{ functor}) \\
&\qquad = \varphi_{(c_2,d_2)}\big(k \circ g \circ F(h)\big) && \text{(Def. de } \varphi_{(c_2,d_2)}) \\
&\qquad = \varphi_{(c_2,d_2)}\big(\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}\big(F(h)^{\mathrm{op}}, k\big)(g)\big) && \text{(Def. de } \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(\bullet,\bullet)) \\
&\qquad = \big(\varphi_{(c_2,d_2)} \circ \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}\big(F(h)^{\mathrm{op}}, k\big)\big)(g). && \text{(Def. de composició)}
\end{aligned}$$

Així, $\varphi = (\varphi_{(c,d)})_{(c,d)\in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^{\mathrm{op}},\mathsf{D})}$ definix un isomorfisme natural

$$\varphi \colon \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(\bullet,\bullet) \circ (F^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Id}_{\mathsf{D}}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(\bullet,\bullet) \circ (\mathrm{Id}_{\mathsf{C}}^{\mathrm{op}} \times G).$$

(3. $\Longrightarrow$ 2.) Per a cada objecte c en C, definim el morfisme

$$\eta_c := \varphi_{(c,F(c))}(\mathrm{id}_{F(c)}) \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}\big(c, G\big(F(c)\big)\big).$$

Volem veure que $\eta = (\eta_c)_{c\in\mathrm{Ob}(\mathsf{C})}$ satisfà la propietat universal. Siga $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}\big(c, G(d)\big)$. Per la bijectivitat de $\varphi_{(c,d)}$, existix un únic morfisme $f^\sharp \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}\big(F(c), d\big)$ tal que $\varphi_{(c,d)}(f^\sharp) = f$. Fent servir la naturalitat de φ, el següent diagrama commuta per a tot $h^{\mathrm{op}} \colon c \longrightarrow c$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}\big(F(c), F(c)\big) \arrow[r, "\varphi_{(c,F(c))}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(F(h)^{\mathrm{op}}, f^\sharp)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}\big(c, G\big(F(c)\big)\big) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(h^{\mathrm{op}}, G(f^\sharp))"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}\big(F(c), d\big) \arrow[r, "\varphi_{(c,d)}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}\big(c, G(d)\big).
\end{tikzcd}$$

En particular, prenent $h = \mathrm{id}_c$ i seguint l'element $\mathrm{id}_{F(c)} \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}\big(F(c), F(c)\big)$ al llarg de la branca inferior del diagrama, obtenim d'una banda:

$$
\begin{aligned}
&\big(\varphi_{(c,d)} \circ \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}\big(F(\mathrm{id}_c)^{\mathrm{op}}, f^\sharp\big)\big)(\mathrm{id}_{F(c)}) \\
&\qquad\qquad = \big(\varphi_{(c,d)} \circ \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(\mathrm{id}_{F(c)}^{\mathrm{op}}, f^\sharp)\big)(\mathrm{id}_{F(c)}) && (F \text{ functor}) \\
&\qquad\qquad = \varphi_{(c,d)}\big(\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(\mathrm{id}_{F(c)}^{\mathrm{op}}, f^\sharp)(\mathrm{id}_{F(c)})\big) && (\text{Def. de composició}) \\
&\qquad\qquad = \varphi_{(c,d)}(f^\sharp \circ \mathrm{id}_{F(c)} \circ \mathrm{id}_{F(c)}) && (\text{Def. de } \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(\bullet,\bullet)) \\
&\qquad\qquad = \varphi_{(c,d)}(f^\sharp) && (\text{Def. de morfisme identitat}) \\
&\qquad\qquad = f. && (\text{Def. de } f^\sharp)
\end{aligned}
$$

D'altra banda, si l'avaluem al llarg de la branca superior, resulta:

$$
\begin{aligned}
&\big(\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}\big(\mathrm{id}_c^{\mathrm{op}}, G(f^\sharp)\big) \circ \varphi_{(c,F(c))}\big)(\mathrm{id}_{F(c)}) \\
&\qquad\qquad = \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}\big(\mathrm{id}_c^{\mathrm{op}}, G(f^\sharp)\big)\big(\varphi_{(c,F(c))}(\mathrm{id}_{F(c)})\big) && (\text{Def. de composició}) \\
&\qquad\qquad = \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}\big(\mathrm{id}_c^{\mathrm{op}}, G(f^\sharp)\big)(\eta_c) && (\text{Def. de } \eta_c) \\
&\qquad\qquad = G(f^\sharp) \circ \eta_c \circ \mathrm{id}_c && (\text{Def. de } \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(\bullet,\bullet)) \\
&\qquad\qquad = G(f^\sharp) \circ \eta_c. && (\text{Def. de morfisme identitat})
\end{aligned}
$$

Per tant, $f = G(f^\sharp) \circ \eta_c$. Com que $f^\sharp$ és única, es complix la propietat universal. $\square$

Exemple 4.5. Des d'esta perspectiva disposem d'una via alternativa per concloure, de manera molt més directa, que $\big(\mathsf{Set}, \mathsf{Mon}, (\,\bullet\,)^*, U, \eta, \varepsilon\big)$ és una adjunció només a partir d'allò que havíem estudiat al Capítol 1 (la propietat universal del monoide lliure, concretament).

El següent pas en el nostre estudi és comprovar que, en efecte, l'adjunció és una relaxació de l'equivalència. Tot i que ha estat construïda amb este propòsit, la demostració d'esta jerarquia no és un resultat trivial.

Proposició 4.4. *Si C i D són categories equivalents, aleshores existix una adjunció de C en D i una altra de D en C.*

Demostració. Com $\simeq$ és relació d'equivalència, $\mathsf{C} \simeq \mathsf{D}$ es complix si, i només si, $\mathsf{D} \simeq \mathsf{C}$. Per tant, és suficient veure que existix una d'estes adjuncions.

Suposem que C i D són equivalents. Això implica que existixen dos functors $F\colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ i $G\colon \mathsf{D} \longrightarrow \mathsf{C}$ per als què podem trobar dos isomorfismes naturals $\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathsf{C}} \cong G \circ F$ i $\alpha\colon F \circ G \cong \mathrm{Id}_{\mathsf{D}}$. Notem que $(\mathsf{C}, \mathsf{D}, G, F, \eta, \alpha)$ no té per què satisfer les identitats triangulars. Construirem la counitat ε de la nostra adjunció a partir de η i α. Considerem $\varepsilon = (\varepsilon_d)_{d \in \mathrm{Ob}(\mathsf{D})}$, on

$$\varepsilon_d = \alpha_d \circ F\Big(\big(G(\alpha_d) \circ \eta_{G(d)}\big)^{-1}\Big).$$

Per a cada $d \in \mathrm{Ob}(\mathsf{D})$, ε_d és un isomorfisme en ser, tant la composició d'isomorfismes com l'actuació de functors sobre isomorfismes, isomorfisme. Comprovem que ε és transformació natural de $F \circ G$ en Id_{D}. Per això, veurem que complix la condició de naturalitat. Siga $g\colon d_1 \longrightarrow d_2$ un morfisme en D. Volem veure que

$$\mathrm{Id}_{\mathsf{D}}(g) \circ \varepsilon_{d_1} = \varepsilon_{d_2} \circ (F \circ G)(g).$$

