Sessión ESTALMAT-Comunitat Valenciana
Las matemáticas del cubo de Rubik

Ramón Esteban Romero
resteban@mat.upv.es

15 de enero de 2011

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El cubo de Rubik es un rompecabezas mecánico inventado por el escritor y profesor de arquitectura húngaro Ernő Rubik en 1974. Se trata de un cubo cuyas caras tienen cada una nueve pegatinas y que consta de un ingenioso dispositivo mecánico que permite que sus caras giren y las pegatinas cambien de posición. El rompecabezas consiste en conseguir que las seis caras del cubo muestren un único color.

Aunque parezca paradójico, no me he aprendido un algoritmo que me permita resolver el cubo de Rubik sin consultar con un libro. Pero espero que al final de estas sesiones podáis entender los aspectos más básicos de las matemáticas del cubo de Rubik. Estas matemáticas son, esencialmente, una parte de la llamada «teoría de grupos». No pretendemos que el lector sea capaz de resolver el cubo en un tiempo rápido, pero sí será posible que pueda diseñar su propio método de resolución del cubo en cuanto haya asimilado algunas nociones básicas. Contaremos también cuántas disposiciones distintas hay en el cubo de Rubik.

Capítulo 2

Nociones básicas

2.1. Notación

Ejercicio 2.1.1. *¿Qué pasa con las piezas centrales de las caras cuando hacemos girar estas últimas? ¿Qué pasa con las aristas y con los vértices?*

Las piezas centrales de cada cara siempre se quedan en su sitio (aunque pueden girar). Así, pues, podemos determinar cuál es el color de una cara cuando el cubo queda resuelto si miramos el de su pieza central.

Como la disposición de los colores en las caras del cubo puede variar de cubo en cubo, es interesante disponer de una notación que no dependa de los colores de las caras ni de la orientación. En castellano nos referiremos a las caras mediante las iniciales de las siguientes palabras:

- Derecha
- Izquierda
- Frontal
- Trasera
- Arriba
- Bajo

Elegimos estas palabras para que las iniciales sean todas diferentes dos a dos.

Podemos usar ahora nuestras seis letras para designar las seis caras, así como varias piezas y posiciones. Por ejemplo, las cuatro piezas centrales de las aristas correspondientes a la cara A (en lo sucesivo, les diremos simplemente aristas), serán AD, AF, AI y AT, mientas que las cuatro piezas de los vértices correspondientes a la cara A (en lo sucesivo, simplemente vértices) serán ADF, AFI, AIT y ATD. Notemos que AD y DA son la misma pieza. Los colores de los vértices se ordenarán en el sentido de las manecillas del reloj. De este modo, ADF, DFA y FAD denotarán la misma pieza.

Usaremos también los nombres de las caras para referirnos a movimientos de un cuarto de vuelta en el sentido de las agujas del reloj, como si estuviéramos mirando la cara desde enfrente de ella. Por ejemplo, D denotará el giro de un cuarto de vuelta en sentido horario de la cara de la derecha. El de media vuelta de la cara D, en sentido horario o antihorario, da lo mismo, lo denotaremos mediante D^2, porque corresponde a hacer dos giros de un cuarto de vuelta en sentido horario. El giro de un cuarto de vuelta en sentido antihorario lo denotaremos mediante D^3 o D^{-1}. Por comodidad, algunos textos lo representan por D'.

Una secuencia de movimientos se escribe de izquierda a derecha. Por ejemplo, DA significa que primero se aplica D y luego A.

Ejercicio 2.1.2. *¿Da lo mismo hacer DA que AD? ¿Qué opinión os merece ahora aquello de que* el orden de los factores no altera el producto*?*

Los movimientos del cubo modifican la colocación de las $6 \cdot 9 = 54$ pegatinas del cubo (en realidad, nos bastarían $6 \cdot 8 = 48$, ya que las pegatinas centrales no se desplazan de sitio). Esta modificación de la situación de las piezas se llama una *permutación*. Antes de empezar a estudiar las permutaciones que se pueden dar en el cubo, empezaremos con un ejemplo más sencillo, el de las simetrías del cuadrado.

2.2. Simetrías del cuadrado

En el apéndice A puedes recortar el cuadrado que aparece en la figura A.2 (página 19). Si por algún defecto en la impresión a doble cara no coincide con el cuadrado de la parte de detrás, copia las letras de las esquinas en la misma posición en la parte de atrás, como si estuvieras calcándolas del otro lado.

Lo primero que vamos a hacer es estudiar las simetrías del cuadrado, esto es, los movimientos del cuadrado como cuerpo rígido que lo devuelven a su lugar original, aunque quizás en distinta posición. Para ello puedes usar el cuadrado de la figura A.1 (página 18) para representar la posición original del cuadrado. Es posible que alguna simetría exija levantar el cuadrado del plano del papel y darle la vuelta fuera del plano.

La figura 2.1 representa un giro de un cuarto de vuelta en el sentido de las agujas del reloj del cuadrado, que denotaremos por R (de rotación). La figura 2.2 corresponde a una simetría respecto de un eje vertical que pasa por el centro del cuadrado, que denotaremos por V (de simetría vertical).

