ESTALMAT-Catalunya és un projecte de

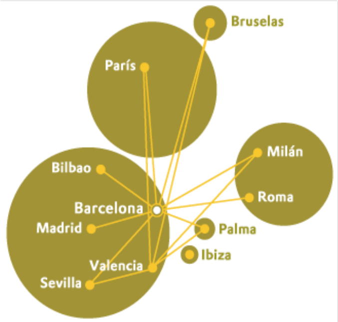
La representación y la recogida de información en el trabajo con grafos

Mireia López Beltran – Pura Fornals Sánchez
mireia.lopez.beltran@upc.edu – pfornals@xtec.cat
ICE de la UPC – INS Francesc Macià y MMACA

Introducción

En el proyecto ESTALMAT-Catalunya se realizan 21 sesiones de tres horas los sábados por la mañana durante dos cursos.

Desde hace diez años en el segundo curso de ESTALMAT-Catalunya (alumnos de 12-14 años) se realizan las sesiones de Grafos (I) y Grafos (II). La última parte de la segunda ha sufrido algunos cambios durante estos últimos años.



Esquema de la sesión - 2014

1a sesión

- Introducción al concepto de grafo → Investigación a partir de una tabla/matriz
- Introducción vocabulario y conceptos sobre grafos

2a sesión

- Dibujos de un solo trazo
- El problema de los puentes de Köningsberg
- Los laberintos

Esquema de la sesión – 2016 i 2017

1a sesión

- Introducción al concepto de grafo → Investigación a partir de una tabla/matriz
- Introducción vocabulario y conceptos sobre grafos

2a sesión

- Dibujos de un solo trazo
- El problema de los puentes de Köningsberg
- Los laberintos
- Torres de Hanoi
- Desarrollo planar volúmenes

Esquema de la sesión – 2018

1a sesión

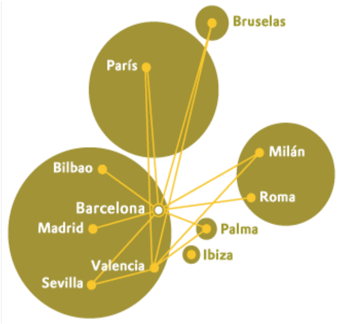
- Introducción al concepto de grafo → Investigación a partir de una tabla/matriz
- Introducción vocabulario y conceptos sobre grafos

2a sesión

- Dibujos de un solo trazo
- El problema de los puentes de Köningsberg
- Torres de Hanoi

Introducción a los grafos - Investigación

La primera sesión empieza planteándoles la siguiente situación:



El diagrama de vuelos de Vueling
El diagrama de arriba muestra las ciudades que conectan los vuelos de la aerolínea Vueling. En este tipo de diagramas, los segmentos que conectan dos puntos se llaman **aristas**. Un punto del cual salen dos a más aristas se llama **vértice**.

El gráfico de vuelos se puede acompañar de una tabla de conexiones :

	LLEGADA									
	Barcelona	Bilbao	Bruselas	Madrid	Milán	París	Palma	Roma	Sevilla	Valencia
Barcelona	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
Bilbao	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Bruselas	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Madrid	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Milán	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
París	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Palma	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Roma	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Sevilla	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Valencia	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0

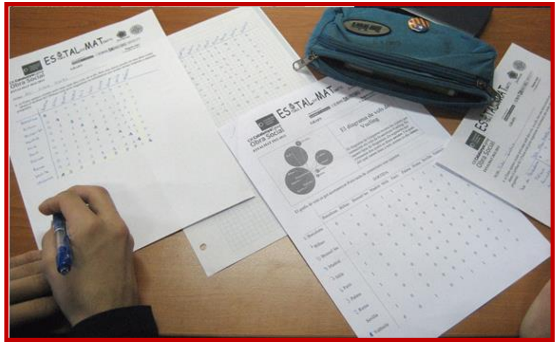
A partir de esta información se les hacen las siguientes preguntas:

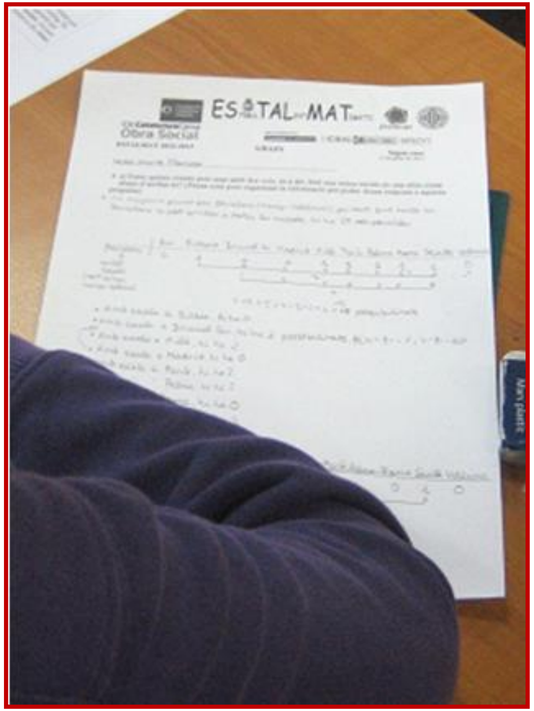
1. ¿Qué pensáis que significan los ceros y unos que aparecen?
2. Decidid si estas afirmaciones son ciertas:
   - No hay vuelos de Roma a Madrid
   - Desde Valencia, hay cuatro conexiones directas a otras ciudades
   - Los vuelos son siempre de ida y vuelta
   - La ciudad de Sevilla se encuentra más aislada que Madrid.
3. Vueling quiere conectar, sin hacer ninguna escala, cada una de las diez ciudades con todo el resto mediante vuelos. ¿Cuántas conexiones se tienen que añadir?
4. **¿Entre qué ciudades puedes ir con dos vuelos, es decir haciendo una única escala en otra ciudad antes de llegar? ¿Y haciendo más de una escala?**

