

MATEMÁTICAS DE LAS OPERACIONES FINANCIERAS

1. Introducción
2. Leyes financieras
3. Tanto nominal vs tanto efectivo. Tanto instantáneo.
4. Operación financiera: análisis estático y análisis dinámico
5. Operaciones de amortización
6. Tanto efectivo de coste, tanto efectivo de rendimiento y TAE.
7. Valor financiero de la operación
8. Referencias bibliográficas

1. INTRODUCCIÓN

Las **matemáticas financieras** se ocupan del estudio de las **operaciones financieras** y sirven para cuantificar el valor del dinero en el tiempo. De hecho, la idea del valor temporal del dinero es una idea central que encontraremos siempre al principio de cualquier libro de Finanzas.

Para ilustrar esta idea supongamos que en un sorteo nos tocan 10.000€ y tenemos que decidir si deseamos los 10.000€ hoy o dentro de 2 años. **¿Cuál sería la mejor opción?** Lógicamente la elección más correcta sería disponer hoy de los 10.000€, ya que así tendríamos la oportunidad de invertir el dinero (por ejemplo en una imposición a plazo fijo en una entidad financiera) y obtener una cifra superior a 10.000€ dentro de 2 años. En definitiva, se trataría de invertir ese dinero realizando una **operación financiera**.

Esta preferencia por el consumo presente frente al consumo futuro es la base fundamental sobre la que se construyen las matemáticas financieras y se suele denominar **principio de subestimación de las necesidades futuras frente a las presentes** o también **principio de preferencia por la liquidez**. Este principio implica que sólo estaremos dispuestos a retrasar la disponibilidad de un bien a cambio de recibir una recompensa o compensación. En contraposición, también estaremos dispuestos a renunciar a una parte del dinero al que tenemos derecho a cambio de obtener ese dinero con anterioridad a la fecha prevista (operaciones de descuento de capitales).

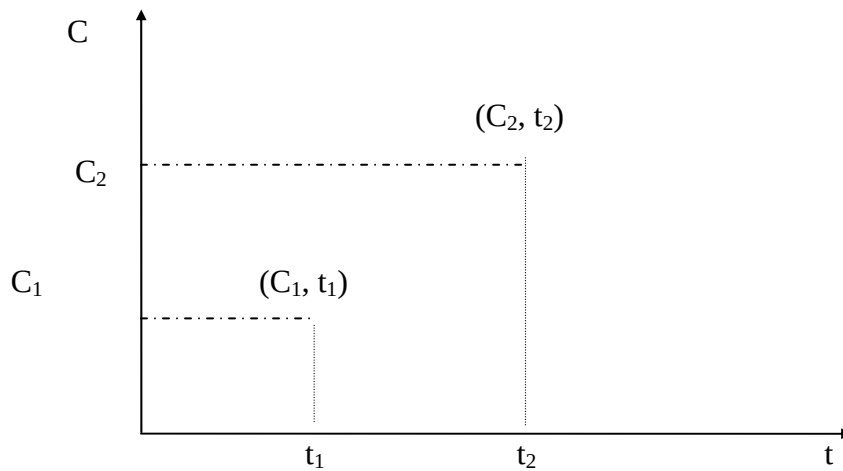
En definitiva, una **operación financiera** es un intercambio no simultáneo de capitales que se realiza entre dos agentes de acuerdo con una ley financiera determinada bajo la cual los conjuntos de capitales que se intercambian entre ambas partes son equivalentes. En su versión más simple, este intercambio supone que un agente entrega a otro un capital quedando obligado el agente que lo recibe a devolver, en el plazo acordado, el capital prestado más una cuantía que representa la **recompensa** que recibe el agente que pospone la disponibilidad del capital hasta una fecha futura.

Esa recompensa o compensación recibe el nombre de **interés** y puede definirse como la cuantía, expresada en unidades monetarias, que será necesario pagar por disponer de capitales ajenos durante un determinado período de tiempo (desde el punto de vista del agente que entrega el capital inicial el interés es la recompensa o compensación que recibe al final de dicho período de tiempo pactado por haber renunciado a disponer de su capital al inicio de dicho periodo).

Un ejemplo típico de operación financiera sería una imposición a plazo fijo a 2 años en una entidad financiera por la que una persona invierte hoy 10.000€ para recibir al cabo de 2 años 10.816€. En este caso, el interés ascendería a 816€ (=10.816-10.000).

Se define el concepto de **capital financiero** como la medida o valor de un bien económico en el momento del tiempo en que está disponible. Normalmente se representa por un par de números **(C,t)** donde **C** es la **cuantía** o valor del bien en unidades monetarias (euros, dólares, etc.) y **t** el **vencimiento** o momento del tiempo en que está disponible. Un ejemplo de capital financiero sería (10.000€, 01-10-2004), lo que significa que el 1 de octubre de 2004 se puede disponer de un capital de cuantía 10.000 euros. Nótese que $C \in \mathbf{R}^+$ y $t \in \mathbf{R}$.

¿Cómo se representan los capitales financieros? Gráficamente se representan mediante un sistema de coordenadas cartesianas, situando las cuantías en el eje de ordenadas y el tiempo en el eje de abscisas.

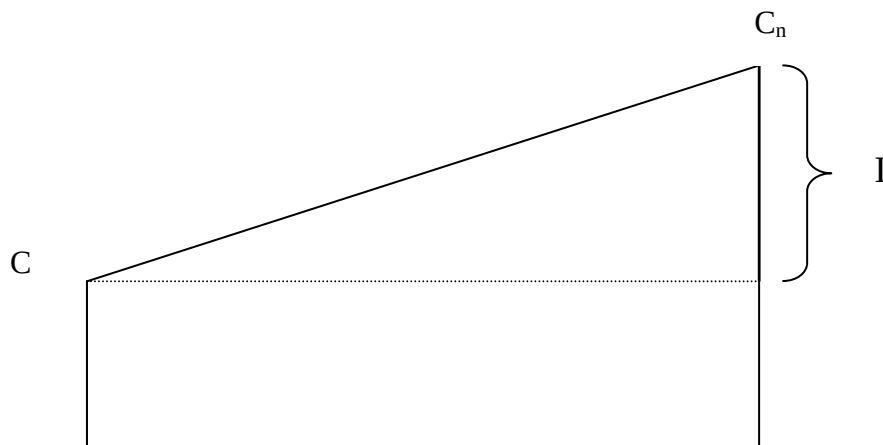


Sin embargo, en la práctica suele representarse de la forma:



Es decir de forma esquemática, situando en la parte superior del eje temporal la cuantía de los capitales, y en la parte inferior el tiempo.

En definitiva, debe quedar claro que la renuncia a disponer de una cuantía C en el momento actual t , esto es, (C, t) , supone la obtención de un capital de cuantía superior $C+I$ en un momento futuro t_n , es decir, $(C+I, t_n)$, donde I es el interés.



La siguiente cuestión a resolver hace referencia a cómo se determina la cuantía del interés (esto es, la recompensa por diferir la disponibilidad del capital). En otras palabras, ¿cómo se establece la regla de cálculo que sustenta el intercambio de capitales que tiene lugar en las operaciones financieras?

La expresión o modelo matemático que permite obtener dicha cuantía es lo que se conoce como **ley financiera** y, aunque existen múltiples posibilidades para dar respuesta a esta pregunta, en la práctica se utilizan fundamentalmente tres leyes, la **ley de capitalización simple**, la **ley de capitalización compuesta** y la **ley de descuento simple comercial**.

Ley financiera: Expresión matemática que permite obtener la cuantía del capital financieramente equivalente en un momento t_2 (futuro o pasado) al que se renuncia en el momento t_1 .

2. LEYES FINANCIERAS

2.1.) Ley de capitalización simple.

En este criterio, el interés I que se pagará por disponer de un capital de cuantía C por un período de tiempo dado, $n = t_n - t_0$, se determina de forma proporcional al capital dispuesto y la amplitud del período. Esto es:

$$I = C \cdot i \cdot n = C \cdot i (t_n - t_0) \quad [1.]$$

con:

C = la cuantía de capital dispuesto en unidades monetarias

$n = t_n - t_0$ el período de tiempo durante el cual se pospone la disposición del capital expresado en unidades de tiempo.

i = el parámetro que define la ley utilizada (que, como se verá posteriormente, representa el “tipo de interés” o precio a pagar al final del período por unidad de capital y unidad de tiempo) **expresado en la misma unidad en que venga medido el tiempo.**

Problema 1. ¿Cuál sería el interés, calculado en capitalización simple, correspondiente a la disposición de un capital de 6.000€ durante dos años y utilizando un tipo de interés anual del 4,00%?

Si se utiliza la expresión anterior, el interés será:

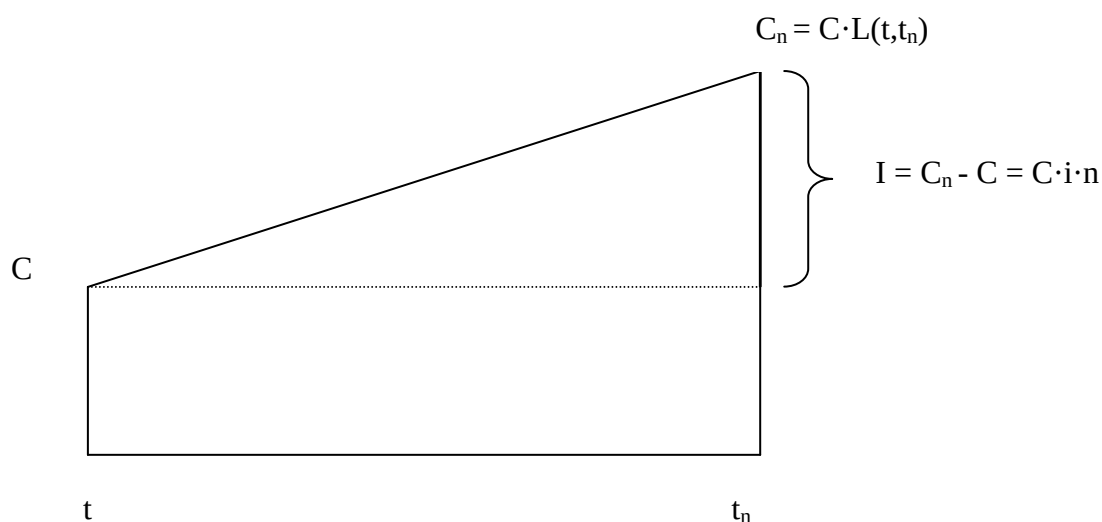
$$I = C \cdot i \cdot n = 6.000 \cdot 0,04 \cdot 2 = 480 \text{ euros}$$

De esta forma, la cuantía que se recibirá al final de período, C_n , tendrá la siguiente expresión:

$$C_n = C + I = C + C \cdot i \cdot n = C(1 + i \cdot n) \quad [2.]$$

A partir de [2] la expresión de la ley de capitalización simple será:

$$L(t; t_n) = (1 + i \cdot n) \text{ de forma que } C_n = C(1 + i \cdot n) = C \cdot L(t; t_n) \quad [3.]$$



En la práctica, el parámetro i suele expresarse en términos anuales por lo que el tiempo, n , se expresará en años o fracción de años. Esto es,

$$L(t; t_n) = \left(1 + i \cdot k / m\right) \quad [4.]$$

donde:

m = número natural que representa los subperiodos de igual amplitud en que se ha dividido el año ($m=12$ meses, $m=4$ trimestres, $m=365$ días, etc.)

k = número de subperiodos comprendidos entre t y t_n .