Trobem la següent cadena d'igualtats:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Id}_{\mathsf{D}}(g) \circ \varepsilon_{d_1} \\
&\quad= \mathrm{Id}_{\mathsf{D}}(g) \circ \Bigg(\alpha_{d_1} \circ F\Big(\big(G(\alpha_{d_1}) \circ \eta_{G(d_1)}\big)^{-1}\Big)\Bigg) && \text{(Def. de } \varepsilon) \\
&\quad= \big(\mathrm{Id}_{\mathsf{D}}(g) \circ \alpha_{d_1}\big) \circ F\Big(\big(G(\alpha_{d_1}) \circ \eta_{G(d_1)}\big)^{-1}\Big) && \text{(Ass. de la comp.)} \\
&\quad= \big(\alpha_{d_2} \circ (F \circ G)(g)\big) \circ F\Big(\big(G(\alpha_{d_1}) \circ \eta_{G(d_1)}\big)^{-1}\Big) && \text{(Cond. de nat. de } \alpha) \\
&\quad= \alpha_{d_2} \circ \Bigg((F \circ G)(g) \circ F\Big(\big(G(\alpha_{d_1}) \circ \eta_{G(d_1)}\big)^{-1}\Big)\Bigg) && \text{(Ass. de la comp.)} \\
&\quad= \alpha_{d_2} \circ \Bigg(F\big(G(g)\big) \circ F\Big(\big(G(\alpha_{d_1}) \circ \eta_{G(d_1)}\big)^{-1}\Big)\Bigg) && \text{(Def. comp. de funct.)} \\
&\quad= \alpha_{d_2} \circ \Big(F\big(G(g)\big) \circ F\big(\eta_{G(d_1)}^{-1} \circ G(\alpha_{d_1})^{-1}\big)\Big) && \text{(Inv. comp. d'isom.)} \\
&\quad= \alpha_{d_2} \circ F\Big(G(g) \circ \big(\eta_{G(d_1)}^{-1} \circ G(\alpha_{d_1})^{-1}\big)\Big) && (F \text{ functor}) \\
&\quad= \alpha_{d_2} \circ F\Big(\big(G(g) \circ \eta_{G(d_1)}^{-1}\big) \circ G(\alpha_{d_1})^{-1}\Big) && \text{(Ass. de la comp.)} \\
&\quad= \alpha_{d_2} \circ F\Bigg(\Big(\mathrm{Id}_{\mathsf{C}}\big(G(g)\big) \circ \eta_{G(d_1)}^{-1}\Big) \circ G(\alpha_{d_1})^{-1}\Bigg) && \text{(Def. de } \mathrm{Id}_{\mathsf{C}}) \\
&\quad= \alpha_{d_2} \circ F\Bigg(\bigg(\eta_{G(d_2)}^{-1} \circ (G \circ F)\Big(\mathrm{Id}_{\mathsf{C}}\big(G(g)\big)\Big)\bigg) \circ G(\alpha_{d_1})^{-1}\Bigg) && \text{(Cond. de nat. de } \eta^{-1}) \\
&\quad= \alpha_{d_2} \circ F\Bigg(\Big(\eta_{G(d_2)}^{-1} \circ (G \circ F)\big(G(g)\big)\Big) \circ G(\alpha_{d_1})^{-1}\Bigg) && \text{(Def. de } \mathrm{Id}_{\mathsf{C}}) \\
&\quad= \alpha_{d_2} \circ F\Bigg(\Big(\eta_{G(d_2)}^{-1} \circ (G \circ F)\big(G(g)\big)\Big) \circ G(\alpha_{d_1}^{-1})\Bigg) && (G \text{ functor}) \\
&\quad= \alpha_{d_2} \circ F\Bigg(\Big(\eta_{G(d_2)}^{-1} \circ G\big((F \circ G)(g)\big)\Big) \circ G(\alpha_{d_1}^{-1})\Bigg) && \text{(Ass. comp. de funct.)} \\
&\quad= \alpha_{d_2} \circ F\Bigg(\eta_{G(d_2)}^{-1} \circ \Big(G\big((F \circ G)(g)\big) \circ G(\alpha_{d_1}^{-1})\Big)\Bigg) && \text{(Ass. de la comp.)} \\
&\quad= \alpha_{d_2} \circ F\Big(\eta_{G(d_2)}^{-1} \circ G\big((F \circ G)(g) \circ \alpha_{d_1}^{-1}\big)\Big) && (G \text{ functor}) \\
&\quad= \alpha_{d_2} \circ F\Big(\eta_{G(d_2)}^{-1} \circ G\big(\alpha_{d_2}^{-1} \circ \mathrm{Id}_{\mathsf{D}}(g)\big)\Big) && \text{(Cond. de nat. de } \alpha^{-1}) \\
&\quad= \alpha_{d_2} \circ F\big(\eta_{G(d_2)}^{-1} \circ G(\alpha_{d_2}^{-1} \circ g)\big) && \text{(Def. de } \mathrm{Id}_{\mathsf{D}})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha_{d_2} \circ F\Big(\eta^{-1}_{G(d_2)} \circ \big(G(\alpha^{-1}_{d_2}) \circ G(g)\big)\Big) && \text{(G functor)}\\
&= \alpha_{d_2} \circ F\Big(\big(\eta^{-1}_{G(d_2)} \circ G(\alpha^{-1}_{d_2})\big) \circ G(g)\Big) && \text{(Ass. de la comp.)}\\
&= \alpha_{d_2} \circ F\Big(\big(\eta^{-1}_{G(d_2)} \circ G(\alpha_{d_2})^{-1}\big) \circ G(g)\Big) && \text{(G functor)}\\
&= \alpha_{d_2} \circ F\Big(\big(G(\alpha_{d_2}) \circ \eta_{G(d_2)}\big)^{-1} \circ G(g)\Big) && \text{(Inv. comp. d'isom.)}\\
&= \alpha_{d_2} \circ \bigg(F\Big(\big(G(\alpha_{d_2}) \circ \eta_{G(d_2)}\big)^{-1}\Big) \circ F\big(G(g)\big)\bigg) && \text{(F functor)}\\
&= \alpha_{d_2} \circ \bigg(F\Big(\big(G(\alpha_{d_2}) \circ \eta_{G(d_2)}\big)^{-1}\Big) \circ (F \circ G)(g)\bigg) && \text{(Def. comp. de funct.)}\\
&= \bigg(\alpha_{d_2} \circ F\Big(\big(G(\alpha_{d_2}) \circ \eta_{G(d_2)}\big)^{-1}\Big)\bigg) \circ (F \circ G)(g) && \text{(Ass. de la comp.)}\\
&= \varepsilon_{d_2} \circ (F \circ G)(g). && \text{(Def. de ε)}
\end{aligned}
$$

Així, ε és transformació natural i, pel que hem comentat abans, és isomorfisme natural. Ara hem de veure que se satisfan les igualtats triangulars. Per la Nota 4.1, és suficient veure que, per a cada $c \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$ i $d \in \mathrm{Ob}(\mathsf{D})$ es té que

$$\mathrm{id}_{F(c)} = \varepsilon_{F(c)} \circ F(\eta_c), \qquad \mathrm{id}_{G(d)} = G(\varepsilon_d) \circ \eta_{G(d)}.$$