4. a) Entre qué ciudades puedes ir con dos vuelos, es decir, haciendo una única escala en otra ciudad antes de llegar? (Piensa como puedes organizar la información para poder dar respuesta a esta pregunta)
b) Y haciendo dos escalas? Y haciendo más de dos escaleras?

Vamos a contar vuelos

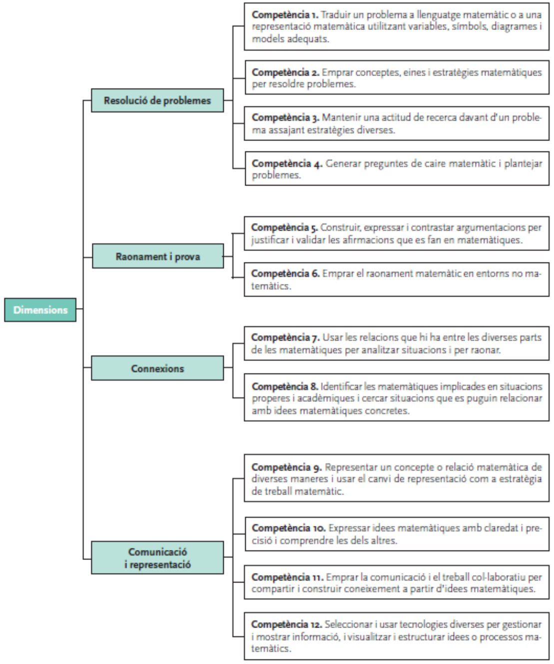
Para describir las ciudades a les que puedes ir con una escala (dos vuelos) los alumnos empiezan por hacer listas de todo tipo, más o menos exhaustivas y con diferentes tipos de codificaciones





Competencias

Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic



Comunicación y representación

Competencia 9. Representar un concepto o relación matemática de varias maneras y usar el cambio de representación como estrategia de trabajo matemático.

Competencia 9. Representar un concepto o relación matemática de varias maneras y usar el cambio de representación como estrategia de trabajo matemático.

La representación debe permitir plasmar:

- **Conceptos matemáticos** (por ejemplo, la expresión de una recta).
- **Relaciones entre conceptos** (por ejemplo, una fracción puede representar una medida, una probabilidad o una proporción, lo que acerca estos conceptos).
- **Los procedimientos algorítmicos o los de resolución de situaciones** (por ejemplo, un árbol en un problema de combinatoria).

Los alumnos pueden generar nuevas formas de representación o versiones de las estándares que el profesorado propone

Las representaciones tienen **diferentes niveles de abstracción:**

- desde las más **concretas**: como un dibujo o un esquema
- hasta **las más genuinamente matemáticas**: como los símbolos, las tablas, las figuras geométricas y los gráficos.

En algunos casos, una representación de alguna situación matemática puede tomar diferentes formas y el paso de una a la otra o la elección de la más adecuada en cada caso hace avanzar hacia su resolución.

4. a) Entre qué ciudades puedes ir con dos vuelos, es decir, haciendo una única escala en otra ciudad antes de llegar? (Piensa como puedes organizar la información para poder dar respuesta a esta pregunta)

a) Qualsevol menys BCN i València a tota la resta. Des d'aquestes dues pots anar a aquestes dues.

Una escala

1. De qualsevol ciutat a qualsevol altra menys Barcelona i València, passant per Barcelona.

2. De Barcelona a València i a l'inversa.

a)

València - Barcelona
Barcelona - València
Palma - Madrid
Madrid - Palma
Palma - Seville
Seville - Palma
Palma - Bilbao
Bilbao - Palma
Palma - Paris
Paris - Palma
Palma - Brusseles
Brusseles - Palma

Palma - Milan
Milan - Palma
Palma - Rome
Rome - Palma
Rome - Brusseles
Brussel·les - Rome
Rome - Paris
Paris - Rome
Rome - Bilbao
Bilbao - Rome
Rome - Madrid
Madrid - Rome
Rome - Seville
Seville - Rome

Rome - Milan
Milan - Rome
Milan - Seville
Seville - Milan
Milan - Madrid
Madrid - Milan
Milan - Bilbao
Bilbao - Milan
Milan - Paris
Paris - Milan
Milan - Brussel·les
Brussel·les - Milan
Brussel·les - Paris
Paris - Brusseles
Brussel·les - Bilbao

Bilbao - Brussel·les
Brussel·les - MAD
MAD - BR
BR - SEV
SEV - BR
PAR - BIL
BIL - PAR
PAR - MAD
MAD - PAR
PAR - SEV
SEV - PAR
BIL - MAD
MAD - BIL
BIL - SEV
SEV - BIL
SEV - MAD
MAD - SEV *

¿Y de cuántas maneras?