Problema 2. ¿Cuál sería el capital, calculado con capitalización simple, que se recibiría al final del periodo si se prestara un capital de 5000€ durante 180 días a un tipo de interés anual del 4,00%? ¿y si el período fuera de 3 meses?

Utilizando la expresión anterior: $C_n = C \cdot L(t; t_n) = C \cdot \left(1 + i \cdot \frac{k}{m}\right)$ y dependiendo del

período de tiempo, tendremos:

$k=180$ días

$$C_n = 5.000 \left(1 + 0,04 \cdot \frac{180}{365}\right) = 5.098,63 \text{ euros}$$

$k=3$ meses

$$C_n = 5.000 \left(1 + 0,04 \cdot \frac{3}{12}\right) = 5.050 \text{ euros}$$

2.2.) Ley de capitalización compuesta.

Si se aplica la expresión anterior, la cuantía que se obtendría por posponer la disposición del capital n periodos sería:

$$C_n = C \cdot L(t; t_n) = C(1 + i \cdot n) \quad [5.]$$

Sin embargo, podría plantearse una alternativa a esta situación dividiendo la duración total del período en n subperiodos y planteando la misma operativa para cada uno de ellos, esto es, reinvertiendo los capitales obtenidos al final de cada periodo por un periodo más. Así,

$$1^\circ \text{ período (amplitud 1)} \rightarrow C_1 = C(1 + i \cdot 1)$$

$$2^\circ \text{ período (amplitud 1)} \rightarrow C_2 = C_1(1 + i \cdot 1) = C(1 + i \cdot 1)(1 + i \cdot 1) = C(1 + i)^2$$

.....

$$\text{período } n \text{ (amplitud 1)} \rightarrow C_n = C_{n-1}(1 + i \cdot 1) = C(1 + i \cdot 1)(1 + i \cdot 1) \dots (1 + i \cdot 1) = C(1 + i)^n \quad [6.]$$

con:

C = la cuantía de capital dispuesto en unidades monetarias

$n = t_n - t$ el período de tiempo durante el cual se pospone la disposición del capital expresado en unidades de tiempo.

i = el parámetro que define la ley utilizada (que, como se verá posteriormente, representa el “tipo de interés” o precio a pagar al final del período por unidad de capital y unidad de tiempo) **expresado en la misma unidad en que venga medido el tiempo.**

Pues bien, la ley resultante de esta alternativa es lo que se denomina **capitalización compuesta** y su expresión sería:

$$L(t; t_n) = (1 + i)^n \text{ y, por tanto, } C_n = C(1 + i)^n = C \cdot L(t; t_n) \quad [7.]$$

Igual que en el caso anterior el parámetro i que define la ley debe expresarse en la misma unidad en que se mide el tiempo y dado que, en la práctica, el parámetro i se suele referir al año, la expresión general de la ley sería:

$$L(t; t_n) = (1 + i)^{k/m} \quad [8.]$$

donde:

m = número natural que representa los subperiodos de igual amplitud en que se ha dividido el año ($m=12$ meses, $m=4$ trimestres, $m=365$ días, etc.)

k = número de subperiodos comprendidos entre t y t_n .

Problema 3: ¿Cuál sería el capital, calculado con capitalización compuesta, que se recibiría al final del periodo si se prestara un capital de 5.000€ durante 180 días a un tipo de interés anual del 4,00%? ¿y si el período fuera de 3 meses?

Utilizando la expresión de la ley de capitalización compuesta $C_n = C.L(t; t_n) = C.(1+i)^{k/m}$ y, nuevamente dependiendo del periodo:

k= 180 días

$$C_n = 5.000.(1 + 0,04)^{180/365} = 5.097,65$$

k= 3 meses

$$C_n = 5.000.(1 + 0,04)^{3/12} = 5.049,27$$

Por otra parte, los intereses se obtendrían de la expresión:

$$I = C_n - C = C \left[(1+i)^{k/n} - 1 \right] \quad \text{y si } k/n=1 \rightarrow I = C \cdot i \quad [9.]$$

Problema 4: ¿Cuál sería el interés, calculado en capitalización compuesta, correspondiente a la disposición de un capital de 5.000€ durante 3 años utilizando un tipo de interés anual del 4,00%? ¿Y en el caso de un periodo de tres meses utilizando un tipo de interés trimestral del 1%?

$$I_1 = C_3 - C = C \left[(1+i)^3 - 1 \right] = 5.000 \left[(1+0,04)^3 - 1 \right] = 624,32 \text{ euros}$$

$$I_2 = C \cdot i = 5000 \cdot 0,01 = 50 \text{ euros}$$

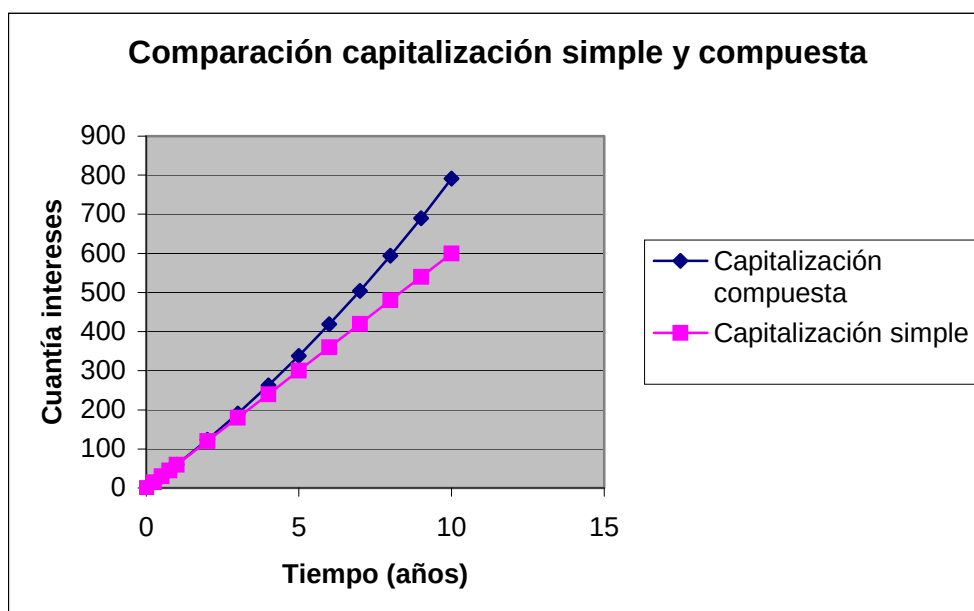
2.3) Comparación de las leyes de capitalización simple y capitalización compuesta.

La idea fundamental de la capitalización compuesta es la de que los intereses generen, a su vez, intereses. La utilización de este criterio supondría el mismo resultado que la aplicación de la ley de capitalización simple de forma sucesiva, reinvertiendo cada vez los capitales generados en el periodo anterior.

Así, si se comparan los intereses por periodo obtenidos con la aplicación de la ley de capitalización simple con los obtenidos mediante la capitalización compuesta, se comprueba como en el primer caso la cuantía es constante mientras que en el segundo dicha cuantía es creciente y que la reinversión de los intereses, implícita en la ley de capitalización compuesta, tiene un considerable efecto en la cuantía acumulada a medio y largo plazo. Sin embargo, hay que señalar que, en el corto plazo, las dos leyes producen resultados similares y que, más aún, para valores de n entre cero y uno, los intereses generados mediante la capitalización simple son superiores a los que se obtienen en la capitalización compuesta.

Problema 5: Obténgase los intereses por periodo y acumulados, con una ley de capitalización simple y con una ley de capitalización compuesta, considerando un capital de 1.000€ y un tipo de interés anual del 6%.

n (años)	Intereses acumulados	Intereses por período	Intereses acumulados	Intereses por período
	Capitalización simple		Capitalización compuesta	
0,25	15	-	14,67	-
0,5	30	15	29,56	14,89
1	60	30	60,00	30,44
2	120	60	123,60	63,60
3	180	60	191,02	67,42
4	240	60	262,48	71,46
5	300	60	338,23	75,75
6	360	60	418,52	80,29
7	420	60	503,63	85,11
8	480	60	593,85	90,22
9	540	60	689,48	95,63
10	600	60	790,85	101,37
11	660	60	898,30	107,45
12	720	60	1012,20	113,90
13	780	60	1132,93	120,73



Fijémonos por ejemplo que los intereses obtenidos para un período de 2 años al trabajar con la Ley de Capitalización Simple (LCS) son los mismos que si hubiésemos realizado dos operaciones a un año de duración en las que la cuantía invertida hubiese sido de 1000 euros y el tipo de interés hubiese sido del 6%. En otras palabras, al utilizar la LCS los intereses se están calculando siempre sobre la cuantía inicialmente prestada por lo que los intereses ya recibidos no generan nuevos intereses. Es lo mismo que si la entidad financiera hubiese pagado 60 euros de intereses al finalizar el primer año y los hubiese puesto aparte en una cuenta paralela para entregarlos con la segunda tanda de intereses de 60 euros cuando finalizase la operación al cabo de los dos años.

Pero, pensemos ahora, ¿qué ocurriría si periódicamente procediésemos a deshacer la inversión y volviésemos a reinvertir? o, en otras palabras, ¿qué ocurre si el plazo del pago de intereses es menor y podemos ir reinvertiendo éstos? ¿La rentabilidad sería la indicada por el tipo de interés anual? La respuesta es que ya no, y esto nos lleva a hablar de la Ley de Capitalización Compuesta (LCC), que es la que utiliza el Banco de España para el cálculo del TAE.

