

Práctica 5: Métodos de aproximación para resolver ecuaciones diferenciales.

♦ Objetivo:

- Usar el método de Euler para resolver ecuaciones diferenciales.
- Usar el método mejorado de Euler o método de Heun.

Matemáticas para la Computación

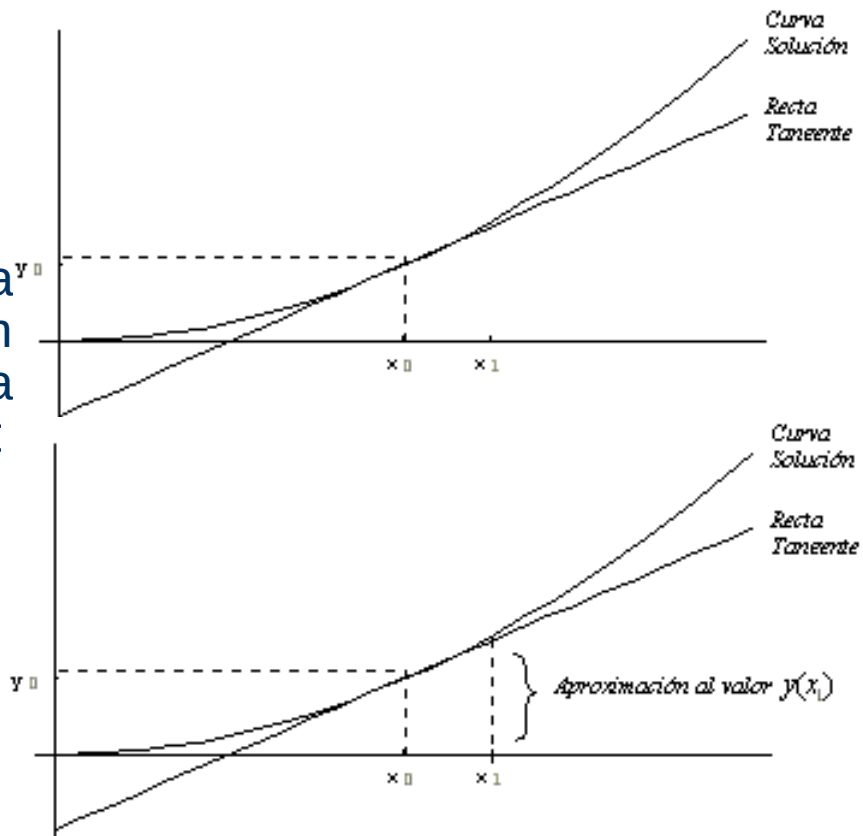
Emiliano Torres

Ecuaciones diferenciales ordinarias

- ♦ Una **ecuación diferencial** (ordinaria) es aquella que involucra una variable independiente, una variable dependiente y la derivada (ó derivadas) de esta última. En una ecuación diferencial, la incógnita es la variable dependiente y se espera encontrarla como función de la variable independiente, de tal forma que si se sustituye dicha variable dependiente, así como las derivadas que aparecen en la ecuación diferencial, la igualdad que resulta es verdadera.
- ♦ Existen una infinidad de funciones (curvas) que resuelven una misma ecuación diferencial. Las ecuaciones diferenciales de primer orden del tipo:
 - $y' = f(x, y)$ es una función de dos variables
 - $y(x_0) = y_0$ con una condición inicial dada
- ♦ La importancia de los métodos numéricos radica en la aparición de ecuaciones diferenciales que no pueden resolverse por métodos tradicionales, y de ahí la necesidad de implementar algún método de aproximación para aproximar el valor $y(x_1)$ donde x_1 es un valor cercano a x_0 (el de la condición inicial dada).

Método de Euler

- ♦ No es el método más preciso pero si el más sencillo. Se basa en el significado geométrico de la derivada de una función en un punto dado.
- ♦ Supongamos que tuviéramos la curva solución de la ecuación diferencial y trazamos la recta tangente a la curva en el punto dado por la condición inicial.
- ♦ Debido a que la recta tangente aproxima a la curva en valores cercanos al punto de tangencia, podemos tomar el valor de la recta tangente en el punto x_1 como una aproximación al valor deseado $y(x_1)$.