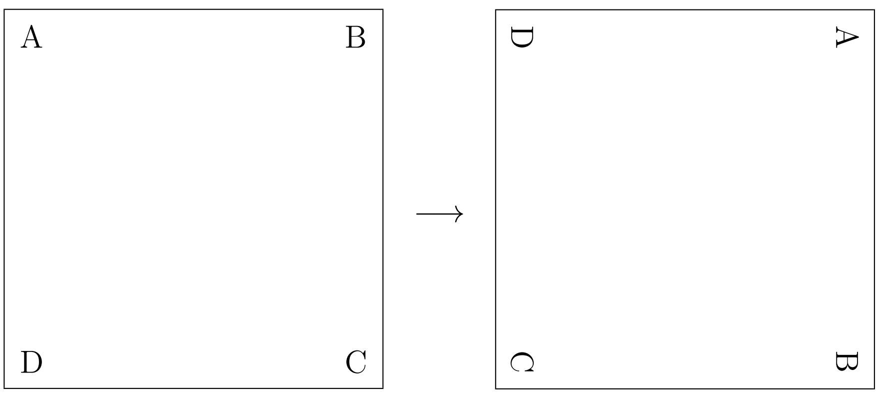

Figura 2.1: Rotación del cuadrado

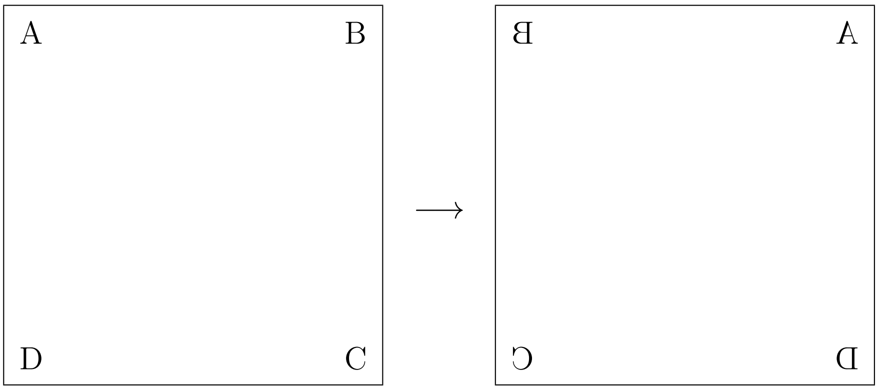

Figura 2.2: Simetría del cuadrado

Hay dos maneras distintas de entender la permutación de las letras A, B, C y D del cuadrado. Podemos considerar que la acción es «se desplaza a» o «se sustituye por». También podemos considerar que la permutación actúa sobre las siglas o símbolos, independientemente de su posición, o que actúa sobre el contenido de las posiciones, independientemente del símbolo que ocupe actualmente esta posición. Estas distinciones serán importantes cuando multipliquemos permutaciones. Podemos representar las permutaciones anteriores con ambos criterios como se ve en el cuadro 2.1.

$$\begin{array}{ccc} & \text{«se desplaza a»} & \text{«se sustituye por»} \\ R = & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ B & C & D & A \end{array} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ D & A & B & C \end{array} \\ V = & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ B & A & D & C \end{array} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ B & A & D & C \end{array} \end{array}$$

Cuadro 2.1: Representación de dos permutaciones con dos criterios

Obviamente podríamos dejar R como $[B, A, D, C]$, eliminando las flechas y la fila superior. Notemos que la forma «se desplaza a» de una permutación es la *inversa* de la forma «se sustituye por», y podría obtenerse invirtiendo las flechas de la representación: por ejemplo, al invertir las flechas de R tenemos $\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ B & C & D & A \end{array}$, o sea, $\begin{array}{cccc} B & C & D & A \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ A & B & C & D \end{array}$, que escrito en orden sería $\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ D & A & B & C \end{array}$.

Nosotros usaremos la forma «se desplaza a» para referirnos a las permutaciones. El resultado de aplicar primero R y luego V se llama *producto* de R y V. Lo representaremos mediante RV. Notemos que en muchos libros este producto aparecería como VR, pero creo que la notación RV es más conveniente para nuestros propósitos. Por ejemplo,

$$RV = \begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ B & C & D & A \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ A & D & C & B \end{array} = \begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ A & D & C & B \end{array}$$

Hay una simetría destacada, que consiste en no hacer nada. La representaremos como Id (de *identidad*). Evidentemente, multiplicar por Id es como no hacer nada: es como multiplicar por 1 en números.

Ejercicio 2.2.1. *Comprueba que las simetrías del cuadrado son* Id*,* R*,* R^2*,* R^3*,* V*,* H *(reflexión respecto de un eje horizontal que pase por el centro),* D_1 *(reflexión respecto de una diagonal que pase por los vértices* A *y* C *en la posición original) y* D_2 *(reflexión respecto de una diagonal que pase por los vértices* B *y* D *en la posición original). Comprueba también que la tabla de multiplicar (primer factor a la izquierda, segundo arriba) es la dada por*

	Id	R	R^2	R^3	V	H	D_1	D_2
Id	Id	R	R^2	R^3	V	H	D_1	D_2
R	R	R^2	R^3	Id	D_1	D_2	H	V
R^2	R^2	R^3	Id	R	H	V	D_2	D_1
R^3	R^3	Id	R	R^2	D_2	D_1	V	H
V	V	D_2	H	D_1	Id	R^2	R^3	R
H	H	D_1	V	D_2	R^2	Id	R	R^3
D_1	D_1	V	D_2	H	R	R^3	Id	R^2
D_2	D_2	H	D_1	V	R^3	R	R^2	Id

Comprueba también que $R^4 = V^2 = H^2 = D_1^2 = D_2^2 = \mathrm{Id}$.