En líneas generales podemos indicar que al emplear la LCS implícitamente se está suponiendo que los intereses no generan intereses mientras que si utilizamos la LCC el tanto efectivo sí refleja los intereses que habría generado la reinversión de los intereses iniciales obtenidos a partir de la cuantía inicial.

En este caso, si al cabo del año los intereses los incorporamos a la cuantía inicial y con la nueva cuantía calculamos los intereses del segundo año, obtendríamos 123,60 euros de intereses.

$$I_1 = C \cdot i \cdot t = 1.000 \cdot 0,06 \cdot 1 = 60$$

$$I_2 = (C + I_1) \cdot i \cdot t = (1.000 + 60) \cdot 0,06 \cdot 1 = 63,60$$

$$\text{Total} = 123,60$$

Fijémonos como esta cuantía también la hubiésemos obtenido al aplicar la LCC:

$$I_2 = C \cdot (1+i)^t - C = 1.000(1+0,06)^2 - 1.000 = 123,60$$

Así pues parece más lógico emplear la LCC para calcular la rentabilidad que efectivamente obtiene el inversor asumiendo así, implícitamente, de que éste es capaz de realizar dichas reinversiones. De hecho, el TAE que el Banco de España obliga a las entidades financieras a publicar en la operatoria que realizan con su clientela, está basado en la LCC.

Cuando utilizamos la LCC debemos, sin embargo, distinguir entre dos tipos de conceptos, los cuales sirven ambos para indicar el tipo de interés que se está utilizando en una operación. Estos dos conceptos son el **tanto nominal** y el **tanto efectivo**. Volveremos sobre esto en el siguiente apartado de estas notas.

2.4) Ley de descuento simple.

En ocasiones, la operación financiera se plantea desde otro ángulo y se concibe como el abono en el momento actual de una cantidad que debería recibirse en un momento futuro.

En este caso, el precio por proceder al adelanto de la fecha de disponibilidad llevará aparejado que la cantidad recibida hoy sea inferior a la que se recibiría en el momento futuro. Dicho precio o recompensa se denomina “**descuento**” en lugar de interés y la ley financiera con que se calcula **ley de descuento simple comercial**.

El descuento **D** que se pagará por disponer en t_0 de un capital **(C, t)**, esto es, anticipar su vencimiento un período de tiempo $n=t-t_0$, se determina de forma proporcional al capital anticipado y la amplitud del período. Esto es:

$$D = C \cdot d \cdot n \quad [10.]$$

con:

C = la cuantía de capital cuya disponibilidad se adelanta (capital descontado) expresada en unidades monetarias.

$n = t - t_0$ el período que se adelanta el vencimiento expresado en unidades de tiempo.

d = el parámetro que define la ley utilizada (que representa el “tipo de descuento” o precio a pagar al inicio del período por unidad de capital y unidad de tiempo) **expresado en la misma unidad en que venga medido el tiempo**.

Problema 6: ¿Cuál sería el descuento que se produciría, utilizando la ley de descuento simple comercial, si se adelantase dos meses la disponibilidad de la paga extra de Navidad, sabiendo que su importe es de 2.500€ y que el tipo de descuento es del 0,50% mensual?

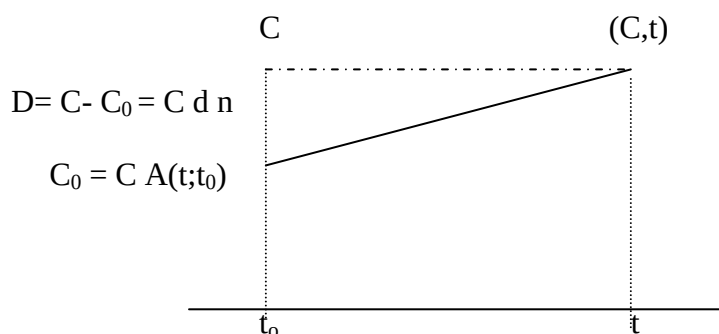
$$D = C \cdot d \cdot n = 2.500 \cdot 0,005 \cdot 2 = 25 \text{ €}$$

Por tanto, la cuantía C_0 que se recibiría al inicio del período, se obtendría de la siguiente expresión:

$$C_0 = C - D = C - C \cdot d \cdot n = C[1 - d \cdot n] \quad [11.]$$

La expresión de la ley de descuento simple comercial es:

$$A(t; t_0) = 1 - d \cdot n \quad \text{y, por tanto:} \quad C_0 = C \cdot A(t; t_0) \quad [12.]$$



En la práctica el parámetro **d** suele expresarse en términos anuales por lo que el tiempo, **n**, se expresará en años o fracción de años. Esto es:

$$A(t; t_0) = 1 - d \cdot k / m \quad [13.]$$

donde:

m = Número natural que representa los subperíodos de igual amplitud en que se ha dividido el año (m=12 meses, m=4 trimestres, m=365 días, etc.).

k = Número de subperiodos comprendidos entre t_0 y t.

Problema 7: ¿Cuál sería el capital, calculado con descuento simple comercial, que se recibiría al inicio del período si se procede a descontar un capital de 6.000€ a un tipo de descuento anual del 6% durante 90 días? ¿y si el período fuera de 6 meses?

Utilizando la expresión anterior: $C_0 = C \cdot A(t; t_0) = 1 - d \cdot k / m$ y dependiendo del período de tiempo:

n = 90 días

$$C_0 = 6.000 \left[1 - 0,06 \cdot \frac{90}{365} \right] = 5.911,23 \text{ euros}$$

Nota: si se trabajase con la ley de descuento simple comercial, se emplearía 360 días en el denominador.

n = 6 meses

$$C_0 = 6.000 \left[1 - 0,06 \cdot \frac{6}{12} \right] = 5.820 \text{ euros}$$

3. TANTO NOMINAL VS TANTO EFECTIVO. TANTO INSTANTÁNEO.

Definición de magnitudes:

Rédito de un intervalo temporal: incremento por unidad monetaria que se produce en ese determinado intervalo temporal por el diferimiento de la disponibilidad del capital. Indica los intereses generados por cada unidad monetaria en ese intervalo. Podemos hablar pues de rédito anual, semestral, mensual, etc.

Tanto nominal: tipo de interés nominal (generalmente anual) asociado a la operación. Constituye la suma aritmética de los réditos periodales asociados a cada uno de los periodos de pago de flujos de caja que existen dentro de cada año.

Tanto efectivo: es el rédito anual de la LCC que permite establecer la equivalencia financiera entre las cuantías entregadas por ambos agentes.

La diferencia entre el tanto nominal anual pagadero con frecuencia m y el tanto efectivo anual es que el primero NO tiene en cuenta la reinversión de los intereses previamente generados mientras que el segundo asume implícitamente que los intereses obtenidos previamente se reinvierten en la propia cuenta generando, a su vez, nuevos intereses, por lo que la rentabilidad obtenida a final del año supera al tanto nominal.

Ejemplo:

Supongamos una persona que desea invertir sus ahorros (10.000 euros) y para ello opta entre dos entidades financieras diferentes:

Entidad A: Valora las operaciones de depósito a un 6% anual y paga anualmente los intereses generados.

Entidad B: Valora las operaciones de depósito también a un 6% anual pero paga semestralmente los intereses generados.

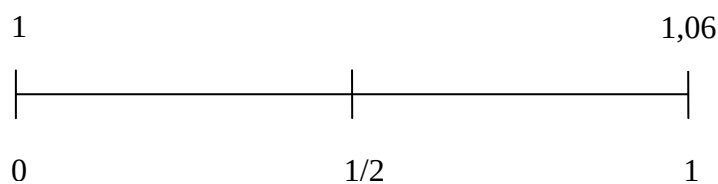
En este ejemplo, al suministrar la información, las entidades financieras están proporcionando en ambos casos el tipo de interés **nominal** que se va a utilizar para valorar dicha operación. Éste es el concepto que intuitivamente cualquier persona que no haya estudiado nunca Matemática Financiera tiene del tipo de interés.

En el caso de la segunda entidad, parece lógico considerar que si el tipo de interés anual es el 6%, entonces los intereses devengados al cabo de medio año serán el 3% del capital invertido. En otras palabras, la información que nos proporcionan sobre el tanto nominal sirve para determinar el rédito periodal (incremento por unidad monetaria durante el intervalo –semestral en este caso–) que utilizaremos para calcular los intereses generados en cada uno de los períodos en que se pagan dichos intereses.

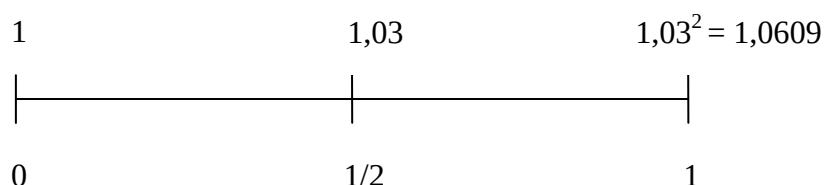
Precisamente el hecho de que en la segunda entidad se paguen los intereses devengados con una frecuencia superior a la anual va a provocar que el tanto efectivo (tipo efectivo o rentabilidad “real” que proporciona la operación) sea superior al tipo de interés nominal contratado. Esto se deriva del hecho de que con la LCC lo que se está suponiendo es que los intereses generados en cada uno de los períodos van a proporcionar, a su vez, nuevos intereses a añadir a los que ya genera la cuantía inicial.

Comprobémoslo:

Entidad A:



Entidad B:



El hecho de poder reinvertir durante 6 meses los intereses obtenidos al cabo de los 6 primeros meses es lo que provoca que la rentabilidad real de la operación en la entidad B no sea el 6%, sino un porcentaje ligeramente superior, en concreto el 6,09% ya que la cuantía final obtenida al cabo de un año no ha sido 10.600 euros como en la entidad A (el capital invertido más el 6% de intereses) sino 10.609 euros.

Si contemplásemos en el análisis, además de las anteriores, otra entidad (entidad C) que valorase las operaciones de depósito también a un 6% anual pero pagase trimestralmente los intereses generados, la rentabilidad anual finalmente obtenida sería superior (6,1363%) debido a las mayores posibilidades de reinversión de los intereses previamente obtenidos (puede comprobarse esto con la fórmula que aparece más abajo).

De esta manera, el tipo de interés nominal suele venir asociado al tipo de interés suministrado como información en la operación y que servirá para calcular los réditos de valoración asociados a cada uno de los períodos mientras que el efectivo es el que realmente proporciona una indicación más correcta de cual es realmente la rentabilidad o el coste de una operación de inversión o financiación, respectivamente.