Hay 58 posibilidades. Faltan las 10 diagonales Barcelona-Barcelona, etc.

4a) BCN { → Brussel·les, → Milà, → París, → Palma, → Sevilla } València

{ BCN - València
{ Bilbao - Brussel·les
Bilbao - Madrid
Bilbao - Milà
Bilbao - París
Bilbao - Palma
Bilbao - Roma
Bilbao - Sevilla
{ Brussel·les - Bilbao
Brus. - Madrid
Brus. → Milà
Brus. - París
Brus. - Palma
Brus. → Roma
Brus. - Sevilla

Bilbao { → BCN, ~~→ València~~ } Brussel·les

Bilbao { → BCN → Madrid

Bilbao { → BCN, ~~→ València~~ } Milà

Bilbao { → BCN, ~~→ València~~ } París

Bilbao { → BCN, ~~→ València~~ } Palma

Bilbao → BCN → Roma

Bilbao { → BCN, ~~→ València~~ } Sevilla

Brussel·les { BCN, València } Bilbao (BCN), Madrid (BCN), Milà (BCN/Val), París (BCN/Val), Palma (BCN/Val.), Roma (BCN), Sevilla (BCN/Val.)

Bcn a València

Bcn - París - València
Bcn - Brussel·les - València
Bcn - Sevilla - València
Bcn - Palma - València
Bcn - Milan - València } 5

Palma - Sevilla

Palma - València - Sevilla
Palma - Bcn - Sevilla } 2

Palma - Milan

Palma - Bcn - Milan
Palma - València - Milan } 2

Palma - Roma

Palma - Bcn - Roma } 1

Palma - Brussel·les

Palma - València - Brussel·les
Palma - Bcn - Brussel·les } 2

Palma - París

Palma - Bcn - París
Palma - València - París } 2

Palma - Bilbao

Palma - Bcn - Bilbao 1

Palma - Madrid

Palma - Bcn - Madrid 1

Bilbao → Brussel·les (1 manera, passant per Barcelona)
Bilbao → Madrid (1 manera, passant per Barcelona)
Bilbao → Milà (1 manera, Barcelona)
Bilbao → París (1 manera, Barcelona)
Bilbao → Palma (1 manera, Barcelona)
Bilbao → Roma (1 manera, Barcelona)
Bilbao → Sevilla (1, Barcelona)

Brussel·les → Madrid (1, Barcelona)
Brussel·les → Milà (2, Barcelona i València)
Brussel·les → París (2, Barcelona i València)
Brussel·les → Palma (2, Barcelona i València)
Brussel·les → Roma (1, Barcelona)
Brussel·les → Sevilla (2, Barcelona i València)

Madrid → Milà (1, Barcelona)
Madrid → París (1, Barcelona)
Madrid → Palma (1, Barcelona)
Madrid → Roma (1, Barcelona)
Madrid → Sevilla (1, Barcelona)

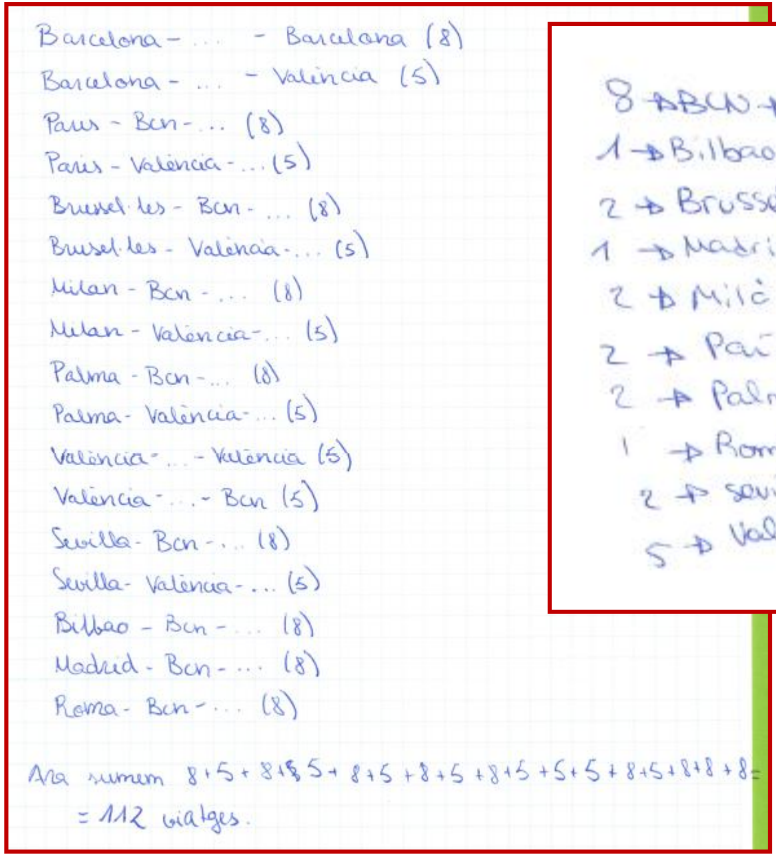
París → Palma (2, Barcelona, València)
París → Roma (1, Barcelona)
París → Sevilla (2, Barcelona, València)