Al seguir al revés el proceso realizado para obtener una permutación P, nos queda la permutación *inversa* P^{-1} de la dada. Observa que $PP^{-1} = \mathrm{Id}$ y que $P^{-1}P = \mathrm{Id}$.

2.3. Notación de ciclos

Ahora vamos a ver una notación que es muy interesante para describir permutaciones. Dada una permutación P, el resultado de aplicar sucesivamente P nos dará lugar a P, P^2, P^3, $P^4, \ldots$. En lo sucesivo supondremos que *tenemos una cantidad finita de símbolos que permutar*, como pasa en el cuadrado o en el cubo de Rubik. Consideremos uno de los símbolos, por ejemplo, S. Tiene que haber algún momento en el que al aplicar las potencias sucesivas de P a S, digamos $P(S)$, $P(S)^2$, $P(S)^3, \ldots$, tengamos alguna repetición (¡el principio del palomar!). Por ejemplo, supongamos que P^m y P^n envían S al mismo símbolo T y que $m < n$. Entonces consideramos la inversa de P y aplicamos $(P^{-1})^m$, el resultado viene a ser el mismo que si aplicamos sobre S Id y si aplicamos sobre S P^{n-m}.

En otras palabras: P^{n-m} hace que S se desplace a S. De este modo hemos encontrado que hay una potencia positiva de P que envía S a S.

Podemos quedarnos con la más pequeña de estas potencias positivas, digamos t, de manera que $P^t(S) = S$. Representamos esta situación entre paréntesis:

$$\big(S, P(S), P^2(S), \ldots, P^{t-1}(S)\big)$$

y notamos que a partir de ahí empieza a repetirse toda la secuencia. A esta expresión la llamamos *ciclo*. También vemos que da lo mismo el primer elemento que consideremos en cada ciclo: el ciclo (A, B, C, D) es igual que el ciclo (B, C, D, A).

Supongamos que en el ciclo anterior no aparecen todos los símbolos. Consideramos un símbolo distinto como principio de otro ciclo. Continuamos hasta agotar todos los símbolos. Por ejemplo, para V obtenemos dos 2-ciclos

$$V = (A, B)(C, D).$$

En el caso de R, obtenemos

$$R = (A, B, C, D).$$

Para $RV = D_1$, obtenemos

$$D_1 = (A)(B, D)(C).$$

Es habitual no escribir los ciclos de longitud 1. Por lo tanto, D_1 se puede expresar como

$$D_1 = (B, D)$$

y entendemos que A y C quedan fijos por la acción de D_1.

Observamos que la notación de ciclos describe perfectamente cada permutación, ya que así indicamos adónde se desplaza cada símbolo. La figura 2.3 es una posible representación gráfica de las expresiones cíclicas de las permutaciones R, H y D_1.

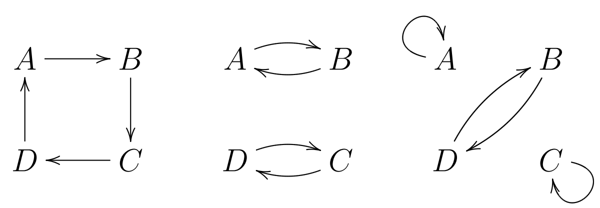

Figura 2.3: Representaciones cíclicas de R, H y D_1

Ejercicio 2.3.1. *Obtén la representación como ciclos de cada una de las simetrías del cuadrado.*

2.4. Permutaciones pares e impares

Las permutaciones de la forma (a, b) se llaman *trasposiciones*.

Ejercicio 2.4.1. *Calcula las permutaciones*

1. $(1,2)(1,3)$,
2. $(1,2)(1,3)(1,4)$,
3. $(1,2)(1,3)(1,4)(1,5)$.

Se puede comprobar que, en general,

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = (a_1, a_2)(a_1, a_3) \cdots (a_1, a_n). \tag{2.1}$$

Ejercicio 2.4.2. *Calcula* $(1,2)(1,3)$ *y* $(4,5)(3,6)(1,2)(1,6)(4,5)(3,6)$. *Deduce que la descomposición de una permutación como producto de trasposiciones no es única.*

A pesar de que el número de trasposiciones en que se descompone una permutación no es siempre el mismo, lo que sí que se tiene es que en todas las descomposiciones de una permutación dada como producto de trasposiciones, el número de trasposiciones será siempre par o siempre impar. Esto motiva la introducción del siguiente concepto:

Definition 2.4.3. Decimos que una permutación σ es *par* si puede expresarse como producto de un número par de trasposiciones, y que es *impar* si puede expresarse como producto de un número impar de trasposiciones.