La relación entre ambas magnitudes es la siguiente:

$$(1+i) = \left(1 + \frac{j(m)}{m}\right)^m = (1+i^{(m)})^m$$

siendo:

i = tanto (tipo de interés) efectivo anual

$j(m)$ = tanto (tipo de interés) nominal anual pagadero con frecuencia m .

$i^{(m)}$ = tipo de interés periodal (semestral, trimestral, mensual, etc...). Es el tipo de interés que se aplica para determinar la cuantía de intereses devengada en el período concreto (semestre, trimestre, mes, etc..) con el que se esté trabajando. En definitiva, indica el incremento por unidad monetaria asociado a ese periodo concreto (semestre, trimestre, mes, etc...)

m = número de veces en las que el periodo de referencia está comprendido dentro del año (p.ej: si los pagos son semestrales, $m = 2$; si son trimestrales, $m = 4$, etc.)

En el ejemplo visto:

Entidad A ($m = 1$): $j(1) = 0,06 = i$

Entidad B ($m = 2$): $j(2) = 0,06$ $i^{(2)} = 0,03$ $i = 0,0609$

Entidad C ($m = 4$): $j(4) = 0,06$ $i^{(4)} = 0,015$ $i = 0,061369$

Como puede comprobarse, si $m \neq 1 \Rightarrow i > j(m)$ y a medida que el fraccionamiento es mayor (a medida que m es mayor) las diferencias entre $j(m)$ e i serán mayores.

El concepto de TAE está haciendo referencia al tanto **efectivo** anual (si bien el acrónimo TAE en realidad indica tanto anual *equivalente*) ya que pretende ser indicativo de cual es la rentabilidad para el prestamista o el coste para el prestatario de una operación financiera concreta. Dicho TAE constituye en realidad un caso particular del tanto efectivo (o rédito anual de la LCC que permite establecer la equivalencia financiera entre los capitales entregados y recibidos por ambas partes) en el que se están teniendo en cuenta determinadas características comerciales (gastos, comisiones, etc.) que pueden influir en la operación. El concepto de TAE se analizará en detalle en el apartado 6 de estas notas.

Volvamos a la idea del tanto efectivo como medida de rentabilidad (para un agente) o coste (para el otro). Si definimos los dos agentes que intervienen en la operación como PRESTAMISTA y PRESTATARIO, el tanto efectivo constituye pues el parámetro indicativo de la rentabilidad que obtiene el prestamista en esta operación y, alternativamente, del coste que dicha operación representa para el prestatario.

Así pues, a partir de todo lo visto, ¿cual sería la respuesta más adecuada a las siguientes cuestiones?

1. ¿Que alternativa entre las siguientes escogería una persona que desea invertir sus ahorros en un depósito a plazo?

- a) Entidad A, que ofrece un tipo de interés nominal anual del 5% con pago de intereses trimestrales.
- b) Entidad B, que ofrece un tipo de interés nominal anual del 5% con pago de intereses mensuales.
- c) Entidad C, que ofrece un tipo de interés nominal anual del 5% con pago anual de intereses.
- d) Entidad D, que ofrece un tipo de interés nominal anual del 5% con pago de intereses semestrales.

2. Si se trata ahora de una persona que va a solicitar un préstamo, ¿cuál de las siguientes alternativas escogería?

- a) Entidad A, que concede préstamos a un tipo de interés nominal anual del 5% con pagos trimestrales.
- b) Entidad B, que concede préstamos a un tipo de interés nominal anual del 5% con pagos mensuales.
- c) Entidad C, que concede préstamos a un tipo de interés nominal anual del 5% con pagos anuales.
- d) Entidad D, que concede préstamos a un tipo de interés nominal anual del 5% con pagos semestrales.

Tanto instantáneo: hace referencia a un tanto nominal capitalizable instantáneamente. Por lo tanto, constituye el límite del tanto nominal cuando la frecuencia de pago tiende a infinito; esto es, cuando la amplitud del período tiende a cero.

Con la Ley de Capitalización Compuesta:

$$L(t) = (1+i)^t = e^{k \cdot t} \quad \text{donde } k = \text{tanto instantáneo} = \ln(1+i)$$

$$\text{Tanto instantáneo: } k = \lim_{m \rightarrow \infty} j(m).$$

Por lo tanto:
$$(1+i) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{m}\right)^m = e^k$$

El tanto instantáneo es una magnitud muy utilizada en finanzas, especialmente en todo lo referente a la estimación de la estructura temporal de los tipos de interés (ETTI) o, de forma alternativa, la función de descuento.

Ver ejemplo hoja cálculo Excel sobre comparación entre tanto nominal y tanto efectivo.

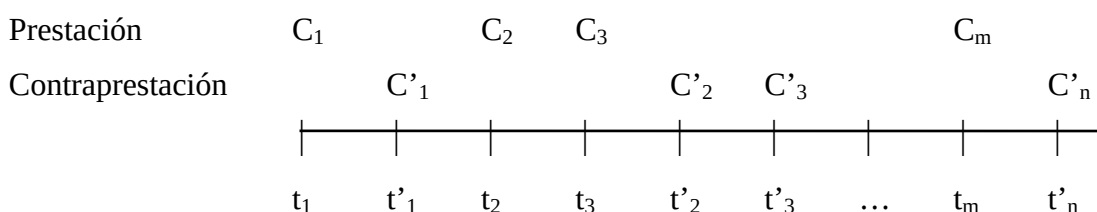
tanto nominal	fraccionamien	redito periodal	tanto efectivo (redito anual)		x	f(x) = (1+1/x)^x	
10%	1	10.0000000%	10.0000000%		1	2	
10%	2	5.0000000%	10.2500000%		10	2.59374246	
10%	4	2.5000000%	10.3812891%		100	2.704813829	
10%	12	0.8333333%	10.4713067%		1000	2.716923932	
10%	52	0.1923077%	10.5064793%		10000	2.718145927	
10%	365	0.0273973%	10.5155782%		100000	2.718268237	
10%	8760	0.0011416%	10.5170287%		1000000	2.718280469	
10%	525600	0.0000190%	10.5170908%		10000000	2.718281694	
10%	31536000	0.0000003%	10.5170920%		100000000	2.718281786	
	infinito		10.5170918%		infinito	2.718281828	base log neperiano
De forma alternativa, a partir de cada vez un menor tanto nominal puede obtenerse idéntico tanto efectivo sin mas que incrementar el fraccionamiento							
tanto efectivo	fraccionamien	redito periodal	tanto nominal				
10%	1	10.0000000%	10.0000000%				
10%	2	4.8808848%	9.7617696%				
10%	4	2.4113689%	9.6454756%				
10%	12	0.7974140%	9.5689685%				
10%	52	0.1834569%	9.5397580%				
10%	365	0.0261158%	9.5322625%				
10%	8760	0.0010880%	9.5310698%				
10%	525600	0.0000181%	9.5310188%				
10%	31536000	0.0000003%	9.5310180%				
	infinito		9.5310180%				

4. OPERACIÓN FINANCIERA

Definición: constituye un intercambio de capitales no simultáneos que se realiza de acuerdo a un determinado criterio financiero de valoración.

Ese criterio financiero de valoración viene representado analíticamente mediante una expresión matemática que es lo que conocemos como ley financiera. En general, vamos a trabajar con la LCC, si bien existen operaciones en las que se emplean otras (por ejemplo, en la liquidación de cuentas corrientes y la valoración de letras del Tesoro a un plazo menor a un año se utiliza la LCS y el descuento de efectos comerciales se realiza con la ley de descuento simple comercial).

Gráficamente:



Elementos que definen una operación financiera: son de dos tipos:

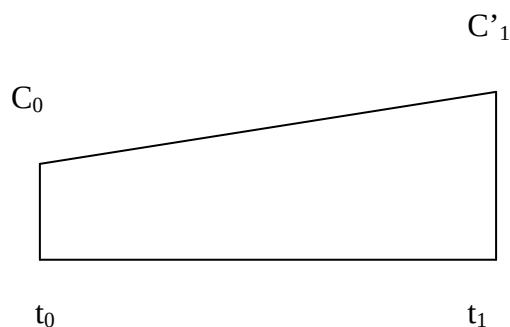
- **Personales:** ya definidos con anterioridad como PRESTAMISTA (quien entrega el primer capital) y PRESTATARIO (quien lo recibe). Al conjunto de capitales que entrega el prestamista se le denomina PRESTACIÓN y al que entrega el prestatario se le denomina CONTRAPRESTACIÓN.
- **Financieros:** aquí se está haciendo referencia al conjunto de capitales financieros que entrega cada una de las partes así como a la ley financiera de valoración utilizada en dicha operación.

A la hora de hablar de **capital financiero** debe hacerse referencia tanto a la cuantía como a la fecha de vencimiento (**C,t**) ya que, tal y como señalamos en un principio, debido al principio de subestimación de las necesidades futuras dos cuantías idénticas pero con vencimientos diferentes no tendrán el mismo valor financiero.

Para que se produzca el intercambio de capitales ambos agentes deberán estar de acuerdo en realizarlo por lo que, de forma implícita, ambos considerarán que ese intercambio es “justo”. Financieramente esto podemos traducirlo en el hecho de que ambos conjuntos de capitales representen el mismo valor financiero en una misma fecha, lo que nos lleva a decir que esos conjuntos de capitales son “financieramente equivalentes”. Esto es lo que generalmente se conoce con el nombre de **Principio de Equivalencia Financiera**.

Para ver esto más claro podemos comenzar con el ejemplo más sencillo de operación financiera, lo que se denomina Operación Financiera Simple.

Operación Financiera Simple (gráfico)



En este caso, lo que se está diciendo es que C_0 es equivalente a C'_1 de acuerdo con el criterio de valoración pactado entre ambos. Por ejemplo, 1.000 hoy son equivalentes a 1.050 de aquí un año si utilizamos una ley que refleja un tipo de interés del 5% pero ya no serían equivalentes si el tipo de interés fuese otro (1.000 sería preferible si el tipo de interés fuese mayor al 5% y no lo sería si fuese inferior).

Para establecer la equivalencia financiera se utiliza lo que denominamos **factor financiero**. El factor financiero asociado al período $[t_0, t_1]$ no es más que el número de unidades monetarias en t_1 equivalentes a una unidad monetaria en t_0 . Por lo tanto, es la cifra por la que tendremos que multiplicar a una determinada cuantía con vencimiento en t_0 para hallar su cuantía equivalente (en base a la ley pactada) en la fecha t_1 . Así por ejemplo, el factor asociado a un período de un año será 1,05 si el rédito de ese período anual es 0,05.