Comprovem primer la segona identitat:

$$
\begin{aligned}
&G(\varepsilon_d) \circ \eta_{G(d)}\\
&\quad= G\bigg(\alpha_d \circ F\Big(\big(G(\alpha_d) \circ \eta_{G(d)}\big)^{-1}\Big)\bigg) \circ \eta_{G(d)} && \text{(Def. de ε)}\\
&\quad= G\Big(\alpha_d \circ F\big(\eta^{-1}_{G(d)} \circ G(\alpha_d)^{-1}\big)\Big) \circ \eta_{G(d)} && \text{(Inv. de comp. d'isom.)}\\
&\quad= G\Big(\alpha_d \circ F\big(\eta^{-1}_{G(d)} \circ G(\alpha^{-1}_d)\big)\Big) \circ \eta_{G(d)} && \text{(G functor)}\\
&\quad= G\Big(\alpha_d \circ F(\eta^{-1}_{G(d)}) \circ F\big(G(\alpha^{-1}_d)\big)\Big) \circ \eta_{G(d)} && \text{(F functor)}\\
&\quad= G(\alpha_d) \circ G\big(F(\eta^{-1}_{G(d)})\big) \circ G\Big(F\big(G(\alpha^{-1}_d)\big)\Big) \circ \eta_{G(d)} && \text{(G functor)}\\
&\quad= G(\alpha_d) \circ (G \circ F)(\eta^{-1}_{G(d)}) \circ (G \circ F)\big(G(\alpha^{-1}_d)\big) \circ \eta_{G(d)} && \text{(Def. comp. de funct.)}\\
&\quad= G(\alpha_d) \circ (G \circ F)(\eta^{-1}_{G(d)}) \circ \Big((G \circ F)\big(G(\alpha^{-1}_d)\big) \circ \eta_{G(d)}\Big) && \text{(Ass. de la comp.)}\\
&\quad= G(\alpha_d) \circ (G \circ F)(\eta^{-1}_{G(d)}) \circ \Big(\eta_{(G\circ F)(G(d))} \circ \mathrm{Id}_{\mathsf{C}}\big(G(\alpha^{-1}_d)\big)\Big) && \text{(Cond. de nat. de η)}\\
&\quad= G(\alpha_d) \circ (G \circ F)(\eta^{-1}_{G(d)}) \circ \big(\eta_{(G\circ F)(G(d))} \circ G(\alpha^{-1}_d)\big) && \text{(Def. de Id_{C})}\\
&\quad= G(\alpha_d) \circ \big((G \circ F)(\eta^{-1}_{G(d)}) \circ \eta_{(G\circ F)(G(d))}\big) \circ G(\alpha^{-1}_d) && \text{(Ass. de la comp.)}\\
&\quad= G(\alpha_d) \circ \big(\eta_{G(d)} \circ \mathrm{Id}_{\mathsf{C}}(\eta^{-1}_{G(d)})\big) \circ G(\alpha^{-1}_d) && \text{(Cond. de nat. de η)}\\
&\quad= G(\alpha_d) \circ (\eta_{G(d)} \circ \eta^{-1}_{G(d)}) \circ G(\alpha^{-1}_d) && \text{(Def. de Id_{C})}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= G(\alpha_d) \circ \mathrm{id}_{(G\circ F)(G(d))} \circ G(\alpha_d^{-1}) && \text{(Def. de morf. invers)}\\
&= G(\alpha_d) \circ G(\alpha_d^{-1}) && (\text{Def. de } \mathrm{id}_{(G\circ F)(G(d))})\\
&= G(\alpha_d \circ \alpha_d^{-1}) && (G \text{ functor})\\
&= G\big(\mathrm{id}_{\mathrm{Id}_{\mathsf{D}}(d)}\big) && \text{(Def. de morf. invers)}\\
&= G(\mathrm{id}_d) && (\text{Def. de } \mathrm{Id}_{\mathsf{D}})\\
&= \mathrm{id}_{G(d)}, && (G \text{ functor})
\end{aligned}
$$

com volíem veure. Abans de comprovar la segona identitat, fem una observació que ens facilitarà el treball. Veurem que

$$\eta^{-1}_{(G\circ F)(c)} = (G\circ F)(\eta_c^{-1}).$$

De la següent cadena d'igualtats:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{id}_{(G\circ F)(c)} &= \eta_c \circ \eta_c^{-1} && \text{(Def. de morf. inv.)}\\
&= \mathrm{Id}_{\mathsf{C}}(\eta_c) \circ \eta_c^{-1} && (\text{Def. de } \mathrm{Id}_{\mathsf{C}})\\
&= \eta^{-1}_{(G\circ F)(c)} \circ (G\circ F)(\eta_c), && (\text{Cond. de naturalitat de } \eta^{-1})
\end{aligned}
$$

component per la dreta amb $(G\circ F)(\eta_c)^{-1}$, arribem on volíem. Estem en condicions de passar a comprovar la primera identitat.

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{F(c)} \circ F(\eta_c)\\
&\quad= \Big(\alpha_{F(c)} \circ F\Big(\big(G(\alpha_{F(c)}) \circ \eta_{G(F(c))}\big)^{-1}\Big)\Big) \circ F(\eta_c) && (\text{Def. de } \varepsilon)\\
&\quad= \Big(\alpha_{F(c)} \circ F\Big(\big(G(\alpha_{F(c)}) \circ \eta_{(G\circ F)(c)}\big)^{-1}\Big)\Big) \circ F(\eta_c) && \text{(Def. comp. de funct.)}\\
&\quad= \Big(\alpha_{F(c)} \circ F\big(\eta^{-1}_{(G\circ F)(c)} \circ G(\alpha_{F(c)})^{-1}\big)\Big) \circ F(\eta_c) && \text{(Inv. comp. d'isom.)}\\
&\quad= \Big(\alpha_{F(c)} \circ F(\eta^{-1}_{(G\circ F)(c)}) \circ F\big(G(\alpha_{F(c)})^{-1}\big)\Big) \circ F(\eta_c) && (F \text{ functor})\\
&\quad= \Big(\alpha_{F(c)} \circ F(\eta^{-1}_{(G\circ F)(c)}) \circ (F\circ G)(\alpha_{F(c)})^{-1}\Big) \circ F(\eta_c) && \text{(Def. comp. de funct.)}\\
&\quad= \Big(\alpha_{F(c)} \circ F\big((G\circ F)(\eta_c^{-1})\big) \circ (F\circ G)(\alpha_{F(c)})^{-1}\Big) \circ F(\eta_c) && \text{(Observació)}\\
&\quad= \Big(\alpha_{F(c)} \circ (F\circ G)\big(F(\eta_c^{-1})\big) \circ (F\circ G)(\alpha_{F(c)})^{-1}\Big) \circ F(\eta_c) && \text{(Ass. comp. funct.)}\\
&\quad= \Big(\alpha_{F(c)} \circ (F\circ G)\big(F(\eta_c^{-1})\big)\Big) \circ (F\circ G)(\alpha_{F(c)})^{-1} \circ F(\eta_c) && \text{(Ass. de la comp.)}\\
&\quad= \Big(\mathrm{Id}_{\mathsf{D}}\big(F(\eta_c^{-1})\big) \circ \alpha_{(F\circ G)(F(c))}\Big) \circ (F\circ G)(\alpha_{F(c)})^{-1} \circ F(\eta_c) && (\text{Cond. nat. de } \alpha)\\
&\quad= \big(F(\eta_c^{-1}) \circ \alpha_{(F\circ G)(F(c))}\big) \circ (F\circ G)(\alpha_{F(c)})^{-1} \circ F(\eta_c) && (\text{Def. de } \mathrm{Id}_{\mathsf{D}})\\
&\quad= F(\eta_c^{-1}) \circ \big(\alpha_{(F\circ G)(F(c))} \circ (F\circ G)(\alpha_{F(c)})^{-1}\big) \circ F(\eta_c) && \text{(Ass. de la comp.)}\\
&\quad= F(\eta_c^{-1}) \circ \big(\mathrm{Id}_{\mathsf{D}}(\alpha^{-1}_{F(c)}) \circ \alpha_{F(c)}\big) \circ F(\eta_c) && (\text{Cond. de nat. de } \alpha)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= F(\eta_c^{-1}) \circ (\alpha_{F(c)}^{-1} \circ \alpha_{F(c)}) \circ F(\eta_c) && (\text{Def. de } \mathrm{Id}_{\mathsf{D}}) \\
&= F(\eta_c^{-1}) \circ \mathrm{id}_{(F\circ G)(F(c))} \circ F(\eta_c) && (\text{Def. de morf. inv.}) \\
&= F(\eta_c^{-1}) \circ F(\eta_c) && (\text{Def. de } \mathrm{id}_{(F\circ G)(F(c))}) \\
&= F(\eta_c^{-1} \circ \eta_c) && (F \text{ functor} \\
&= F(\mathrm{id}_{\mathrm{Id}_{\mathsf{C}}(c)}) && (\text{Def. de morf. inv.}) \\
&= F(\mathrm{id}_c) && (\text{Def. de } \mathrm{Id}_{\mathsf{C}}) \\
&= \mathrm{id}_{F(c)}. && (F \text{ functor})
\end{aligned}
$$