Por ejemplo, la permutación $\mathrm{Id} = (1,2)(1,2)$ es par. La permutación

$$(1,2,3) = (1,2)(1,3)$$

también es par, mientras que las permutaciones $(1,2)$ y $(1,2,3,4) = (1,2)(1,3)(1,4)$ son impares. Como hemos comentado, se puede demostrar que una permutación no puede ser simultáneamente par e impar. En [3] se puede ver una demostración de que una permutación no puede descomponerse simultáneamente como producto de un número par de trasposiciones y como producto de un número impar de permutaciones. En la versión inglesa [4] hay más demostraciones.

Es inmediato comprobar:

Teorema 2.4.4. *El producto de dos permutaciones pares es par. El producto de dos permutaciones impares es par. El producto de una permutación par y de una impar, o de una impar y otra par, es una permutación impar.*

Teorema 2.4.5. *La inversa de una permutación par es par, y la inversa de una permutación impar es impar.*

Este hecho es importante para entender el cubo de Rubik.

Ejercicio 2.4.6. *¿Cuál es la paridad de un ciclo de longitud* n*? Utiliza la fórmula* (2.1).

Capítulo 3

El cubo de Rubik

3.1. Representación de permutaciones del cubo

Ya comentamos que las permutaciones del cubo de Rubik se podían entender como permutaciones de las 48 pegatinas. Por tanto, una manera de representar permutaciones del cubo es ponerlos como permutaciones de las pegatinas y usar la notación de ciclos que presentamos antes. Sin embargo, hay que tener en cuenta que las tres pegatinas de las piezas de los vértices se mueven juntas, y lo mismo se puede decir de las dos pegatinas de las piezas de las aristas. Esto nos hace que podamos simplificar la notación como producto de ciclos en el caso de movimientos del cubo de Rubik. Veamos un ejemplo. El movimiento de la cara frontal (F) puede representarse como

$$F = (FA, FD, FB, FI)(ADF, DBF, BIF, IAF)$$

Entendemos que la pieza FA pasa a la FD (la cara frontal pasa a la cara frontal y la de arriba a la derecha...), la FD a la FB... y que con las piezas de vértices, la ADF pasa a la DBF, la DBF a la BIF...

La permutación correspondiente a torcer el vértice ADF en el sentido de las agujas del reloj sería en esta notación (ADF, DFA, FAD). Para recalcar que se trata de la torsión de una pieza, la representaremos mediante $(ADF)_+$. Para representar (ADF, FAD, DFA) escribiremos $(ADF)_-$. Podemos también usar esta notación para aristas: $(AF)_+$ representa la torsión de la arista AF: (AF, FA). Para permutaciones en las que interviene más de una pieza, pero en algún paso del proceso se tuerce una de las piezas, se puede usar también esta notación:

$$(ADF, DBF, DFA, BFD, FAD, FDB) = (ADF, DBF)_+$$
$$(AF, BF, FA, FB) = (AF, BF)_+$$

Como

$$F = (FA, FD, FB, FI)(ADF, DBF, BIF, IAF)$$

y

$$D = (FD, AD, TD, BD)(ADF, TDA, BDT, FDB),$$

la composición de los movimientos F y D se representa como

$$\begin{aligned}
FD &= (FA, FD, FB, FI)(ADF, DBF, BIF, IAF) \\
&\qquad \cdot (FD, AD, TD, BD)(ADF, TDA, BDT, FDB) \\
&= (FA, FD, FB, FI)(FD, AD, TD, BD) \\
&\qquad \cdot (ADF, DBF, BIF, IAF)(ADF, TDA, BDT, FDB) \\
&= (FA, AD, TD, BD, FD, FB, FI)(ADF)_{+}(DBF, BIF, IAF, TDA, BDT)_{-}. \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

3.2. Movimientos posibles e imposibles en el cubo de Rubik

Observemos que, en lo que respecta al movimiento de piezas, cada movimiento básico se corresponde con un producto de un 4-ciclo de vértices y un 4-ciclo de aristas. De esta manera, cada movimiento básico es un producto de una permutación impar de vértices y una permutación par de aristas, es decir, una permutación par de piezas del cubo. Como el producto de permutaciones pares es siempre par, obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.2.1. *Cada uno de los movimientos del cubo induce una permutación par en el conjunto de las piezas del cubo.*

Ejercicio 3.2.2. *¿Es posible intercambiar dos vértices del cubo con movimientos legales del cubo?*

Consideremos las ocho piezas de vértices. Fijemos una orientación, la que queremos, para cada una de estas piezas. Por ejemplo,

$$\{ADF, ATD, AIT, AFI, BFD, BDT, BTI, BIF\}$$

Analicemos ahora cómo se transforman estas piezas de vértices mediante movimientos de uno de los movimientos básicos. El movimiento de la cara de arriba (A) traslada estas piezas en

$$\{AFI, AIT, ATD, ADF, BFD, BDT, BTI, BIF\}$$

y todas las piezas quedan en la misma orientación. Consideremos ahora el movimiento de la cara frontal (F). Este movimiento transforma las ocho piezas en

$$\{DFA, AIT, ATD, DBF, IFB, BDT, BTI, IAF\}$$

Notemos que la pieza AFI se tuerce a IAF (sentido antihorario), ADF se tuerce a DFA (sentido horario), BFD se tuerce a DBF (sentido antihorario) y BIF se tuerce a IFB (sentido horario). Si representamos el no girar como 0, el giro en sentido horario como $+1$ y el giro en sentido antihorario como 2 (dos giros en sentido horario), la suma de estos giros nos da un múltiplo de 3. La suma de las torsiones de todas las piezas es múltiplo de 3, o, en otras palabras, la suma es congruente con 0 módulo 3. Esto nos permite también expresar -1 en vez de 2. Con los otros movimientos básicos ocurre lo mismo. Por tanto:

Teorema 3.2.3. *Cada movimiento básico del cubo induce una torsión total en el conjunto de los vértices del cubo que es múltiplo de* 3*. Por tanto, cada movimiento del cubo induce una torsión total en el conjunto de los vértices del cubo que es múltiplo de* 3*.*

Con las piezas de las aristas podemos razonar de manera análoga. Se obtiene:

Teorema 3.2.4. *Cada movimiento básico del cubo induce una torsión total en el conjunto de las aristas del cubo que es múltiplo de* 2*. Por tanto, cada movimiento del cubo induce una torsión total en el conjunto de las aristas del cubo que es múltiplo de* 2*.*

Estos teoremas nos permiten demostrar que no es posible obtener una combinación de movimientos del cubo que nos permita torcer un vértice o una arista. Tampoco es posible torcer dos vértices en el mismo sentido. Sin embargo, estos argumentos no permiten descartar la posibilidad de torcer dos aristas o torcer dos vértices en sentido contrario, o torcer tres vértices en el mismo sentido. De hecho, estos últimas combinaciones se pueden obtener usando movimientos del cubo, pero eso lo veremos más adelante.

3.3. Algunos movimientos interesantes

Consideremos dos caras consecutivas del cubo, por ejemplo, las caras F y D. Se tiene que la repetición tres veces de media vuelta de la cara F y media vuelta de la cara D nos da

$$P_1(F, D) = (F^2D^2)^3 = (AF, BF)(AD, BD).$$

Vemos que el este movimiento intercambia los pares de aristas (AF, BF) y (AD, BD). Si quisiéramos intercambiar $(FI, FD)(AF, BF)$, observamos que si hacemos los movimientos $AB^{-1}F$ tenemos el cubo en la situación del procedimiento que acabamos de presentar. Aplicamos este procedimiento y deshacemos los movimientos iniciales. Concluimos que

$$AB^{-1}F(F^2D^2)^3F^{-1}BA^{-1} = (FI, FD)(AF, BF).$$

Decimos que este movimiento es *un conjugado* de $(F^2D^2)^3$. La conjugación tiene un papel muy importante en teoría de grupos. En principio nos permite intercambiar dos pares de aristas cualesquiera siempre que seamos capaces de colocarlas en una posición en la que se pueda aplicar el procedimiento anterior.

El 3-ciclo $(1, 2, 3)$ puede expresarse en la forma $(1, 2)(1, 3)$. Si hacemos intervenir otros dos elementos, podemos expresar

$$(1, 2, 3) = (1, 2)(4, 5)(1, 3)(4, 5).$$

Por tanto, si deseamos obtener un 3-ciclo de aristas, basta con hacer una descomposición de este tipo y mediante conjugados adecuados será posible realizar un 3-ciclo de aristas. Cualquier otra permutación de aristas será posible mediante conjugados adecuados (si bien puede ser laborioso este proceso). Esto nos lleva a ver que toda permutación par se puede obtener mediante producto de conjugados de procedimientos del tipo $(F^2D^2)^3$. Por lo tanto:

Teorema 3.3.1. *Es posible obtener cualquier permutación par de piezas de aristas mediante movimientos del cubo.*

Veamos ahora cómo podemos cambiar la orientación de dos aristas con estos procedimientos. Por ejemplo, la siguiente conjugación nos permite obtener la permutación $(AF, FB)(AD, BD)$:

$$B^2FDAD^{-1}B^2(F^2D^2)^3B^2DA^{-1}D^{-1}F^{-1}B^2 = (AF, FB)(AD, BD).$$

Si la multiplicamos por $(F^2D^2)^3$, obtenemos

$$B^2FDAD^{-1}B^2(F^2D^2)^3B^2DA^{-1}D^{-1}F^{-1}B^2(F^2D^2)^3 = (AF)_+(FB)_+.$$

De este modo, con conjugados adecuados de este procedimiento es posible obtener todas las torsiones de un par de aristas cualesquiera.