Con la LCC el factor será $(1+i)^{t_1-t_0}$ si nos desplazamos de t_0 a t_1 y $(1+i)^{t_0-t_1}$ si nos desplazamos de t_1 a t_0 . De esta forma el factor será > 1 si nos desplazamos a la derecha (esto es, si se pretende obtener C'_1 a partir de C_0) y < 1 si nos desplazamos a la izquierda (esto es, si se pretende obtener C_0 a partir de C'_1).

Imaginemos por ejemplo la siguiente situación:

- Depósito a tres meses de 1.000 euros.
- Tipo de interés (tanto nominal anual pagadero trimestralmente): 0,02

¿Cuál será el factor de ese período trimestral? ¿Y la cuantía de intereses generados?

Para responder ambas preguntas tenemos que hallar el rédito del período. Recuérdese que el rédito indica el incremento por unidad monetaria que se produce al pasar desde el inicio al final del período y dicho rédito puede obtenerse sencillamente como $j(m)/m$.

En este caso $i^{(4)} = 0,02/4 = 0,005$. Esto indica que cada unidad invertida al principio del periodo (trimestre) crece 0,005 unidades durante dicho periodo trimestral.

Por lo tanto el factor (número de unidades equivalentes al final del periodo a 1 unidad situada al principio del periodo) asociado a ese periodo trimestral será: $(1+i^{(4)}) = 1,005$.

De esta manera, la cuantía equivalente al cabo de los tres meses será: $1.000.000 \cdot 1,005 = 1.005$ euros con lo que los intereses generados serán $1.005 - 1.000 = 5$ euros.

Esta cifra también podía haberse obtenido simplemente como $1.000 \cdot i^{(4)} = 5$ ya que los intereses que genera un capital de cuantía C durante un período de tiempo determinado siempre pueden calcularse como la cuantía del capital por el rédito del período.

$$I = C \cdot i(t_1, t_2) = C \cdot (u(t_1, t_2) - 1)$$

Lo que debe de quedar claro aquí es que para plantear equivalencias financieras lo que utilizamos son los **factores** (bien sean de desplazamiento a la derecha o a la izquierda) y para conseguir esos factores lo que hacemos es sumar la unidad al rédito periodal correspondiente. Así, si el rédito asociado a un período concreto $[t_0, t_1]$ (que puede ser un mes, o 47 días, o un semestre, o un año, etc.) es $i^{(m)}$, entonces:

- El factor que permite ir de t_0 a t_1 será $(1+i^{(m)})$
- El factor que permite ir de t_1 a t_0 será $(1+i^{(m)})^{-1}$

Así: $C_0 \cdot (1+i^{(m)}) = C'_1 \Rightarrow C_0 = C'_1 \cdot (1+i^{(m)})^{-1}$

Lo que hemos visto para una operación simple puede extenderse fácilmente para una **operación compuesta**, esto es, una operación donde bien la prestación, bien la contraprestación o ambas están formadas por más de un capital financiero. En cada uno de los casos hablaríamos, respectivamente, de operación de constitución (plan de pensiones), operación de amortización (préstamo) u operación doblemente compuesta (cuenta corriente de depósito).

En todas estas operaciones se emplea el **principio de equivalencia financiera** para hallar las cuantías a entregar por cada uno de los agentes que pactan la operación. Vamos a ver un ejemplo de este tipo y posteriormente estudiaremos las operaciones de amortización (préstamos) debido a su importancia relativa con respecto al resto de operaciones.

Sea la siguiente operación financiera:

Prestación: $\{(10.000, 15.01.04), (40.000, 15.07.04)\}$

Contraprestación $\{(20.000, 15.04.04), (20.000, 15.10.04) (X, 15.01.05) \}$

Si la operación se valora con la LCC utilizando un tipo de interés que viene expresado como un tanto nominal anual del 6% pagadero trimestralmente, ¿cuál será la cuantía X que permite restablecer la equivalencia financiera?

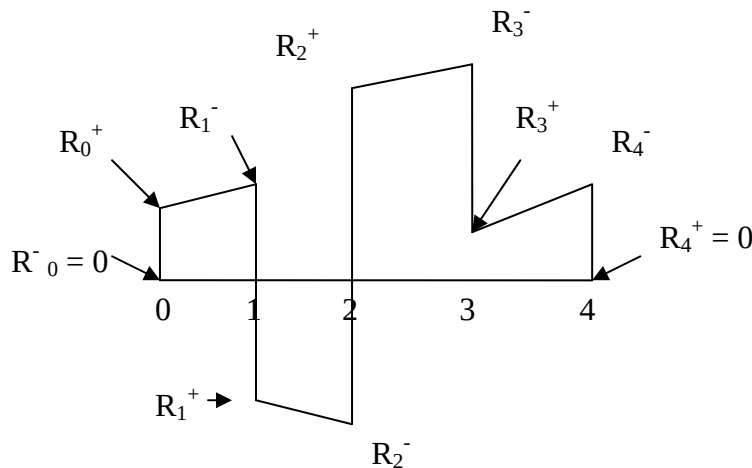
Ambos conjuntos de capitales tendrán que representar el mismo valor en base a la ley financiera pactada. Para ello hay que sumar financieramente las cuantías que forman la prestación por un lado y las cuantías que forman la contraprestación por otro. Debemos tener en cuenta que serán sumas financieras, esto es, no podemos realizar la suma aritmética sin más porque esos capitales tienen distinto vencimiento (recordar principio de preferencia por la liquidez). Así pues llevamos todas las cuantías a una misma fecha (por ejemplo, 15.01.05) utilizando los factores correspondientes y posteriormente las sumamos.

$$10.000 \cdot (1,015)^4 + 40.000 \cdot (1,015)^2 = 20.000 \cdot (1,015)^3 + 20.000 \cdot (1,015) + X$$

$$X = 10.609,07$$

Lo visto hasta ahora constituye el denominado **ANÁLISIS ESTATICO** de la operación. También podemos, sin embargo, realizar el denominado **ANÁLISIS DINÁMICO** en el que lo que se examina es la deuda que en cada fecha tiene un agente con el otro. A esa deuda se le denomina generalmente **Reserva Matemática o Saldo financiero de la operación** y su cuantía viene a indicar el importe del capital que debería pagarle el deudor al acreedor en dicha fecha para poder cancelar la operación. Es, por lo tanto, el capital que permite restablecer el equilibrio financiero en esa fecha.

Gráfico cálculo reserva matemática



En este ejemplo la evolución de la reserva matemática sería la siguiente:

t	Reserva por la izquierda	Reserva por la derecha
0 (15.01.04)	0	10000
1 (15.04.04)	10150	-9850
2 (15.07.04)	-9997,75	30002,25
3 (15.10.04)	30452,28	10452,28
4 (15.01.05)	10609,07	0

PROCEDIMIENTOS para calcular la reserva matemática:

- **método retrospectivo**, que consiste en valorar en esa fecha τ la suma financiera de todos los capitales de la prestación ya vencidos y restárselo a la suma financiera en esa misma fecha τ de todos los capitales de la contraprestación ya vencidos ($S_1 - S'_1$).
- **método prospectivo**, que consiste en valorar en esa fecha τ la suma financiera de todos los capitales futuros de la contraprestación y restárselo a la suma financiera en esa misma fecha τ de todos los capitales futuros de la prestación ($S'_2 - S_2$).
- **método recurrente**, que consiste en obtener la deuda viva en una fecha determinada a partir del conocimiento de la deuda en un momento anterior.

$$R_\tau = R_{\tau'} \cdot \text{factor}(\tau', \tau) + D(\tau', \tau)$$

- **Cuantía en términos absolutos:** cuantifica el importe de la deuda
- **Signo:** indica cuál de los dos agentes (prestamista o prestatario) es el deudor y cual es el acreedor en dicha fecha τ .

5. OPERACIÓN DE AMORTIZACIÓN

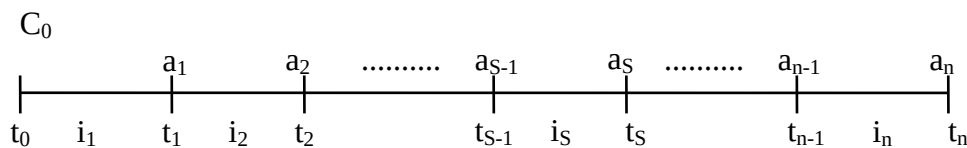
Operación financiera de prestación única y contraprestación múltiple, que tiene por objeto cancelar o amortizar un capital (el capital prestado) mediante entregas o desembolsos periódicos.

De esta forma, la operación queda definida por:

Prestación: $\{(C_0, t_0)\}$

Contraprestación: $\{(a_1, t_1) (a_2, t_2) (a_3, t_3) \dots (a_{n-1}, t_{n-1}) (a_n, t_n)\}$

Los capitales de la contraprestación se denominan **términos amortizativos** y su finalidad es la devolución del capital prestado (C_0) junto con el abono de los intereses devengados por el aplazamiento. Debe hacerse notar, sin embargo, que en la terminología bancaria habitual, se les suele denominar “cuotas amortizativas”.



Ley de valoración: Ley de Capitalización Compuesta.

Estudio estático de la operación

Ecuación de equivalencia financiera en el origen de la operación:

$$C_0 = \sum_{r=1}^n a_r \prod_{h=1}^r (1 + i_h)^{-1}$$

Estudio dinámico de la operación

La reserva matemática o saldo financiero en un momento determinado tiene la interpretación de capital vivo, capital pendiente de amortizar o deuda pendiente en el momento donde ésta se esté calculando.

Si en la fecha de cálculo de la deuda pendiente de amortizar se produce el vencimiento de algún término amortizativo, deberá distinguirse entre reserva por la izquierda (deuda existente antes de que se produzca el vencimiento de dicho término amortizativo) y reserva por la derecha (deuda existente un instante después de pagarse dicha cuantía).

Cálculo de la reserva matemática (deuda pendiente) por la derecha en un momento t_s :

Método retrospectivo (Prestación pasada - Contraprestación pasada)

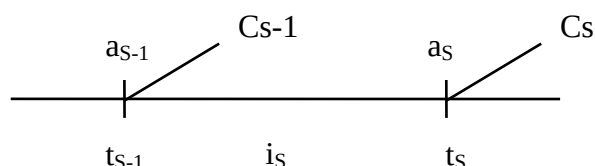
$$C_s = C_0 \prod_{h=1}^s (1 + i_h) - \left[\sum_{r=1}^{s-1} a_r \prod_{h=r+1}^s (1 + i_h) + a_s \right]$$

Método prospectivo (Contraprestación futura – Prestación futura)

$$C_s = \sum_{r=s+1}^n a_r \prod_{h=s+1}^r (1 + i_h)^{-1}$$

Ecuación dinámica de la amortización: principales variables.