Queden, doncs, provades ambdues identitats triangulars i, amb elles, que $(\mathsf{C}, \mathsf{D}, F, G, \eta, \varepsilon)$ constituïx una adjunció. □

La majoria d'autors estan d'acord, i així ho expliciten als seus llibres, que l'adjunció és l'aportació més rellevant i transversal de la teoria de categories a les matemàtiques. Com indicava la cita de Mac Lane que obria esta secció, les adjuncions sorgixen arreu en moltes branques de la disciplina. No obstant això, la seua formalització va tardar a arribar, ja que la noció de parell de functors adjunts no va ser descrita per primera vegada fins a l'any 1958 per Daniel Kan.

La terminologia prové del concepte d'operador adjunt en els espais de Hilbert. En este context, l'adjunt T^* d'una transformació lineal T en un espai H es definix mitjançant la igualtat dels productes interns

$$\langle T^* x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$$

per a tots els vectors $x, y \in H$. Existix una analogia formal directa amb la caracterització de l'adjunció en termes de l'isomorfisme natural de conjunts de morfismes (vegeu l'apartat 3 del Teorema 4.3), on el functor F "canvia de costat" per a esdevindre G. És precisament esta similitud la que justifica l'adopció del terme "adjunt" en l'àmbit de les categories.

Ja hem analitzat en profunditat l'adjunció entre el functor d'oblit i la construcció del monoide lliure —que ens ha servit com a model intuïtiu—. Traslladem ara este estudi a l'altra situació estructural que ha vertebrat el present treball i ha motivat en primera instància la introducció del concepte d'adjunció. Ens referim a la relació existent entre la categoria dels monoides, Mon, i la categoria de categories amb un únic objecte Cat_*. En concret, estudiarem la següent situació:

$$\mathsf{Mon} \underset{\mathrm{End}_*}{\overset{\mathbf{C}_*}{\rightleftarrows}} \mathsf{Cat}_*.$$

Per ara, en la Nota 2.21, hem demostrat que es complix la identitat

$$\mathrm{End}_* \circ \mathbf{C}_* = \mathrm{Id}_{\mathsf{Mon}}$$

i hem definit, als Exemples 3.5 i 3.6, les transformacions naturals

$$\Gamma\colon \mathbf{C}_* \circ \mathrm{End}_* \Longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathsf{Cat}_*}, \quad K\colon \mathrm{Id}_{\mathsf{Cat}_*} \Longrightarrow \mathbf{C}_* \circ \mathrm{End}_*.$$

Com ja vam comprovar, ni Γ ni K són isomorfismes naturals. Este fet no resulta sorprenent si considerem la impossibilitat d'establir una equivalència entre Set i Cat_*: d'existir dita equivalència, els seus esquelets haurien de ser isomorfs, la qual cosa implicaria —absurdament— que qualsevol categoria puntejada hauria de ser isomorfa a una categoria amb un únic objecte.

Davant d'este escenari, passem a buscar relacions d'adjunció entre $\mathbf{C}_*$ i End_*. La igualtat a la identitat obtinguda anteriorment ens proporciona automàticament la transformació natural identitat que utilitzarem per a completar les nostres adjuncions.

Exemple 4.6. Comprovarem primer que $(\mathsf{Cat}_*, \mathsf{Mon}, \mathrm{End}_*, \mathbf{C}_*, K, \mathrm{id}_{\mathrm{Id}_{\mathsf{Mon}}})$ no constituïx una adjunció. Per veure-ho procedirem per reducció a l'absurd: suposem que es tracta d'una adjunció i considerem una categoria puntejada (C, c) tal que $\mathrm{End}_{\mathsf{C}}(c) \setminus \{\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}\} \neq \emptyset$. S'ha de complir la primera identitat triangular

$$\mathrm{id}_{\mathrm{End}_*(\mathsf{C},c)} = (\mathrm{id}_{\mathrm{Id}_{\mathsf{Mon}}})_{\mathrm{End}_*(\mathsf{C},c)} \circ \mathrm{End}_*(K_{(\mathsf{C},c)})$$

o, equivalentment,

$$\mathrm{id}_{\mathbf{End}_{\mathsf{C}}(c)} = \mathrm{id}_{\mathbf{End}_{\mathsf{C}}(c)} \circ \mathrm{End}_*(K_{\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}}) = \mathrm{End}_*(K_{\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}}).$$

Siga $f \in \mathrm{End}_{\mathsf{C}}(c)$, $f \neq \mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}$. Aleshores,

$$\begin{aligned}
\mathrm{End}_*(K_{\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}})(f) &= K_{\mathrm{id}_c^{\mathsf{C}}}(f) && \text{(Def. de } \mathrm{End}_*\text{)}\\
&= \mathrm{id}_c^{\mathsf{C}} && \text{(Def. de } K\text{)}\\
&\neq f && \text{(Per la tria de } f\text{)}\\
&= \mathrm{id}_{\mathbf{End}_{\mathsf{C}}(c)}(f), && \text{(Def. de } \mathrm{id}_{\mathbf{End}_{\mathsf{C}}(c)}\text{)}
\end{aligned}$$

i tenim una contradicció.

Exemple 4.7. Passem ara, en canvi, a veure que $(\mathsf{Mon}, \mathsf{Cat}_*, \mathbf{C}_*, \mathrm{End}_*, \mathrm{id}_{\mathrm{Id}_{\mathsf{Mon}}}, \Gamma)$ sí constituïx una adjunció. Per a verificar-ho, només cal comprovar si $\mathrm{id}_{\mathrm{Id}_{\mathsf{Mon}}}$, com a unitat, i Γ, com a counitat, satisfan les identitats triangulars. Per la Nota 4.1, hem de veure que, per a tot monoide $\mathbf{M} = (M, \bullet, e)$ i per a tota categoria puntejada (C, c),

$$\mathrm{id}_{\mathbf{C}_*(\mathbf{M})} = \Gamma_{\mathbf{C}_*(\mathbf{M})} \circ \mathbf{C}_*(\mathrm{id}_{\mathrm{Id}_{\mathsf{Mon}}(\mathbf{M})}), \quad \mathrm{id}_{\mathrm{End}_*(\mathsf{C},c)} = \mathrm{End}_*(\Gamma_{(\mathsf{C},c)}) \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{Id}_{\mathsf{Mon}}})_{\mathrm{End}_*(\mathsf{C},c)}$$

o, equivalentment,

$$\mathrm{id}_{(\mathsf{M},e)} = \Gamma_{(\mathsf{M},e)} \circ \mathbf{C}_*(\mathrm{id}_{\mathbf{M}}), \quad \mathrm{id}_{\mathbf{End}_{\mathsf{C}}(c)} = \mathrm{End}_*(\Gamma_{(\mathsf{C},c)}) \circ \mathrm{id}_{\mathbf{End}_{\mathsf{C}}(c)}.$$