Para trabajar con vértices, utilizaremos un movimiento muy conocido llamado *conmutador*:

$$P_2(F, D) = FDF^{-1}D^{-1} = (ADF, AFI)_+(DBF, DTB)_-(AF, DF, DB).$$

Más interesantes son el cuadrado y el cubo de este procedimiento:

$$\begin{aligned} P_3(F, D) &= \big(P_2(F, D)\big)^2 = (ADF)_+(AFI)_+(DBF)_-(TBD)_-(AF, DB, DF) \\ P_4(F, D) &= \big(P_2(F, D)\big)^3 = (AFD, FIA)(BDT, DBF). \end{aligned}$$

Los conjugados de movimientos de tipo P_4 nos permiten obtener todas las permutaciones pares de piezas de vértices. Si la permutación de las piezas de vértices fuera impar, moveríamos un cuarto de vuelta una cara, con lo que la permutación de vértices sería par. Entonces podríamos colocar las piezas de vértices en sus posiciones, siguiendo pasos parecidos a los que usábamos con las aristas. Con conjugados de movimientos de tipo P_3 podemos orientar los vértices (aunque descoloquemos las aristas). Por ejemplo, si quisiéramos obtener $(ADF)_+(AIT)_-$ (con quizás algún movimiento de aristas), aplicaríamos

$$P_3(F, D)A\big(P_3(F, D)\big)^{-1}A^{-1}.$$

Ejercicio 3.3.2. *Convéncete de que es posible torcer cualquier par de vértices del cubo en orientaciones distintas, o cualesquier tres vértices del cubo en el mismo sentido, aunque para ello se intercambien aristas de sitio. ¿Es posible obtener una sucesión de movimientos del cubo que tuerza dos vértices en distinta orientación y dejando fijas las aristas? ¿Y con tres vértices en la misma orientación?*

3.4. Métodos de resolución del cubo de Rubik

Los procesos anteriores nos permiten resolver el cubo de Rubik de la siguiente manera:

1. Si los vértices forman una permutación impar, efectuamos el movimiento A.

2. Colocamos los vértices en su sitio aplicando combinaciones de conjugados de movimientos de tipo P_4.

3. Orientamos los vértices aplicando combinaciones de conjugados de movimientos de tipo P_3.

4. Colocamos las aristas (que deben formar una permutación par) y las orientamos con movimientos de tipo P_2.

Con este proceso vemos que es posible resolver el cubo de Rubik, aunque el proceso puede ser muy laborioso y las combinaciones sean difíciles de obtener.

Los métodos de resolución del cubo de Rubik se basan en tener una colección de movimientos que permitan dejen fijas algunas posiciones que ya tengamos construidas. Por ejemplo, en el algoritmo que acabamos de describir, buscamos primero métodos que orienten los vértices sin cambiarlos de sitio (basados en P_3) y después métodos que coloquen las aristas sin mover los vértices (basados en P_1). Otro algoritmo muy conocido empieza por:

1. colocar las aristas de una cara (por ejemplo, A),

2. colocar los vértices de esa cara sin mover sus aristas,

3. colocar las aristas de la parte central (paralela a la cara), sin alterar la cara ya hecha,

4. orientar las aristas de la cara opuesta B sin mover las piezas de A ni la sección central,

5. colocar las aristas de B de manera que formen una permutación par si es necesario mediante un giro de B,

6. colocar en su sitio las aristas de B sin alterar las piezas de A ni la sección central,

7. colocar los vértices de B sin alterar los demás vértices ni las aristas y, finalmente,

8. orientar los vértices de B sin mover las demás caras.

También se basa en tener una serie de combinaciones de movimientos que permitan hacer cada paso respetando todo lo realizado antes. Es posible construir estos movimientos a partir de P_1 y P_2.

Los métodos que utilizan los expertos en resolución del cubo se basan en una enorme colección de movimientos, pero siguen el esquema de ir usando métodos que vayan completando cada vez una parte mayor del cubo... aunque no veamos piezas colocadas en su sitio.

3.5. Número de movimientos del cubo de Rubik

Según hemos dicho, es posible colocar los vértices y las aristas en cualquier posición, siempre que la permutación total de vértices y de aristas sea par. Como se tiene que la mitad de las permutaciones son pares y la otra mitad son impares (para ver esto, es suficiente ver que si multiplicamos por una trasposición, las permutaciones pares se transforman en impares y las impares en pares, con lo que hay el mismo número de permutaciones pares que de impares), esto nos da un total de

$$\frac{12! \cdot 8!}{2}.$$

Para cada permutación de las piezas, podemos orientar los vértices de manera que la torsión total sea múltiplo de 3 y las aristas de manera que la torsión total sea múltiplo de 2. Por tanto, los vértices pueden torcerse de

$$\frac{3^8}{3}$$

maneras, mientras que las aristas pueden hacerlo de

$$\frac{2^{12}}{2}$$

maneras válidas. Esto nos da un total de

$$\frac{12! \cdot 8!}{2} \cdot \frac{3^8}{3} \cdot \frac{2^{12}}{2} = 43\,252\,003\,274\,489\,856\,000 = 2^{27} \cdot 3^{14} \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11$$

posiciones distintas del cubo.

John Paulos [1] indicaba que *Ideal Toys Company* anunciaba en la publicidad del cubo de Rubik que había más de tres mil millones de combinaciones posibles, y que este número era algo comparable a decir que *MacDonald's* anunciara orgullosa que había vendido más de 120 hamburguesas.

Si contamos el número de formas de armar el cubo si lo desmontamos, ahí no tenemos que fijarnos en que las permutaciones totales sean pares, o las piezas tengan que estar torcidas de una determinada manera. Esto nos lleva a un total de disposiciones igual a

$$12! \cdot 8! \cdot 3^8 \cdot 2^{12} = 519\,024\,039\,293\,878\,272\,000 = 2^{29} \cdot 3^{15} \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11,$$

que es 12 veces la anterior cantidad. Esto vendría a decirnos que si desmontamos el cubo y lo volvemos a montar, solo en una de cada 12 veces que lo hagamos será posible montar el cubo en su posición inicial.