Milà → París (2, BCN i València)
Milà → Sevilla (2, BCN i València)
Milà → Palma (2, BCN i València)
Milà → Roma (1, BCN)

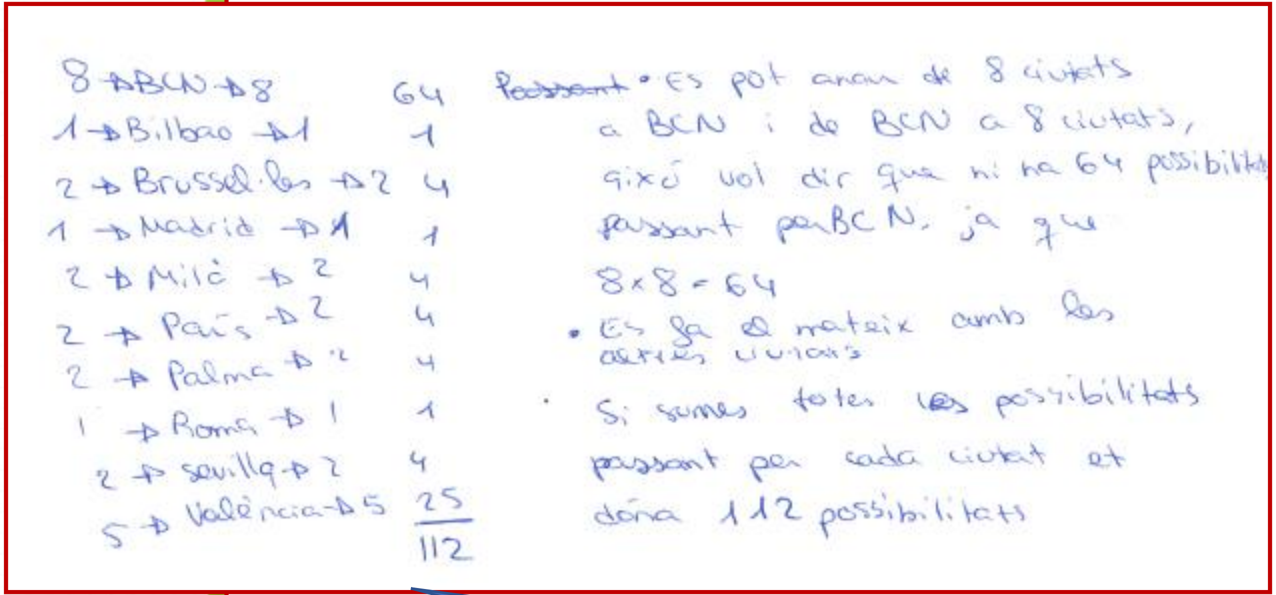
Palma → Roma (1, BCN)
Palma → Sevilla (2, BCN i València)
~~Palma~~

Roma → Sevilla (1, BCN)

Barcelona → València (5, Brussel·les, Milà, París, Palma, Sevilla)

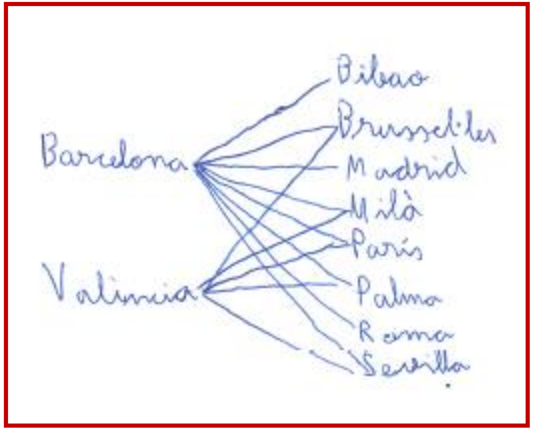

Barcelona - ... - Barcelona (8)
Barcelona - ... - València (5)
París - Bcn - ... (8)
París - València - ... (5)
Brussel·les - Bcn - ... (8)
Brussel·les - València - ... (5)
Milan - Bcn - ... (8)
Milan - València - ... (5)
Palma - Bcn - ... (8)
Palma - València - ... (5)
València - ... - València (5)
València - ... - Bcn (5)
Sevilla - Bcn - ... (8)
Sevilla - València - ... (5)
Bilbao - Bcn - ... (8)
Madrid - Bcn - ... (8)
Roma - Bcn - ... (8)