Método de Euler

- ◆ calculemos la ecuación de la recta tangente a la curva solución de la ecuación diferencial dada en el punto (x_0, y_0) . La ecuación de la recta es:

$$y = f(x_0, y_0)(x - x_0) + y_0$$

- ◆ donde m es la pendiente de la recta tangente que se calcula con la derivada:

$$m = y' \big|_{(x_0, y_0)} = f(x_0, y_0)$$

- ◆ Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es:

$$y = m(x - x_0) + y_0$$

- ◆ Suponiendo que x_1 es un punto cercano a x_0 , $x_1 = x_0 + h$. De esta forma, se obtiene la siguiente aproximación:

$$y(x_0 + h) \approx y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$$

Método de Euler

- ♦ Esa aproximación es buena, si el valor de h es realmente pequeño, una décima más ó menos. Pero si el valor de h es más grande, entonces podemos cometer mucho error al aplicar dicha fórmula. Una forma de reducir el error y obtener de hecho un método iterativo, es dividir la distancia $h=|x_1-x_0|$ en n partes iguales (de longitud suficientemente pequeña) y obtener la aproximación en n pasos, aplicando la fórmula anterior n veces, con una nueva h igual a $|x_1-x_0|/n$
- ♦ Para obtener y_2 sería igual tomando (x_1, y_1) en lugar de (x_0, y_0)
$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$
- ♦ Luego generalizando se obtiene la fórmula de Euler:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Ejemplo del método de Euler

- ♦ Dada la siguiente ecuación diferencial y la condición inicial, aproximar $y(0.5)$

$$y' = 2xy$$

- ♦ **Solución Analítica.** $y(0) = 1$

Esta ecuación puede resolverse por métodos tradicionales de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, aplicando el método de separación de variables.

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \quad \frac{dy}{y} = 2x dx \quad \int \frac{dy}{y} = \int 2x dx \quad \ln|y| = x^2 + c$$

Sustituyendo la condición inicial:

$$x = 0 \rightarrow y = 1 \quad \ln 1 = 0^2 + c \quad 0 = c$$

Por lo tanto, la curva solución real es la siguiente y el valor real que se pide es:

$$\ln y = x^2 \quad e^{\ln y} = e^{x^2} \quad y = e^{x^2} \quad y(0.5) = e^{(0.5)^2} = 1.28403$$

Ejemplo del método de Euler

- ♦ **Solución numérica aplicando el método de Euler**

observemos que la distancia entre $x_0=0$ y $x_1=0.5$ no es lo suficientemente pequeña. Si dividimos esta distancia entre cinco obtenemos un valor de $h=0.1$ y obtenemos la aproximación deseada en cinco pasos.

$$\begin{cases} x_0 &= 0 \\ y_0 &= 1 \\ h &= 0.1 \\ f(x,y) &= 2xy \end{cases}$$

- ♦ Sustituyendo estos datos en la formula de Euler, se obtiene en un primer paso:

$$\begin{cases} x_1 &= x_0 + h &= 0.1 \\ y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) &= 1 + 0.1[2(0)(1)] &= 1 \end{cases}$$

- ♦ Aplicando nuevamente la formula de Euler, se tiene en un segundo paso:

$$\begin{cases} x_2 &= x_1 + h &= 0.2 \\ y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1) &= 1 + 0.1[2(0.1)(1)] &= 1.02 \end{cases}$$

Ejemplo del método de Euler

- ♦ Así sucesivamente hasta obtener y_5 .
- ♦ Y se concluye que el valor aproximado, usando el método de Euler es:

$$y(0.5) \approx 1.2144$$

- ♦ Puesto que en este caso, se conoce el valor verdadero, se puede utilizar para calcular el **error global** y el **error relativo porcentual** que se cometió al aplicar la formula de Euler:

- ♦ Error global: $e_n = y_{\text{real}} - y_{\text{aproximado}}$
 $e_n = 1.28402 - 1.2144 = 0,06962$

- ♦ Error relativo porcentual:

$$|\epsilon_v| = \left| \frac{1.28402 - 1.2144}{1.28402} \times 100\% \right| = 5.42\%$$

n	X _n	y _n
0	0	1
1	0.1	1
2	0.2	1.02
3	0.3	1.0608
4	0.4	1.12445
5	0.5	1.2144

Método de Heun

- ◆ Es razonable pensar que los resultados mejoraran si reemplazamos la integral por el promedio de sus dos valores en los extremos del intervalo.
- ◆ Este método predice primero por el método de Euler y corrige después una estimación de y_k .
 - $y_{k+1} = y_k + h / 2 [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, z_{k+1})]$
 - $z_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$ donde $k = 0, 1, 2, \dots, n$

Práctica

1. Implementa una función que calcule las soluciones de una ecuación diferencial usando el Método de Euler
$$[x, y] = \text{euler}(f, a, b, ya, n)$$
2. Implementa una función que calcule las soluciones de una ecuación diferencial usando el Método de Heun
$$[x, y] = \text{heun}(f, a, b, ya, n)$$
3. Realizar una macro que muestre la curva del (primer) apartado a) con Euler y Heun.
 - Utiliza las "referencias de funciones", novedad de la última versión de Matlab.
 - Implenta una función en matlab
4. Realizar otra macro que muestre las curvas del (primer) apartado b) con Euler y Heun.
 - Utiliza las "referencias de funciones", novedad de la última versión de Matlab.
 - Implenta una función en matlab
5. Realiza una macro para visualizar la solución al apartado a) y b) (con distinto peso) mediante el método de Heun.