3.6. Repeticiones de movimientos

Al repetir una combinación de movimientos del cubo de Rubik varias veces, siempre habrá un momento en que lleguemos a la posición inicial. Por ejemplo, con el movimiento básico A es fácil ver que A^4 es la identidad, y que el menor natural n que hace que A^n nos dé la identidad es precisamente 4. Decimos que A tiene *orden* 4.

Moviendo el cubo vemos que $M = A^2D^2$ tiene orden 6. Nos basta con observar que M^3 es el procedimiento $P_2(A, D)$ y que este último procedimiento tiene orden 2. El movimiento FD, tienen orden 105. Hay movimientos de orden 1 260, el mayor posible, como

$$\begin{aligned} DF^2T^{-1}AT^{-1} = {} & (BFD, FBI, IAF)_-(ADF, TIB, BDT, ATD, TAI)_+ \\ & \cdot (FA, FB, IA, TD, BD, FI, FD)_+(IT, AD)_+(AT, BT). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Es fácil ver que un ciclo tiene orden igual a su longitud. Por ejemplo, $(1, 2, 3, 4)$ tiene orden 4. Si tenemos una permutación dada como producto de ciclos disjuntos, el orden de esta permutación será el mínimo común múltiplo de los órdenes de los ciclos, es decir, el mínimo común múltiplo de las longitudes de los ciclos. Por ejemplo, el orden de $(1, 2, 3)(4, 5)(6, 7, 8, 9)$ es $\mathrm{mcm}(3, 2, 4) = 12$. Pero esto solo vale si los ciclos son disjuntos.

Para el cubo de Rubik sucede lo mismo. Únicamente hay que tener en cuenta que la longitud de los ciclos torcidos de vértices es el triple de lo que aparece en la notación abreviada, y la longitud de los ciclos torcidos de aristas es el doble de la que se ve en la notación abreviada. Por ejemplo, para el movimiento FD, que se descompone según la fórmula (3.1) como un 7-ciclo de aristas, un 1-ciclo torcido de vértices (longitud 3), y un 5-ciclo de vértices, el orden será $\mathrm{mcm}(7, 3, 5) = 105$. Para el movimiento $DF^2T^{-1}AT^{-1}$, cuya descomposición según la fórmula (3.2) como un 3-ciclo torcido de vértices (longitud 9), un 5-ciclo torcido de vértices (longitud 15), un 7-ciclo torcido de aristas (longitud 14), un 2-ciclo torcido de aristas (longitud 4) y un 2-ciclo de aristas, el orden será $\mathrm{mcm}(9, 15, 14, 4, 2) = 1\,260$.

Ejercicio 3.6.1. *¿Cuál es el orden del movimiento* $FDF^{-1}D^{-1}$*?*

Por último, dejamos para los más avezados ver que dos movimientos conjugados tienen el mismo orden. En realidad,

$$(x \cdot g \cdot x^{-1})^n = x \cdot g^n \cdot x^{-1}.$$

Bibliografía

[1] John Allen Paulos. *Innumeracy: Mathematical illiteracy and its consequences*. Hill and Wang, New York, 1988.

[2] David Singmaster. *Notas sobre el cubo de Rubik*. Altalena, Madrid, 1981.

[3] Paritat d'una permutació. Vikipèdia, `http://ca.wikipedia.org/wiki/Paritat_d'una_permutació`. Visitado el 6 de enero de 2010.

[4] Parity of a permutation. Wikipedia, `http://en.wikipedia.org/wiki/Parity_of_a_permutation`. Visitado el 6 de enero de 2010.

Apéndice A

Recortables

En estas hojas hay algunas figuras para recortar y hacer algunas de las actividades propuestas sobre simetrías del cuadrado. La figura A.1 nos servirá para colocar encima el cuadrado recortado.