Comencem per la primera igualtat. Notem que

$$\mathbf{C}_*(\mathbf{M}) = (\mathsf{M}, e)$$

i, per altra banda, que

$$(\mathbf{C}_* \circ \mathrm{End}_* \circ \mathbf{C}_*)(\mathbf{M}) = (\mathbf{C}_* \circ \mathrm{Id}_{\mathsf{Mon}})(\mathbf{M}) = \mathbf{C}_*(\mathbf{M}) = (\mathsf{M}, e).$$

Així, la composició actua de la següent manera:

$$(\mathsf{M}, e) \xrightarrow{\mathbf{C}_*(\mathrm{id}_{\mathbf{M}})} (\mathsf{M}, e) \xrightarrow{\Gamma_{(\mathsf{M},e)}} (\mathsf{M}, e).$$

Veiem com actuen $\mathrm{id}_{(\mathsf{M},e)}$ i $\Gamma_{(\mathsf{M},e)} \circ \mathbf{C}_*(\mathrm{id}_{\mathbf{M}})$ sobre l'únic objecte i els morfismes en (M, e). Pel que fa a l'objecte:

$$\begin{aligned}
\big(\Gamma_{(\mathsf{M},e)} \circ \mathbf{C}_*(\mathrm{id}_{\mathbf{M}})\big)(e) &= \Gamma_{(\mathsf{M},e)}\big(\mathbf{C}_*(\mathrm{id}_{\mathbf{M}})(e)\big) && \text{(Def. comp. functors)}\\
&= \Gamma_{(\mathsf{M},e)}(e) && \text{(Def. de } \mathbf{C}_*)\\
&= e && \text{(Def. de } \Gamma)\\
&= \mathrm{id}_{(\mathsf{M},e)}(e). && \text{(Def. de } \mathrm{id}_{(\mathsf{M},e)})
\end{aligned}$$

Siga ara m morfisme en (M, e). Aleshores:

$$\begin{aligned}
\big(\Gamma_{(\mathsf{M},e)} \circ \mathbf{C}_*(\mathrm{id}_{\mathbf{M}})\big)(m) &= \Gamma_{(\mathsf{M},e)}\big(\mathbf{C}_*(\mathrm{id}_{\mathbf{M}})(m)\big) && \text{(Def. comp. functors)}\\
&= \Gamma_{(\mathsf{M},e)}\big(\mathrm{id}_{\mathbf{M}}(m)\big) && \text{(Def. de } \mathbf{C}_*)\\
&= \Gamma_{(\mathsf{M},e)}(m) && \text{(Def. de } \mathrm{id}_{\mathbf{M}})\\
&= m && \text{(Def. de } \Gamma)\\
&= \mathrm{id}_{(\mathsf{M},e)}(m). && \text{(Def. de } \mathrm{id}_{(\mathsf{M},e)})
\end{aligned}$$

Per tant, es complix la primera igualtat triangular. Procedim amb la segona. Esta vegada tenim, per una banda,

$$\mathrm{End}_*(\mathsf{C}, c) = \mathbf{End}_{\mathsf{C}}(\boldsymbol{c})$$

i, per altra banda, que

$$(\mathrm{End}_* \circ \mathbf{C}_* \circ \mathrm{End}_*)(\mathsf{C}, c) = (\mathrm{Id}_{\mathsf{Mon}} \circ \mathrm{End}_*)(\mathsf{C}, c) = \mathrm{End}_*(\mathsf{C}, c) = \mathbf{End}_{\mathsf{C}}(\boldsymbol{c}).$$

Així, la composició actua de la següent manera:

$$\mathbf{End}_{\mathsf{C}}(\boldsymbol{c}) \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbf{End}_{\mathsf{C}}(\boldsymbol{c})}} \mathbf{End}_{\mathsf{C}}(\boldsymbol{c}) \xrightarrow{\mathrm{End}_*(\Gamma_{(\mathsf{C},c)})} \mathbf{End}_{\mathsf{C}}(\boldsymbol{c}).$$

Veiem com actuen $\mathrm{id}_{\mathbf{End}_{\mathsf{C}}(\boldsymbol{c})}$ i $\mathrm{End}_*(\Gamma_{(\mathsf{C},c)}) \circ \mathrm{id}_{\mathbf{End}_{\mathsf{C}}(\boldsymbol{c})}$ sobre els elements de $\mathbf{End}_{\mathsf{C}}(\boldsymbol{c})$. Siga $f \in \mathrm{End}_{\mathsf{C}}(c)$. Trobem que

$$\begin{aligned}
\big(\mathrm{End}_*(\Gamma_{(\mathsf{C},c)}) \circ \mathrm{id}_{\mathbf{End}_{\mathsf{C}}(\boldsymbol{c})}\big)(f) &= \mathrm{End}_*(\Gamma_{(\mathsf{C},c)})\big(\mathrm{id}_{\mathbf{End}_{\mathsf{C}}(\boldsymbol{c})}(f)\big) && \text{(Def. composició)}\\
&= \mathrm{End}_*(\Gamma_{(\mathsf{C},c)})(f) && \text{(Def. de } \mathrm{id}_{\mathbf{End}_{\mathsf{C}}(\boldsymbol{c})})\\
&= \Gamma_{(\mathsf{C},c)}(f) && \text{(Def. de } \mathrm{End}_*)\\
&= f && \text{(Def. de } \Gamma)\\
&= \mathrm{id}_{\mathbf{End}_{\mathsf{C}}(\boldsymbol{c})}(f). && \text{(Def. de } \mathrm{id}_{\mathbf{End}_{\mathsf{C}}(\boldsymbol{c})})
\end{aligned}$$

Per tant, es complix la segona identitat triangular. Concloem així que hem trobat una adjunció $(\mathsf{Mon}, \mathsf{Cat}_*, \mathbf{C}_*, \mathrm{End}_*, \mathrm{id}_{\mathrm{Id}_{\mathsf{Mon}}}, \Gamma)$.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Mon} \arrow[r, shift left=2, "\mathbf{C}_*"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{Cat}_* \arrow[l, shift left=2, "\mathrm{End}_*"] \end{tikzcd}$$

4.2.1 Composició d'adjuncions

Els resultats obtinguts fins ara ens permeten visualitzar una seqüència de functors adjunts que connecta estructures de complexitat creixent: des dels conjunts fins a les categories, passant pels monoides. Esta situació es pot esquematitzar en el següent diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Set} \arrow[r, shift left=2, "(\bullet)^*"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{Mon} \arrow[l, shift left=2, "U"] \arrow[r, shift left=2, "\mathbf{C}_*"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{Cat}_* \arrow[l, shift left=2, "\mathrm{End}_*"] \end{tikzcd}$$

Esta cadena de relacions suggerix de manera natural la possibilitat de combinar ambdues adjuncions per a establir una connexió directa entre Set i Cat_*. El següent resultat introduïx la idea d'una *composició d'adjuncions*. Donarem dues proves: una primera més senzilla i intuïtiva i una segona que ens permetrà formalitzar el concepte.

Teorema 4.4. *Si* $\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, shift left=2, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{D} \arrow[l, shift left=2, "G"] \end{tikzcd}$ *i* $\begin{tikzcd} \mathsf{D} \arrow[r, shift left=2, "H"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{E} \arrow[l, shift left=2, "K"] \end{tikzcd}$*, aleshores* $\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, shift left=2, "H \circ F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{E} \arrow[l, shift left=2, "G \circ K"] \end{tikzcd}$.