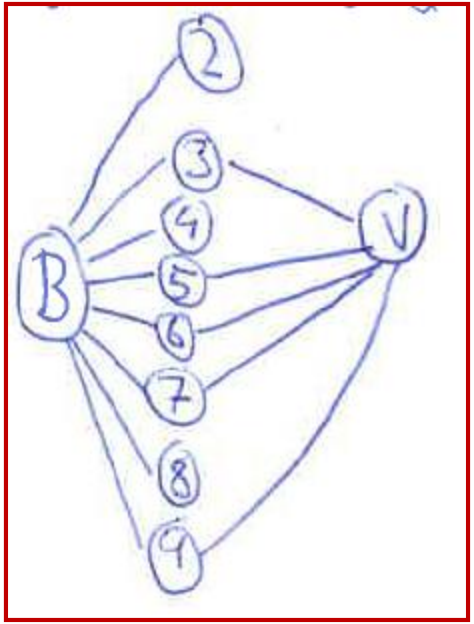
Ara sumem 8+5+8+5+8+5+8+5+8+5+5+5+8+5+8+8+8=
= 112 viatges.

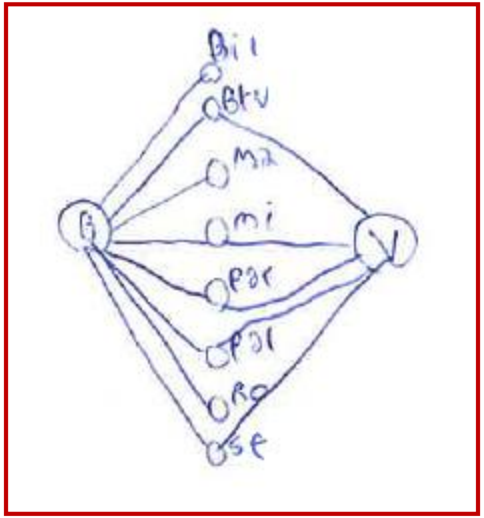

8 → BCN → 8   64
1 → Bilbao → 1   1
2 → Brussel·les → 2   4
1 → Madrid → 1   1
2 → Milà → 2   4
2 → París → 2   4
2 → Palma → 2   4
1 → Roma → 1   1
2 → Sevilla → 2   4
5 → València → 5   25
112

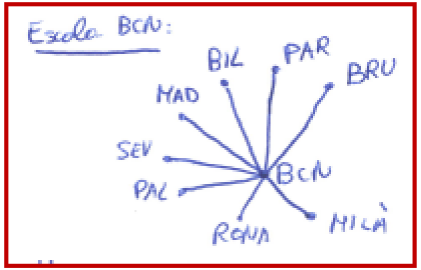
~~Passant~~
- Es pot anar de 8 ciutats a BCN i de BCN a 8 ciutats, això vol dir que hi ha 64 possibilitats passant per BCN, ja que $8 \times 8 = 64$
- Es fa el mateix amb les altres ciutats
- Si sumes totes les possibilitats passant per cada ciutat et dóna 112 possibilitats

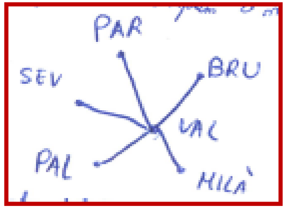
¿Podemos representarlo de una manera más compacta?


Barcelona
València
Bilbao
Brussel·les
Madrid
Milà
París
Palma
Roma
Sevilla


B
2
3
4
5
6
7
8
9
V


B
Bil
Bru
Ma
Mi
Par
Pal
Ro
Se
V

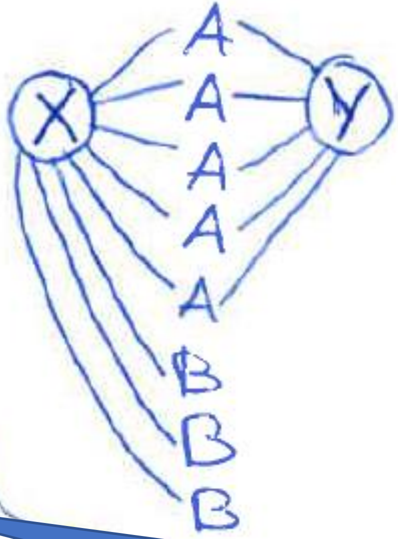

Escola BCN:
BIL
PAR
BRU
MAD
SEV
PAL
BCN
ROMA
MILÀ


PAR
SEV
BRU
VAL
PAL
MILÀ

X = BCN Y = València A = Ciutats conectades amb X y Y
B = " " només " "

A - Y - A
A - X - A
B - X - B
A - X - B
X - A - X
X - B - X
Y - A - Y
X - A - Y

①	X	A	B	Y
X	0	1	1	0
A	1	0	0	1
B	1	0	0	0
Y	0	1	0	0



¿Podemos representarlo en una tabla como la del enunciado?