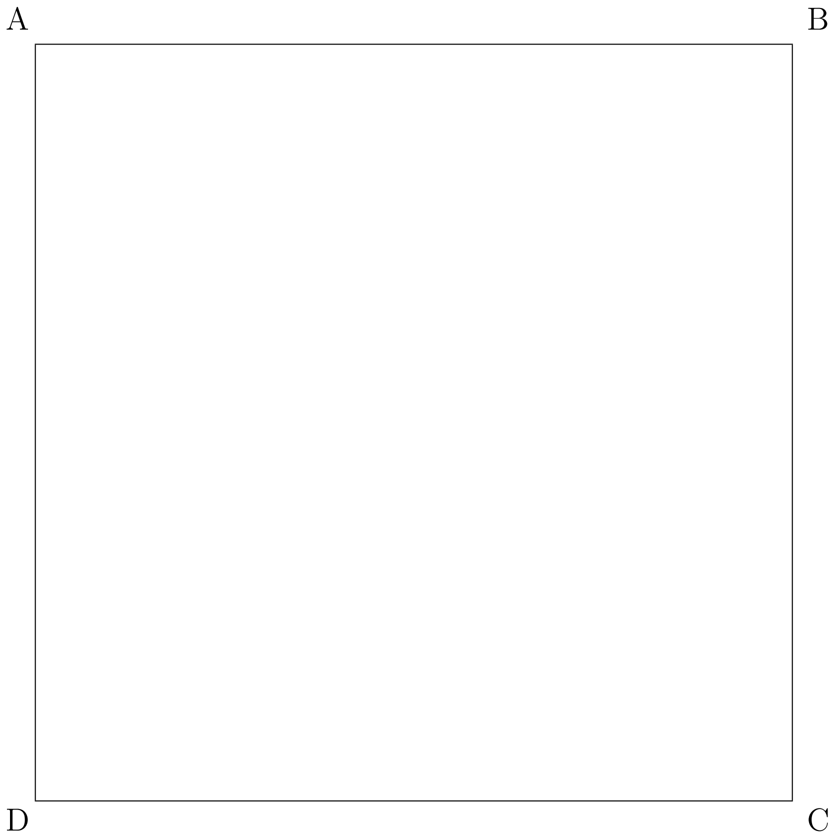

Figura A.1: Cuadrado para estudiar sus simetrías

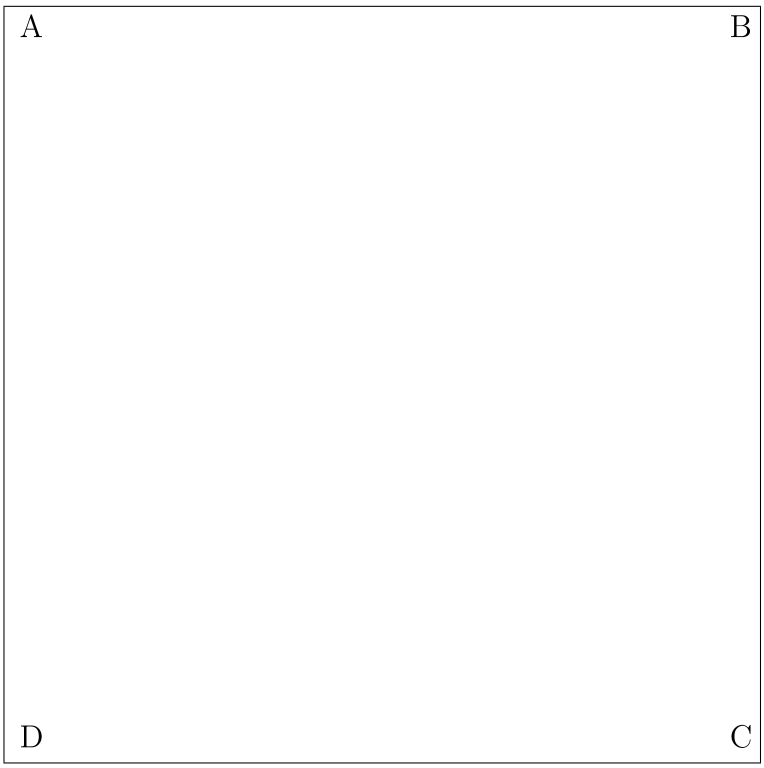

Figura A.2: Cuadrado para estudiar sus simetrías (anverso)

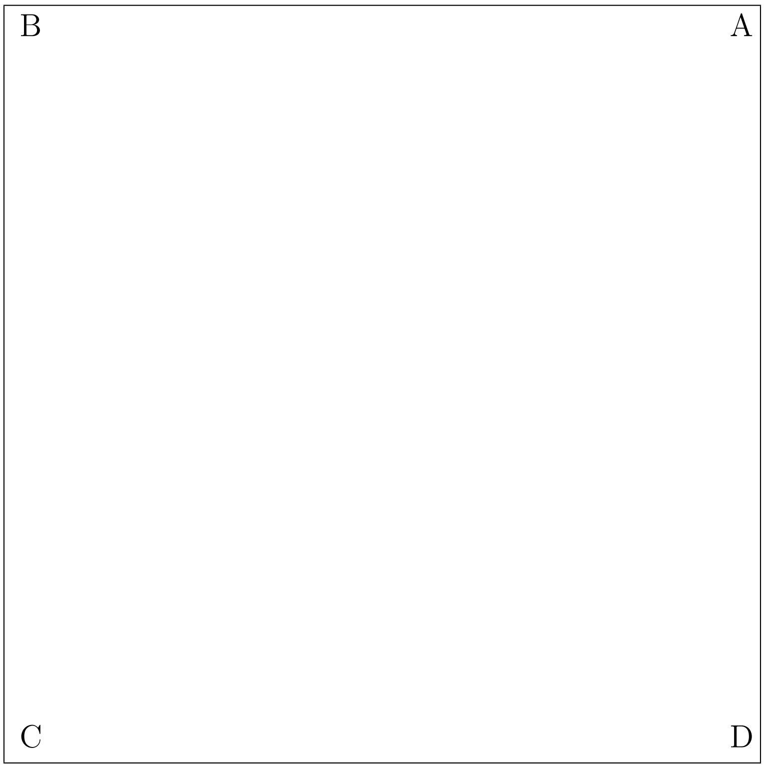

Figura A.3: Cuadrado para estudiar sus simetrías (reverso)