Demostració 1. Pel Teorema 4.3, tenim, per una banda,

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(\bullet, \bullet) \circ (F^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Id}_{\mathsf{D}}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(\bullet, \bullet) \circ (\mathrm{Id}_{\mathsf{C}}^{\mathrm{op}} \times G)$$

i per una altra,

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{E}}(\bullet, \bullet) \circ (H^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Id}_{\mathsf{E}}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(\bullet, \bullet) \circ (\mathrm{Id}_{\mathsf{D}}^{\mathrm{op}} \times K).$$

Fent ús de la transitivitat de la isomorfia, i el fet que la composició de functors preserva esta relació (vegeu Nota 3.4), trobem

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{\mathsf{E}}(\bullet,\bullet) \circ \big((H \circ F)^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Id}_{\mathsf{E}}\big) \\
&\qquad = \mathrm{Hom}_{\mathsf{E}}(\bullet,\bullet) \circ \big((H^{\mathrm{op}} \circ F^{\mathrm{op}}) \times \mathrm{Id}_{\mathsf{E}}\big) && ((\,\bullet\,)^{\mathrm{op}} \text{ functor}) \\
&\qquad = \mathrm{Hom}_{\mathsf{E}}(\bullet,\bullet) \circ \big((H^{\mathrm{op}} \circ F^{\mathrm{op}}) \times (\mathrm{Id}_{\mathsf{E}} \circ \mathrm{Id}_{\mathsf{E}})\big) && (\text{Def. de functor identitat}) \\
&\qquad = \mathrm{Hom}_{\mathsf{E}}(\bullet,\bullet) \circ (H^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Id}_{\mathsf{E}}) \circ (F^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Id}_{\mathsf{E}}) && (\text{Def. de composició en } \mathsf{Cat} \times \mathsf{Cat}) \\
&\qquad \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(\bullet,\bullet) \circ (\mathrm{Id}_{\mathsf{D}}^{\mathrm{op}} \times K) \circ (F^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Id}_{\mathsf{E}}) && (H \dashv K) \\
&\qquad = \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(\bullet,\bullet) \circ \big((\mathrm{Id}_{\mathsf{D}}^{\mathrm{op}} \circ F^{\mathrm{op}}) \times (K \circ \mathrm{Id}_{\mathsf{E}})\big) && (\text{Def. de composició en } \mathsf{Cat} \times \mathsf{Cat}) \\
&\qquad = \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(\bullet,\bullet) \circ \big((F^{\mathrm{op}} \circ \mathrm{Id}_{\mathsf{C}}^{\mathrm{op}}) \times (\mathrm{Id}_{\mathsf{D}} \circ K)\big) && (\text{Def. de functor identitat}) \\
&\qquad = \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(\bullet,\bullet) \circ (F^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Id}_{\mathsf{D}}) \circ (\mathrm{Id}_{\mathsf{C}}^{\mathrm{op}} \times K) && (\text{Def. composició en } \mathsf{Cat} \times \mathsf{Cat}) \\
&\qquad \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(\bullet,\bullet) \circ (\mathrm{Id}_{\mathsf{C}}^{\mathrm{op}} \times G) \circ (\mathrm{Id}_{\mathsf{C}}^{\mathrm{op}} \times K) && (F \dashv G) \\
&\qquad = \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(\bullet,\bullet) \circ \big((\mathrm{Id}_{\mathsf{C}}^{\mathrm{op}} \circ \mathrm{Id}_{\mathsf{C}}^{\mathrm{op}}) \times (G \circ K)\big) && (\text{Def. de composició en } \mathsf{Cat} \times \mathsf{Cat}) \\
&\qquad = \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(\bullet,\bullet) \circ \big(\mathrm{Id}_{\mathsf{C}}^{\mathrm{op}} \times (G \circ K)\big). && (\text{Def. de functor identitat})
\end{aligned}
$$

Concloem, doncs, que $H \circ F \dashv G \circ K$. □

Demostració 2. Com $F \dashv G$, existix un parell de transformacions naturals $\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathsf{C}} \Longrightarrow G \circ F$ i $\varepsilon\colon F \circ G \Longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathsf{D}}$ que satisfan les identitats triangulars. De la mateixa manera, com $H \dashv K$, existixen altres dues transformacions naturals $\eta'\colon \mathrm{Id}_{\mathsf{D}} \Longrightarrow K \circ H$ i $\varepsilon'\colon H \circ K \Longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathsf{E}}$ satisfent també les identitats triangulars. A partir d'estes transformacions naturals, en definim dues de noves:

$$\eta'' := (\mathrm{id}_G * \eta' * \mathrm{id}_F) \circ \eta\colon \mathrm{Id}_{\mathsf{C}} \Longrightarrow G \circ F \Longrightarrow G \circ K \circ H \circ F,$$

$$\varepsilon'' := \varepsilon' \circ (\mathrm{id}_H * \varepsilon * \mathrm{id}_K)\colon H \circ F \circ G \circ K \Longrightarrow H \circ K \Longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathsf{E}}.$$

Per demostrar que $H \circ F \dashv G \circ K$ només cal demostrar que η'' i ε'' satisfan les identitats triangulars. Considerem, així, el diagrama següent:

$$
\begin{tikzcd}
HF \arrow[r, Rightarrow, "HF\eta"] \arrow[dr, Rightarrow, "\mathrm{id}_{HF}"'] & HFGF \arrow[r, Rightarrow, "HFG\eta' F"] \arrow[d, Rightarrow, "H\varepsilon F"] & HFGKHF \arrow[d, Rightarrow, "H\varepsilon KHF"] \\
 & HF \arrow[r, Rightarrow, "H\eta' F"] \arrow[dr, Rightarrow, "\mathrm{id}_{HF}"'] & HKHF \arrow[d, Rightarrow, "\varepsilon' HF"] \\
 & & HF
\end{tikzcd}
$$

Notació 4.1. Per no sobrecarregar visualment el diagrama, hem decidit emprar la notació GF per indicar composició de functors $G \circ F$. Hem escrit, també per juxtaposició, $G\eta F$ per indicar composició horitzontal $\mathrm{id}_G * \eta * \mathrm{id}_F$. Ambdues són notacions estàndard en la literatura.

Component horitzontalment per l'esquerra la identitat triangular $(\varepsilon * \mathrm{id}_F) \circ (\mathrm{id}_F * \eta) = \mathrm{id}_F$ amb id_H i usant que $\mathrm{id}_H * \mathrm{id}_F = \mathrm{id}_{H \circ F}$, obtenim que el triangle de dalt commuta. Component horitzontalment per la dreta la identitat triangular $(\varepsilon' * \mathrm{id}_H) \circ (\mathrm{id}_H * \eta') = \mathrm{id}_H$ amb id_F obtenim que el triangle de baix commuta també. Per la naturalitat, bé de ε o bé de η', el següent diagrama commuta:

$$\begin{tikzcd}
FG \arrow[r, Rightarrow, "FG\eta'"] \arrow[d, Rightarrow, "\varepsilon"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & FGKH \arrow[d, Rightarrow, "\varepsilon KH"] \\
\mathrm{Id}_{\mathsf{D}} \arrow[r, Rightarrow, "\eta'"'] & KH
\end{tikzcd}$$

Component horitzontalment amb id_H per l'esquerra i id_F per la dreta, obtenim que el quadrat en el diagrama gran també commuta. Així, tot el diagrama gran commuta i, en particular, també ho fa el triangle exterior. Això ens diu que

$$(\varepsilon'' * \mathrm{id}_{H \circ F}) \circ (\mathrm{id}_{H \circ F} * \eta'') = \mathrm{id}_{H \circ F},$$

que és una de les identitats triangulars per a η'' i ε''. L'altra identitat s'obté de forma similar. $\square$