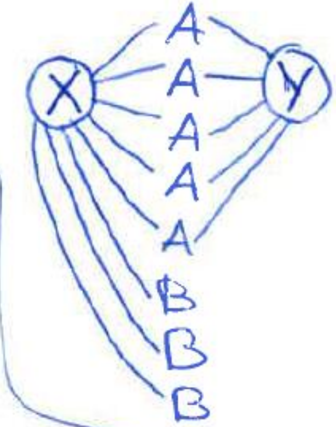
	BCN	Bil	Br	Ma	Mil	Par	Pal	Rom	Sev	Val
BCN	8	0	0	0	0	0	0	0	0	5
Bil	0	8	1	1	1	1	1	1	1	0
Br	0	1	2	1	2	2	2	1	2	0
Ma	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
Mil	0	1	2	1	2	2	2	2	2	0
Par	0	1	2	1	2	2	2	1	2	0
Pal	0	1	2	1	2	2	2	1	2	0
Rom	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
Sev	0	1	2	1	2	2	2	1	2	0
Val	5	0	0	0	0	0	0	0	0	5

X = BCN Y = València A = Ciutats conectades amb X y Y
B = " " només " "

A - Y - A
A - X - A
B - X - B
A - X - B
X - A - X
X - B - X
Y - A - Y
X - A - Y

②

	X	A	B	Y
X	8	0	0	5
A	0	2	1	0
B	0	1	1	0
Y	5	0	0	5



①

	X	A	B	Y
X	0	1	1	0
A	1	0	0	1
B	1	0	0	0
Y	0	1	0	0

4. a) Entre qué ciudades puedes ir con dos vuelos, es decir, haciendo una única escala en otra ciudad antes de llegar? (Piensa como puedes organizar la información para poder dar respuesta a esta pregunta)

b) Y haciendo dos escalas? Y haciendo más de dos escaleras?

b)i) De qualsevol ciutat excepte BCN i VAL pots anar només a BCN o VAL, i al revés.

	Bcn	Bilbao	Brussel·les	Madrid	Milà	Paris	Palma	Roma	Sevilla	València
Bcn	0	8	13	8	13	13	13	8	13	0
Bilbao	8	0	0	0	0	0	0	0	0	5
Brussel·les	13	0	0	0	0	0	0	0	0	10
Madrid	8	0	0	0	0	0	0	0	0	5
Milà	13	0	0	0	0	0	0	0	0	10
Paris	13	0	0	0	0	0	0	0	0	10
Palma	13	0	0	0	0	0	0	0	0	10
Roma	8	0	0	0	0	0	0	0	0	5
Sevilla	13	0	0	0	0	0	0	0	0	10
València	0	5	10	5	10	10	10	5	10	0

X = BCN   Y = València   A = Ciutats conectades amb X y Y
B = " " només " "

A - Y - A
A - X - A
B - X - B
A - X - B
X - A - X
X - B - X
Y - A - Y
X - A - Y

2

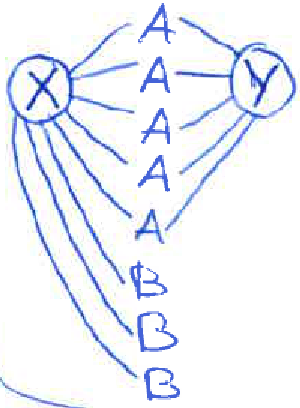
	X	A	B	Y
X	8	0	0	5
A	0	2	1	0
B	0	1	1	0
Y	5	0	0	5

3

	X	A	B	Y
X	0	13	8	0
A	13	0	0	10
B	8	0	0	5
Y	0	10	5	0

1

	X	A	B	Y
X	0	1	1	0
A	1	0	0	1
B	1	0	0	0
Y	0	1	0	0



	LLEGADA									
	Barcelona	Bilbao	Bruselas	Madrid	Milán	París	Palma	Roma	Sevilla	Valencia
Barcelona	0	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	0
Bilbao	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Bruselas	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Madrid	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Milán	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	1
París	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Palma	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Roma	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Sevilla	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Valencia	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0

	UNA ESCALA – DOS VUELOS									
	Barcelona	Bilbao	Bruselas	Madrid	Milán	París	Palma	Roma	Sevilla	Valencia
Barcelona	**8**	0	0	0	0	0	0	0	0	**5**
Bilbao	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
Bruselas	0	1	2	1	2	2	2	1	2	0
Madrid	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
Milán	0	1	2	1	2	2	2	1	2	0
París	0	1	2	1	2	2	2	1	2	0
Palma	0	1	2	1	2	2	2	1	2	0
Roma	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
Sevilla	0	1	2	1	2	2	2	1	2	0
Valencia	**5**	0	0	0	0	0	0	0	0	**5**

Torres de Hanoi y grafos

"El juego de las torres de Hanoi consiste en tres varillas verticales y un número indeterminado de discos de medidas diferentes que determinan la complexidad de la solución. En un inicio están colocados de mayor a menor en la primera varilla. El juego consiste en pasar todos los discos a la tercera varilla teniendo en cuenta que sólo se puede de varilla un disco cada vez y que nunca podemos tener un disco situado sobre otro que sea más pequeño". Lo podemos encontrar en diferentes formatos:


Parque de las Ciencias, Granada


Matemàtica Viva, Lisboa


Ciència Viva, Lisboa

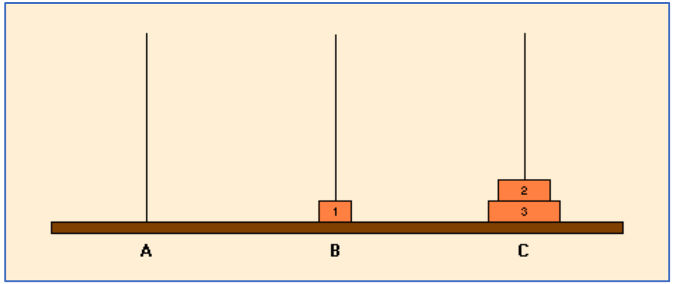

Mathematikum de Giesen,
Alemania

La idea de la sesión es fijarnos en un razonamiento constructivo que nos permita encontrar una recurrencia para resolver el problema. Además, después de algunas pruebas, este juego nos permite entender la necesidad de reducir un problema a otro menor para resolverlo paso a paso y poder generalizarlo después.