Evolución del capital vivo: reserva por el Método Recurrente:



Ecuación dinámica de la amortización:

$$C_s = C_{s-1} (1 + i_s) - a_s$$

Operando:

$$C_s = C_{s-1} + C_{s-1} i_s - a_s \Rightarrow a_s = C_{s-1} - C_s + C_{s-1} i_s = A_s + I_s$$

$A_s = C_{s-1} - C_s$ = Cuota de amortización. Indica la disminución de la deuda pendiente en el periodo (t_{s-1}, t_s) .

$I_s = C_{s-1} i_s$ = Cuota de interés generada en el periodo (t_{s-1}, t_s) por el capital vivo al inicio del mismo (C_{s-1}).

La ecuación anterior significa que el término amortizativo tiene una doble función:

- cubrir los intereses que genera el capital vivo (deuda) existente a principio del periodo (I_s) y
- amortizar (devolver) la deuda pendiente en una cuantía determinada (A_s).

Debe resaltarse que la cuantía del término se destina a pagar en primer lugar los intereses generados y si dicha cuantía supera a éstos, entonces se produce una disminución de la deuda pendiente al inicio del periodo.

Gráfico evolución de la reserva



De la definición de cuota de amortización se desprenden de forma inmediata las siguientes relaciones:

$$C_0 = \sum_{h=1}^n A_h \quad C_s = \sum_{h=s+1}^n A_h$$

Ahora podemos introducir una nueva variable, M_s , que representa la cuantía del capital ya amortizado:

$$M_s = C_0 - C_s = \sum_{h=1}^s A_h = \sum_{h=1}^n A_h - \sum_{h=s+1}^n A_h = \sum_{h=1}^s A_h$$

Cuadros de amortización.

Resulta útil recoger la evolución de las distintas variables de la operación para cada uno de los períodos de la misma. Normalmente éstas se representan en una tabla, denominada “cuadro de amortización”, en donde se explicitan los valores, para cada período, de a_s , I_s , A_s , C_s y M_s .

t_s	a_s	I_s	A_s	C_s	M_s
0	---	---	---	C_0	---
1	$a_1 = I_1 + A_1$	$I_1 = C_0 \cdot i_1$	A_1	$C_1 = C_0 - A_1$	$M_1 = A_1$
s	$a_s = I_s + A_s$	$I_s = C_{s-1} \cdot i_s$	A_s	$C_s = C_{s-1} - A_s$	$M_s = A_1 + A_2 + \dots + A_s$
n	$a_n = I_n + A_n$	$I_n = C_{n-1} \cdot i_n$	A_n	$C_n = C_{n-1} - A_n = 0$	$M_n = A_1 + A_2 + \dots + A_n = C_0$

Nota: Antes de estudiar los métodos particulares de amortización, vamos a definir de una forma clara los conceptos de interés fijo, variable e indexado o flotante, conceptos que en ocasiones los participantes del mercado utilizan de forma incorrecta.

* Un préstamo (o, en general, una operación financiera) se dice que está pactada a tipo de interés fijo cuando el rédito de valoración es el mismo para todos los períodos en que ésta se divide. Es decir: $i_1 = i_2 = i_3 = i_4 = \dots = i_n = i$

* Se dice que un préstamo es a interés variable cuando los réditos de valoración de cada uno de los períodos no son iguales pero sí son conocidos a priori, cuando se pacta la operación. Es decir: $i_1, i_2, i_3, i_4, \dots, i_n \exists$ al menos algún $i_i \neq i_j$

* Se dice que un préstamo es a interés indexado o flotante cuando los réditos de valoración de cada uno de los períodos no están fijados de antemano, cuando se pacta la operación, sino que están en función de la evolución que haya sufrido un índice o tipo de referencia.

Métodos específicos de amortización:

Método americano

Se trata de una operación de amortización en la que al final de cada período se pagan exclusivamente los intereses devengados en el mismo, dejando la amortización del principal para el final de la operación. Este método de amortización implica, por tanto, las siguientes condiciones equivalentes:

$$a_s = I_s = C_0 \cdot i_s \quad \forall s = 1, 2, \dots, n-1. \quad a_n = I_n + A_n = C_0 i_n + C_0$$

$$A_1 = 0; A_2 = 0; \dots; A_{n-1} = 0; A_n = C_0$$

$$C_0 = C_1 = \dots = C_{n-1}; C_n = 0$$

Método francés

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = a$$

$$i_1 = i_2 = i_3 = \dots = i_n = i$$

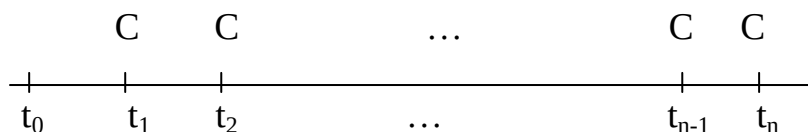
Con anterioridad a estudiar este método conviene profundizar en otros conceptos que nos servirán para determinar algunas de las variables que aparecen en este método de amortización.

En concreto estamos refiriéndonos a la denominada teoría de rentas, en la que lo único que vamos a hacer es obtener expresiones relativamente sencillas que nos permitirán obtener la suma financiera de un conjunto de capitales en una fecha determinada si estos cumplen determinadas características.

Recordemos que la ecuación de equivalencia financiera que debe plantearse siempre en el análisis estático para obtener alguno de los capitales que debe pagar prestamista o prestatario implica calcular la suma financiera tanto de los capitales de la prestación como de la contraprestación en un momento determinado para poder igualarlos y a partir de ahí obtener la cuantía deseada.

Pues bien, si el conjunto de capitales que pretendemos hallar presenta idéntica cuantía entonces la suma financiera de los mismos puede obtenerse como sigue.

Valor inicial de una renta constante de cuantía C valorada con una ley de capitalización compuesta con un tipo de interés efectivo periodal i :



Su valor financiero en t_0 , valor inicial o actual, representado por $a_{n|i}$ con $n \in \mathbb{N}$, será:

$$V_0 = C(1+i)^{-1} + C(1+i)^{-2} + \dots + C(1+i)^{-n} = C \cdot \sum_{s=1}^n (1+i)^{-s}$$

donde

$$\sum_{s=1}^n (1+i)^{-s} = (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \dots + (1+i)^{-n} = a_{n|i}$$

y dado que se trata de la suma de los términos de una serie de números cuya cuantía crece en progresión geométrica de primer término $a_1 = (1+i)^{-1}$, último $a_n = (1+i)^{-n}$, y razón $r = (1+i)^{-1}$, se puede escribir:

$$a_{n|i} = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r} = \frac{(1+i)^{-1} - (1+i)^{-n} (1+i)^{-1}}{1 - (1+i)^{-1}} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

Así pues, el valor inicial de la renta nos sirve para plantear tanto la ecuación de equivalencia financiera con el método francés como la reserva matemática:

Ecuación de equivalencia $C_0 = a \cdot a_{n|i}$

Saldo vivo (Reserva) en t_s $C_s = a \cdot a_{n-s|i} = C_0 \cdot (1+i)^s - a \cdot S_s|i$

Ley de Recurrencia Cuotas de Amortización: Método progresivo

$$A_{s+1} = A_s \cdot (1+i) \Rightarrow A_s = A_1 \cdot (1+i)^{s-1} \text{ siendo } A_1 = a - C_0 \cdot i$$

Método de cuotas de amortización constantes

$$A_1 = A_2 = A_3 = \dots = A_{n-1} = A$$

$$a_s = C_{s-1} \cdot i_s + A$$

Dado que debe cumplirse siempre que

$$C_0 = \sum_{h=1}^n A_h = n \cdot A \Rightarrow A = \frac{C_0}{n}$$

Método de términos amortizativos variables en progresión geométrica

$$a_1 = a; \quad a_2 = a \cdot q; \quad a_3 = a_2 \cdot q = a \cdot q^2; \quad \dots \quad a_n = a_{n-1} \cdot q = a \cdot q^{n-1}$$

$$\text{Ecuación de equivalencia (en el origen): } C_0 = A(a, q)_n \rceil_i = a \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n} q^n}{1+i-q}$$

NOTA: Existen **dos metodologías** claramente diferenciadas a la hora de calcular los términos amortizativos en las operaciones a tipo de interés fijo:

Cuando la información hace referencia a la evolución de los términos: se plantea la ecuación de equivalencia financiera

Cuando la información hace referencia a las cuotas de amortización: en este caso plantear la ecuación de equivalencia no permite hallar la cuantía de los términos (quedaría una ecuación con “n” incógnitas) por lo que se hace necesario acudir a la estructura del término amortizativo calculando previamente la cuantía de la cuota de amortización de cada período y a partir de ellas, de la reserva matemática que servirá para hallar la cuota de interés del período.

Operación de amortización indexada

En general, una operación de amortización indexada es aquella en la que los términos amortizativos están ligados a la evolución de un índice representativo del comportamiento de alguna magnitud. Así pues, las operaciones indexadas son operaciones posdeterminadas en las que su coste o rendimiento, que sólo puede conocerse a posteriori, depende de la evolución de un índice de referencia.

La indexación puede ser:

⇒ *total* (si todo el término amortizativo, a_s , se ve afectado por la variación del índice de referencia)

⇒ *parcial* (cuando la variación del índice sólo afecta a uno de los componentes del término amortizativo, ya sea A_s o I_s). El caso habitual en el mercado español es la indexación en cuota de interés, por lo que nos centraremos en esta situación.

Estas operaciones en el mercado suelen denominarse “a tipo de interés variable”, pero esta denominación no permite distinguir entre dos modalidades totalmente diferentes: las operaciones a tipo variable predeterminado y posdeterminado. En el primer caso el coste o rendimiento puede ser conocido a priori y en el segundo, que es el analizado en este epígrafe, no.

Así pues, en estos préstamos la cuota de interés de cada período no está determinada a priori sino que dependerá de la evolución que siga un determinado índice de referencia. Habitualmente también suele pactarse un diferencial que, aplicado al índice mencionado, permite determinar el rédito de valoración del período que habrá de

aplicarse al capital vivo para así determinar la cuantía correspondiente a la cuota de interés.

Es decir, los réditos aplicables a los distintos períodos –exceptuando habitualmente el primero, donde el tipo de interés sí es conocido a priori– se obtienen a partir de los valores que va tomando el índice de referencia, según el procedimiento pactado en el contrato. En dicho procedimiento deberán determinarse los siguientes aspectos:

- a) Cual es el valor del índice de referencia aplicable a cada período (último valor publicado, media del mes anterior, etc.) y cómo se recogerá dicho valor (tal y como se publica, redondeado al alza, etc.)
- b) Cual será el índice que se utilizará en el caso de que el escogido en primer lugar dejara de estar disponible.
- c) Cual será la relación entre dicho índice y el rédito del periodo. Esto se recoge mediante el convenio de indexación. La forma más habitual de establecer dicha relación, pero no la única, es la siguiente:

$$\begin{aligned} j_s(m) &= i_{rs} \pm d \\ i_s^{(m)} &= \frac{j_s(m)}{m} \end{aligned} \quad [1]$$

donde:

$j_s(m)$: tanto nominal aplicable al período (t_{s-1} , t_s);

$i_s^{(m)}$: rédito periodal aplicable al capital vivo para determinar la cuota de interés;

i_{rs} : valor índice de referencia para el mismo período obtenido según el procedimiento pactado;

d : diferencial pactado, expresado en las mismas unidades que el tipo de interés.

En este tipo de operaciones suele especificarse a priori los períodos en los que el tipo de interés permanecerá fijo, modificándose el final de cada uno de ellos de acuerdo con las variaciones del índice de referencia. Nótese que estos periodos no tienen porqué coincidir con los correspondientes al pago de los términos amortizativos. Ésta es la modalidad habitual.

Resolución de las operaciones: dependerá de cómo se definan los términos amortizativos. Existen dos posibilidades:

A) Términos amortizativos de cuantía no predeterminada:

A.1) Con cuotas de amortización prefijadas

A.2) Método francés indexado.

B) Términos amortizativos de cuantía predeterminada.

A) Términos amortizativos de cuantía no predeterminada.

A.1) Con cuotas de amortización prefijadas

Se conoce a priori:

- las cuotas de amortización.
- duración de la operación.

Dado que obligatoriamente debe cumplirse que:

$$C_0 = \sum_{h=1}^n A_h$$

entonces los términos amortizativos (a_s) se obtendrán al sumar a las cuotas de amortización ya conocidas las correspondientes cuotas de interés una vez se conozca el valor del índice necesario para construir el rédito indexado aplicable a cada período.

Los sucesivos capitales vivos o reservas necesarios para determinar las cuotas de interés se conocen ya a priori precisamente porque son conocidas las cuotas de amortización.

De esta forma, el flujo de caja de cada período será variable pero la duración de la operación está predeterminada al quedar especificada la dinámica amortizativa a través de las cuotas de amortización.

A.2) Método francés indexado

Es el método de amortización más habitual en estos momentos en nuestro mercado financiero.

Aquí también se conoce la duración total de la operación pero, a diferencia del caso anterior, ni los términos ni sus dos componentes (cuotas de amortización y de interés) son conocidos para todos los períodos cuando se pacta la operación.

Su denominación indica cual es su principal característica: si los tipos de interés no varían, entonces los términos amortizativos tampoco variarán (esto es, la característica definitoria del método francés de amortización); ahora bien, si la aplicación del convenio de indexación provoca que el tipo de interés aplicable al período de interés sea distinto del aplicado en el período anterior, entonces el término amortizativo también será diferente.

Este método exige que al finalizar cada período de interés se replantee la ecuación de equivalencia financiera a partir de la deuda existente en esos momentos y empleando el nuevo rédito de valoración aplicable al período de interés que comienza en esa fecha. La idea es asumir implícitamente que al inicio de cada período de interés se cancela teóricamente el préstamo anterior y se plantea un nuevo préstamo por el importe del capital vivo. Cada uno de estos préstamos se resuelve como si efectivamente se tratara de un préstamo con términos amortizativos constantes y tipo de interés fijo, utilizando el tipo de interés de valoración del período en que supuestamente se inicia, que será el

resultante de la aplicación de las condiciones contractuales. La cuantía de la prestación de cada uno de los préstamos será el capital vivo del anterior y la duración el número de períodos de interés que restan hasta el vencimiento pactado contractualmente.

Por tanto, la operación tendrá el siguiente esquema:

Prestación: (C_0, t_0) .

Duración de la operación: n años.

Términos amortizativos con periodicidad m .

Períodos de interés de amplitud $(t_{s-1}, t_s]$.

Tanto nominal aplicable al primer período de interés:

$$j_1(m) \rightarrow i_1^{(m)} = \frac{j_1(m)}{m}$$

Tanto nominal aplicable al resto de la operación:

$$j_s(m) = i_{r,s} \pm d \rightarrow i_s^{(m)} = \frac{j_s(m)}{m} \text{ para } s = 2, 3, \dots, n.$$

En estas condiciones:

Primer período de interés:

$$\text{Términos amortizativos: } a_1 = \frac{C_0}{a_{\overline{nxm}|i_1^{(m)}}}$$

$$\text{Capital vivo al finalizar el primer período de interés: } C_1 = a_1 a_{\overline{(nxm)-m}|i_1^{(m)}}$$

Segundo período de interés:

$$\text{Términos amortizativos: } a_2 = \frac{C_1}{a_{\overline{nxm-m}|i_2^{(m)}}}$$

$$\text{Capital vivo al finalizar el segundo período de interés: } C_2 = a_2 a_{\overline{nxm-2m}|i_2^{(m)}}$$

n-ésimo (último) período de interés:

$$\text{Términos amortizativos: } a_n = \frac{C_{n-1}}{a_{\overline{m}|i_n^{(m)}}} \rightarrow C_n = 0$$

La operación resultante, al seguir este procedimiento, presentará términos amortizativos constantes durante cada período de interés y que irán variando en los sucesivos dependiendo de la evolución del índice de referencia.

B) Términos amortizativos de cuantía predeterminada.

En esta ocasión se conoce en el momento inicial la cuantía de los términos amortizativos, que puede ser constante o variable, según sea la dinámica de amortización establecida.

Sin embargo, el desconocimiento de la cuota de interés para cada período (al depender su cuantía del valor que tome el índice de referencia para ese período concreto) provoca que tampoco pueda conocerse con certeza la correspondiente cuota de amortización, dado que lo que sí se sabe es el flujo de caja a pagar por el prestatario, esto es, el término amortizativo, que engloba tanto la cuota de interés como la de amortización.

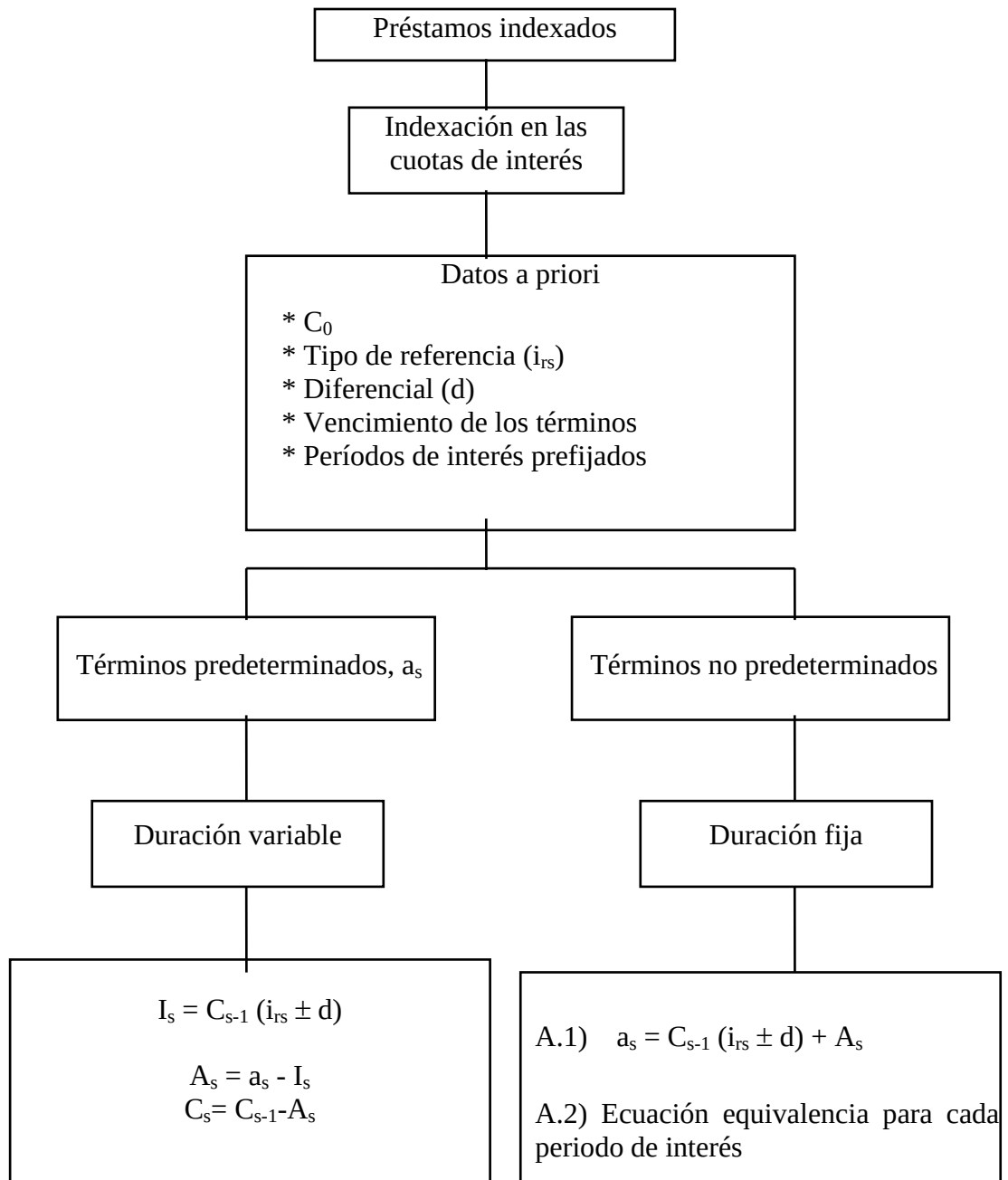
Obviamente, si no se conoce a priori las sucesivas A_s , tampoco podrá conocerse la duración total de la operación, pues no olvidemos que la cuota de amortización representa la reducción de la deuda pendiente que se produce en cada período. Así, si no se sabe a priori cuanto se reducirá la deuda, no puede saberse cuando ésta estará totalmente redimida; esto es, cancelada en su totalidad.

La cuantía de los términos amortizativos, fijada a priori, suele determinarse bien por acuerdo entre las partes -teniendo en cuenta que es habitual establecer una duración máxima para la operación- o bien considerando que el tipo de interés inicial se mantiene constante durante toda la operación.

Nótese, sin embargo, que la cuantía del último término amortizativo normalmente diferirá de la cuantía de lo previsto inicialmente. Generalmente, dicha cuantía será inferior, pero también podría ser superior en el caso de que la operación no pudiese prolongarse un período más por haber llegado a su límite máximo.

En esta modalidad el deudor conoce pues a priori cual va a ser el flujo de caja que debe destinar al servicio de la amortización del préstamo, si bien la variabilidad del índice de referencia puede provocar un alargamiento o un acortamiento de la operación, al añadir o eliminar uno o varios reembolsos según se aminore o acelere la amortización del capital prestado a través de las cuantías A_s .

En resumen:



6. TANTO EFECTIVO DE COSTE, DE RENDIMIENTO Y TAE

Se entiende por tanto efectivo de una operación financiera (i_e) el rédito anual o tanto efectivo de la ley de capitalización compuesta que verifica la equivalencia financiera entre la prestación realmente entregada/recibida y la contraprestación realmente recibida/entregada.

En general, el cálculo del tanto efectivo que presenta una operación no plantea ningún tipo de problema, si bien cabrá distinguir entre:

- Tanto efectivo de rendimiento (asociado al prestamista): es aquel rédito anual o tanto efectivo de la ley de capitalización compuesta que verifica la equivalencia financiera entre la prestación realmente entregada y la contraprestación realmente recibida. Se le suele denotar como i_a .
- Tanto efectivo de coste (asociado al prestatario): rédito anual o tanto efectivo de la ley de capitalización compuesta que verifica la equivalencia financiera entre la prestación realmente recibida y la contraprestación realmente entregada. Se le suele denotar como i_p .

Si al realizar la operación en el mercado financiero aparece algún tipo de característica comercial tal y como suele ser habitual, el tanto efectivo que presente la misma diferirá del asociado a la operación pura. Por características comerciales entendemos todas aquellas condiciones complementarias a las operaciones que provocan que la prestación y/o contraprestación que los agentes deben entregar o recibir se modifique respecto de la inicialmente planteada en la operación financiera pura.

Así pues las características comerciales son condiciones complementarias que aparecen en las operaciones y se plasman en todos aquellos importes entregados o recibidos por las partes contratantes por conceptos diferentes a la entrega y devolución del capital y los intereses. Como ejemplos más representativos podemos señalar las comisiones, gastos de estudio y tramitación de préstamos, gastos notariales y registrales en préstamos hipotecarios, etc.

Según las características que haya sean de tipo unilateral o bilateral habrá que distinguir adicionalmente o no, respectivamente, entre i_a e i_p . De esta forma:

1) Si no existen características comerciales: $i = i_e = i_a = i_p$

2) Si existen características comerciales:

2.1) Son todas de tipo bilateral: $i \neq i_e = i_a = i_p$

2.2) alguna de las existentes es de tipo unilateral: $i_a \neq i_p$

La TAE (tasa anual equivalente) de una operación representa el parámetro indicativo del coste o rendimiento de las operaciones financieras calculado según las normas que el Banco de España establecía para las entidades de crédito en su Circular 8/1990, la cual ha sido recientemente sustituida por la Circular del Banco de España 5/2012, de 27 de junio (BOE de 6 de julio), de Entidades de crédito y proveedores de servicios de pago.

En la actual normativa, la forma de cálculo de la tasa anual equivalente aparece en la Norma Decimotercera de la CBE 5/2012.

La tasa anual equivalente es aquella que iguala en cualquier fecha el valor actual de los efectivos entregados y recibidos a lo largo de la operación. En su cálculo (Anexo 7 de la CBE 5/2012) se asume que el contrato estará vigente durante el período de tiempo acordado y que la entidad y el cliente cumplirán sus obligaciones con exactitud en las condiciones y los plazos que se hayan acordado en el contrato.

No obstante, y a diferencia del concepto de tanto efectivo de coste o rendimiento, el TAE no incorpora todas las características comerciales que pueden aparecer en la operación por lo que su empleo puede resultar en determinadas ocasiones poco útil para informar de cual es el auténtico coste o rendimiento que se deriva para cada una de las partes de la operación financiera que estén realizando.

En líneas generales, para el cálculo del TAE en los préstamos:

- Se incluirán las comisiones y demás gastos que el cliente esté obligado a pagar a la entidad como contraprestación por el crédito recibido o los servicios inherentes al mismo.
- No se considerarán:
 - Los gastos a abonar a terceros, en particular los corretajes, gastos notariales e impuestos.
 - Los gastos por seguros o garantías. No obstante, se incluirán las primas de los seguros que tengan por objeto garantizar a la entidad el reembolso del crédito en caso de fallecimiento, invalidez, o desempleo de la persona física que haya recibido el crédito, siempre que la entidad imponga dicho seguro como condición para conceder el crédito.
- En aquellos casos en que la entidad reciba ayudas, subsidios o subvenciones de carácter público, sólo se tendrán en cuenta para el cálculo de la tasa anual equivalente los importes efectivamente reintegrados por el beneficiario, de forma que aquellas subvenciones resulten excluidas de sus costes.

Como aspecto más interesante podemos señalar que, en el caso de los préstamos indexados, el desconocimiento de la evolución futura del índice de referencia utilizado provoca que resulte imposible determinar a priori cual va a ser el coste y rendimiento efectivo que esta operación represente para el prestatario y prestamista respectivamente. Debido a esta razón, se utiliza la denominada **“TAEVariable”**.

Para ello se adopta el supuesto (CBE 5/2012, norma decimotercera, epígrafe 5) de que el tipo de referencia inicial permanece constante, durante toda la vida de la operación, en el último valor conocido en el momento de la celebración del contrato y, si se pactara un tipo de interés fijo para cierto periodo inicial, éste se tendrá en cuenta en el cálculo, pero únicamente durante dicho periodo inicial. De esta forma pretende solventarse el problema de desinformación que se derivaba del supuesto que solía hacerse hace años para este tipo de operaciones: considerar únicamente el tipo conocido “a priori”, que solía hacer referencia únicamente al primer período de interés de la operación.

En cualquier caso, debe de quedar claro que el cálculo del tanto de coste de la operación exigirá plantear la equivalencia financiera en base a una ley de capitalización compuesta entre la prestación realmente percibida y la contraprestación realmente entregada. Si el

préstamo es indexado (operación postdeterminada), dicho cálculo sólo podrá realizarse de forma efectiva cuando se conozcan los réditos aplicados a cada uno de los períodos de interés.

7. VALOR FINANCIERO DE LA OPERACIÓN

En los apartados anteriores se han estudiado las operaciones aisladas del contexto general del mercado financiero y de las circunstancias que influyen en él. Corresponde pues, ahora, analizar los préstamos como productos financieros que pueden negociarse en el mercado y así, considerar cual es su valor teniendo en cuenta las leyes de la oferta y la demanda que determinan un precio, el cual no es más que el tipo de interés.

Con este fin, consideraremos una operación financiera concertada en el momento t_0 a un rédito constante i . En un punto intermedio, la parte de la operación pendiente (reserva matemática) es:

$$C_s = \sum_{r=s+1}^n a_r \cdot (1+i)^{-(r-s)}$$

Este valor proporciona el saldo de la operación atendiendo a las circunstancias pactadas en el origen, pero no garantiza que el valor de negociación o venta en el mercado sea el mismo. Esto es, el valor al que podrá negociarse dependerá tanto de las características de la propia operación como de la situación del mercado concretizada en el llamado “tipo de interés de mercado”.

Suponiendo que el mercado valora a un tipo i_m el valor del préstamo se define como:

$$V_s = \sum_{r=s+1}^n a_r \cdot (1+i_m)^{-(r-s)}$$

lo que supone actualizar la contraprestación a la que da derecho la operación a los tipos de interés de mercado.

Esto puede verse de manera sencilla si consideramos una operación simple:

Prestación (100 , 0)

Contraprestación (110,25 , 2)

Si en $t=1$

$$i_m = 0,05 \quad \Rightarrow \quad V_1 = C_1 = 105$$

$$i_m = 0,06 \quad \Rightarrow \quad V_1 < C_1 \quad (V_1 = 104,009434)$$

$$i_m = 0,04 \quad \Rightarrow \quad V_1 > C_1 \quad (V_1 = 106,009615)$$

- Efecto primera derivada negativa (pendiente decreciente): relación inversa V_s e i_m
- Efecto convexidad (segunda derivada positiva).

8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bibliografía básica:

De Pablo, A. (1998): “Matemáticas de las operaciones financieras”, Tomos I y II, Tercera Edición, Editorial UNED. Madrid.

Meneu, V., Jordá, M.P. y Barreira, M.T. (1994): “Operaciones financieras en el mercado español”. Editorial Ariel Economía. Barcelona.

Navarro, E. y Nave, J.M. (2001): “Fundamentos de Matemáticas Financieras”. Antoni Bosch Editor. Barcelona.

Timor Ferrando, E. (2009): “Curso práctico de Matemática Financiera con Excel 2007”. Infobook's, D.L.

Bibliografía complementaria:

Apraiz, A. (2003): “Fundamentos de Matemática Financiera”. Editorial Desclee de Brouwer. Bilbao.

Baquero M.J. y Maestro, M^a.L. (2003): "Matemáticas de las Operaciones Financieras. Problemas resueltos". Ed. AC, Madrid.

Cabello, J.M., Gómez, T., Rodríguez, R., Ruíz, F. y Torrico, A. (1999): “Matemáticas financieras aplicadas: 127 problemas resueltos”. Editorial AC. Madrid.

Cabello, J.M. (2006): “Valoración Financiera: teoría y práctica con Excel”. Delta Publicaciones. Madrid.

Circular Banco de España 5/2012, de 27 de junio (BOE de 6 de julio de 2012).

García Boza, J. et al. (2002): “Problemas resueltos de matemática de las operaciones financieras”. Ediciones Pirámide. Madrid.

Gil Peláez, L. (1987): “Matemáticas de las Operaciones Financieras”. Editorial AC. Madrid.

González Velasco, M.C. (2001): “Análisis de las operaciones financieras: 150 supuestos resueltos”. Civitas Ediciones. Madrid.

Miner, J. (2003): “Curso de Matemática Financiera”. Editorial McGraw-Hill. Madrid.

Miralles, J.L., Gómez, P. y Miralles, M.P. (2002): “Matemáticas de las operaciones financieras. Problemas resueltos”. Universitas Editorial. Badajoz.

Tovar, J. (2006): “Operaciones financieras. Teoría y problemas resueltos”, Segunda Edición. Editorial Centro de Estudios Financieros (CEF). Madrid.