A partir de la segona demostració del Teorema anterior, derivem la definició formal de composició d'adjuncions:

Definició 4.4. Donades dues adjuncions $(\mathsf{C}, \mathsf{D}, F, G, \eta, \varepsilon)$ i $(\mathsf{D}, \mathsf{E}, H, K, \eta', \varepsilon')$, definim la seua composició com l'adjunció

$$\big(\mathsf{C}, \mathsf{E}, H \circ F, G \circ K, (\mathrm{id}_G * \eta' * \mathrm{id}_F) \circ \eta, \varepsilon' \circ (\mathrm{id}_H * \varepsilon * \mathrm{id}_K)\big).$$

Exemple 4.8. A partir dels resultats exposats, s'establix la següent adjunció:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Set} \arrow[r, shift left, "\mathbf{C}_* \circ (\,\bullet\,)^*"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{Cat}_*. \arrow[l, shift left, "U \circ \mathrm{End}_*"]
\end{tikzcd}$$

Esta adjunció, més enllà de ser un simple corol·lari, proporciona un resultat potent que s'evidencia en avaluar la bijecció canònica entre els conjunts de morfismes:

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Cat}_*}\big(\mathbf{C}_*(\mathbf{X}^*), (\mathsf{C}, c)\big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}\big(X, U(\mathbf{End}_{\mathsf{C}}(\boldsymbol{c}))\big).$$

El membre de l'esquerra descriu objectes, a priori, complexos: functors puntejats des de la categoria induïda per un monoide lliure cap a una categoria puntejada qualsevol. Construir un d'estos functors manualment exigiria assignar imatges per a infinits morfismes i comprovar que es preserva tota l'estructura categòrica. No obstant això, el membre de la dreta reduïx este problema a una simple aplicació de conjunts. D'esta manera, l'adjunció garantix que, per a determinar completament eixe functor, n'hi ha prou amb triar un endomorfisme en la categoria d'arribada per a cada element del conjunt generador X. Esta capacitat de convertir la complexitat estructural en eleccions elementals il·lustra perfectament la utilitat de les adjuncions.

Abans de donar pas a les conclusions, resulta convenient oferir una visió panoràmica del mapa de relacions estructurals que hem anat dibuixant al llarg del treball. A la pàgina següent es presenta un diagrama global on es recullen totes les categories que hem estudiat, juntament amb els functors, adjuncions, equivalències i isomorfismes que les relacionen.

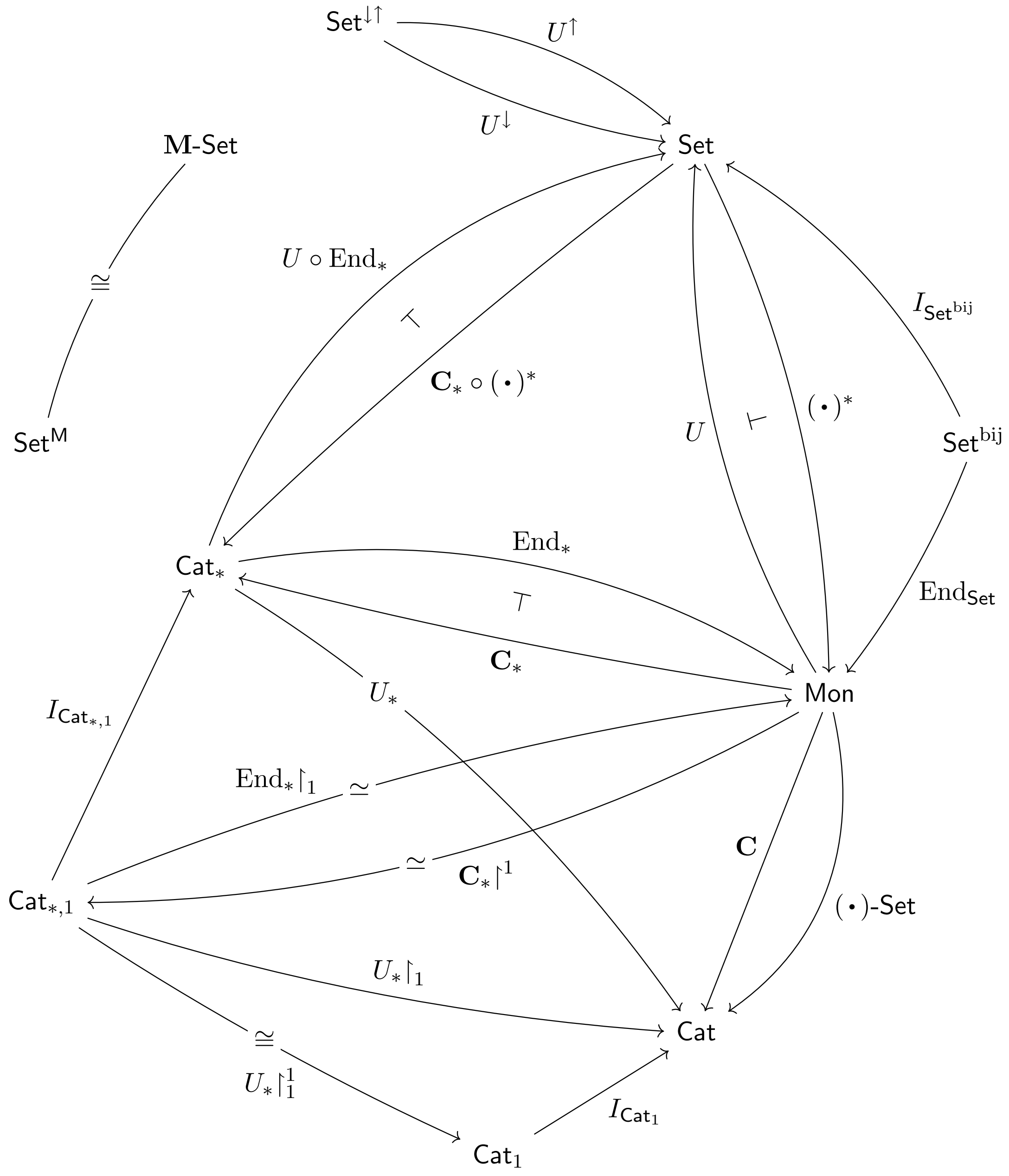

Figura 4.1: Relacions categorials estudiades.

Conclusions

Al llarg d'este treball ens hem endinsat en la teoria de categories i hem pogut comprovar les estretes relacions que esta manté amb la teoria de monoides. Si bé és cert que els monoides ens han servit inicialment com un camp de prova idoni per a contextualitzar i aterrar conceptes categorials de primera aproximació difícil, el desenvolupament del text ens ha portat molt més enllà d'este propòsit didàctic. L'anàlisi ens ha revelat que la connexió entre ambdues teories posseïx un caràcter profundament estructural. Així, hem transcendit la simple reinterpretació de resultats per a construir i formalitzar un entramat rigorós de functors, adjuncions i equivalències que connecten els universos de Set, Mon i Cat.

A nivell personal, este treball m'ha permès satisfer una inquietud intel·lectual que portava arrossegant molt de temps i m'ha obert la porta a seguir aprofundint en un camp que ha superat totes les meues expectatives i m'ha dotat d'una visió global de les matemàtiques, no només enriquidora en el pla teòric, sinó també exportable a molts altres àmbits i, fins i tot, a la meua quotidianitat.

Tot i ser un treball introductori, molts conceptes bàsics importants de la teoria de categories s'han hagut de deixar fora per raons de brevetat i claredat expositiva però ara disposem de les ferramentes necessàries per poder abordar estes i moltes altres qüestions més complexes que constituïxen una continuació natural d'este text per a qualsevol lector que vulga aprofundir en este camp. A este efecte, suggerisc la lectura dels llibres introductoris *Basic Category Theory*, de Tom Leinster [14]; *Abstract and Concrete Categories - The Joy of Cats*, de Jiří Adámek, Horst Herrlich i George E. Strecker [1]; *Category Theory*, de Steve Awodey [3]; *Introducing Category Theory*, de Peter Smith [29], i, per descomptat, *Categories for the Working Mathematician*, de Saunders Mac Lane [15]. Tots estos treballs han sigut, en major o menor mesura, una part fonamental en l'elaboració d'este text.

Bibliografia

[1] Adámek, Jiří, Herrlich, Horst i Strecker, George E.: *Abstract and Concrete Categories: The Joy of Cats*. John Wiley & Sons, online edition edició, 2009. http://katmat.math.uni-bremen.de/acc, Disponible a http://katmat.math.uni-bremen.de/acc.

[2] Aluffi, Paolo: *Algebra: Chapter 0*, volum 104 de *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2009, ISBN 978-0-8218-4781-7.

[3] Awodey, Steve: *Category Theory*, volum 52 de *Oxford Logic Guides*. Oxford University Press, Oxford, 2a edició, 2010, ISBN 978-0-19-923718-0.

[4] Berci: *The opposite functor*. Mathematics Stack Exchange, 2012. https://math.stackexchange.com/q/235274. [Consultat el 30 de novembre de 2025].

[5] Brandenburg, Martin: *Constant functor*. Mathematics Stack Exchange, 2014. https://math.stackexchange.com/q/638183. [Consultat el 1 de desembre de 2025].

[6] Climent Vidal, Juan, Cosme Llópez, Enric i Ruiz Mora, Raúl: *Riguet congruences, Generalized congruences and Free monoids*. Preprint arXiv:2505.15767v4 [math.CT]. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2505.15767. [Consultat el 21 de febrer de 2026], 2026.

[7] Cyphert, John: *Notes on Category Theory: Functors*. Pàgina web personal de la University of Wisconsin-Madison, 2019. Disponible a: https://pages.cs.wisc.edu/~jcyphert/categoryTheoryNotes/basics/2_Functors.pdf. [Consultat el 1 de desembre de 2025].

[8] Cyphert, John: *Notes on Category Theory: Natural Transformations*. Pàgina web personal de la University of Wisconsin-Madison, 2019. Disponible a: https://pages.cs.wisc.edu/~jcyphert/categoryTheoryNotes/basics/3_NaturalTransformations.pdf. [Consultat el 21 de febrer de 2026].

[9] Eilenberg, Samuel i Mac Lane, Saunders: *General Theory of Natural Equivalences*. Transactions of the American Mathematical Society, 58(2):231–294, sep 1945. https://www.jstor.org/stable/1990284.

[10] Escrihuela Peñarrocha, Altaïr: *Adjuncions.* Treball de Final de Grau, Universitat de València, València, 2025. Disponible a: `https://www.uv.es/coslloen/Arxiu/Fitxers/TFG/2025Escrihuela.pdf`.

[11] Howie, John M.: *Fundamentals of Semigroup Theory*, volum 12 de *London Mathematical Society Monographs, New Series.* Clarendon Press, Oxford, 1995, ISBN 978-0-19-851194-6.

[12] Kamsma, Mark: *Trying to understand proof of interchange law of natural transformation composition.* Mathematics Stack Exchange, 2020. `https://math.stackexchange.com/q/3597457`. [Consultat el 21 de febrer de 2026].

[13] Lawvere, Francis William i Schanuel, Stephen Hoel: *Matemáticas Conceptuales: Una primera introducción a categorías.* Cambridge University Press, Cambridge, 2a edició, 2015.

[14] Leinster, Tom: *Basic Category Theory*, volum 143 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 2014, ISBN 978-1-107-04424-1. Versió d'arXiv:1612.09375 [math.CT].

[15] Mac Lane, Saunders: *Categories for the Working Mathematician.* Springer, New York, 2a edició, 1998.

[16] Marquis, Jean Pierre: *Category Theory.* Dins Zalta, Edward N. i Uri Nodelman (editors): *The Stanford Encyclopedia of Philosophy.* Metaphysics Research Lab, Stanford University, spring 2026 edició, 2026. Disponible a: `https://plato.stanford.edu/archives/spr2026/entries/category-theory/`. [Consultat el 27 de novembre de 2025].

[17] Mazur, Barry: *When is one thing equal to some other thing?* jun 2007. `https://people.math.osu.edu/cogdell.1/6112-Mazur-www.pdf`, In memory of Saunders Mac Lane.

[18] New, Max S.: *Lecture 19: Equivalence of Categories.* Pàgina web personal de la University of Michigan, 2023. Disponible a: `https://maxsnew.com/teaching/eecs-598-w23/docs/03-22-notes.pdf`. [Consultat el 15 de març de 2026].

[19] nLab authors: *Understanding M-Set.* nLab, 2013. Revision 8. Disponible a: `https://ncatlab.org/nlab/show/Understanding+M-Set`. [Consultat el 11 de març de 2026].

[20] nLab authors: *empty category.* nLab, 2019. Revision 4. Disponible a: `https://ncatlab.org/nlab/show/empty+category`. [Consultat el 25 de març de 2026].

[21] nLab authors: *terminal category.* nLab, 2020. Revision 13. Disponible a: `https://ncatlab.org/nlab/show/terminal+category`. [Consultat el 24 de febrer de 2026].

[22] nLab authors: *endomorphism.* nLab, 2023. Revision 14. Disponible a: `https://ncatlab.org/nlab/show/endomorphism`. [Consultat el 13 de març de 2026].

[23] nLab authors: *free monoid.* nLab, 2024. Revision 35. Disponible a: `https://ncatlab.org/nlab/revision/free+monoid/35`. [Consultat el 21 de febrer de 2026].

[24] nLab authors: *subcategory.* nLab, 2024. Revision 36. Disponible a: `https://ncatlab.org/nlab/show/subcategory`. [Consultat el 21 de febrer de 2026].

[25] nLab authors: *Adjunction.* nLab, 2025. Revision 87. Disponible a: `https://ncatlab.org/nlab/revision/adjunction/87`. [Consultat el 26 de novembre de 2025].

[26] nLab authors: *involution.* nLab, 2025. Revision 28. Disponible a: `https://ncatlab.org/nlab/show/involution`. [Consultat el 13 de març de 2026].

[27] nLab authors: *weak inverse.* nLab, 2025. Revision 6. Disponible a: `https://ncatlab.org/nlab/show/weak+inverse`. [Consultat el 26 de març de 2026].

[28] Riehl, Emily: *Category Theory in Context.* Dover Publications, Mineola, New York, 2016.

[29] Smith, Peter: *Introducing Category Theory.* Logic Matters, Cambridge, 2a edició, 2025.

[30] Suárez-Álvarez, Mariano: *Definition of opposite category.* Mathematics Stack Exchange, 2013. `https://math.stackexchange.com/q/438698`. [Consultat el 26 de novembre de 2025].

[31] Yuan, Qiaochu: *Definition of forgetful functor.* Mathematics Stack Exchange, 2014. Disponible a: `https://math.stackexchange.com/q/851943`. [Consultat el 6 de març de 2026].