Nos interesa ver la manera óptima de mover las piezas, es decir, con el mínimo número de movimientos posible, fijándonos también en la forma de hacerlo con más movimientos.
Para ello usaremos los grafos, representando estos movimientos veremos cómo, a partir de un triángulo equilátero, aparece el triángulo de Sierpinski.

Lo primero que necesitamos es una buena notación:

En una torre de tres piezas, la posición de la imagen se podría indicar con BCC: El disco 1 en la columna B, el disco 2 en la columna C i el disco 3 en la columna C.

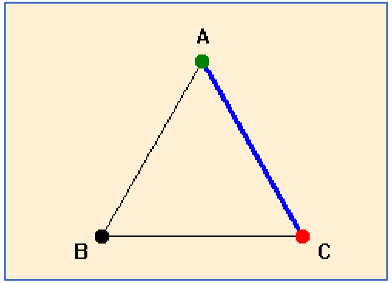


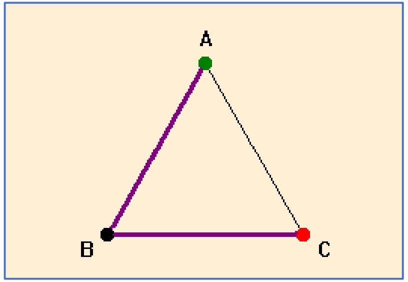
Fácilmente podemos calcular que hay 3^n maneras de situar las 3 piezas en las tres columnas.

Todas estas situaciones, y los movimientos posibles, se pueden representar con un grafo.

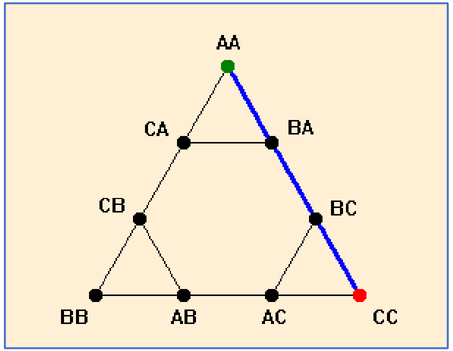
Empecemos con el caso más simple, un solo disco:

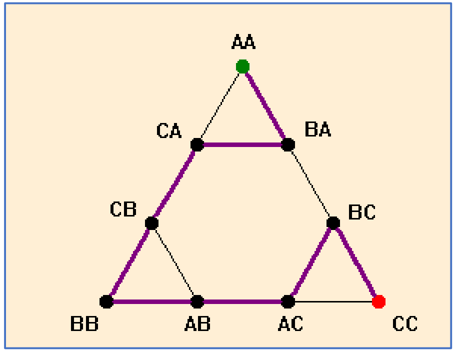
Está claro que para pasar de A a C lo podemos hacer directamente, o bien pasando primero per B (tal como se ve en los dibujos). Aquí tenemos representados el camino más corto y el más largo posibles.





En el caso de dos piezas tenemos estos grafos, que nos indican el camino más corto y el más largo, respectivamente. El segundo pasa por todas las posibles posiciones.

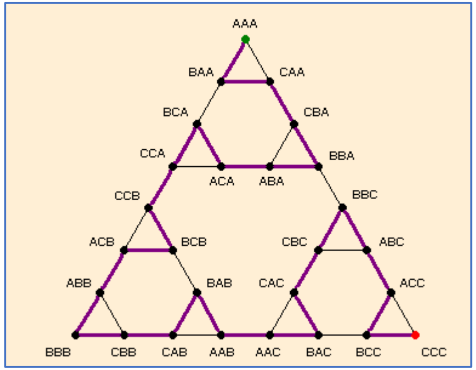


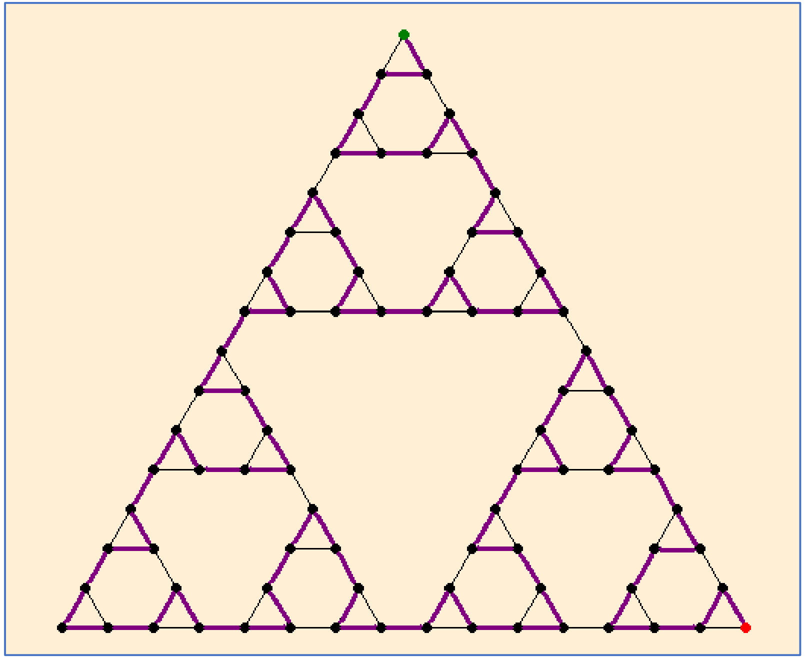


Como podemos deducir, el camino más corto será siempre el que pasa por el lateral derecho de la figura y no tiene mayor interés, en cambio en el caso de los caminos más largos observemos lo que pasa.

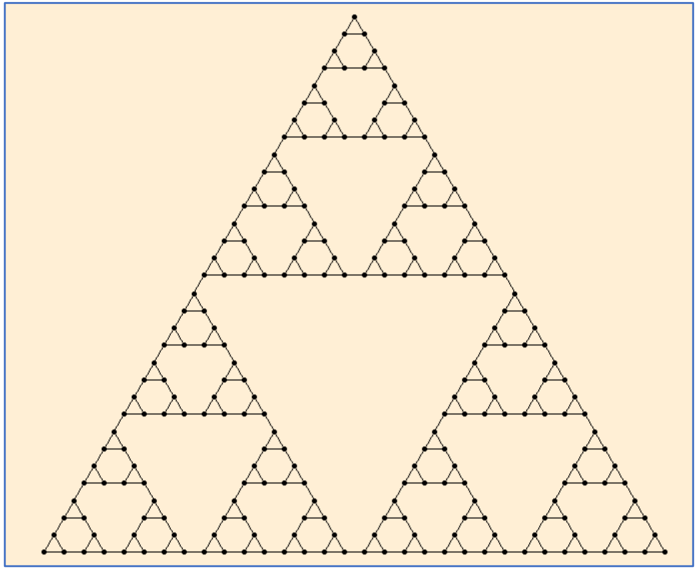
Aquí tenemos el camino más largo con tres piezas y con cuatro (sin las letras).

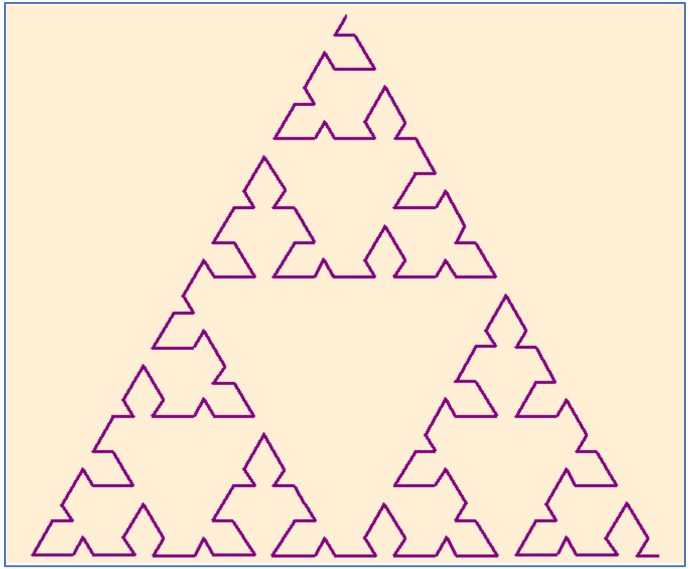
Observemos en estos grafos la recurrencia existente con el caso de orden inmediatamente inferior:





A la izquierda tenemos todos los movimientos posibles en el caso n = 5 y a la derecha el camino más largo, tiene 242 pasos mientras que el más corto sólo tiene 31.





Está claro que el juego conviene resolverlo con el mínimo número de pasos, pero con el camino más largo obtenemos un grafo mucho más interesante.

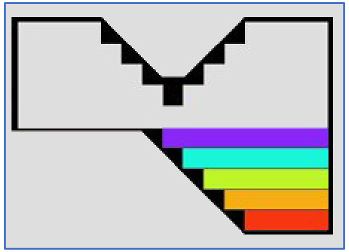
Obsérvese que los grafos que nos muestran todos los movimientos posibles cumplen la siguiente recurrencia:

> El grafo de orden n se construye a partir del de orden n-1, y está formado por tres grafos de orden n-1 conectados por tres líneas que corresponden a movimientos del disco n.

Estos casos nos recuerdan al triángulo de Sierpinski y a los fractales que se trabajan en otra sesión de Estalmat.

Para jugar un rato

Para jugar en posición inversa:



Para jugar y ver los movimientos en un grafo: