

TÍTOL: Doneu-me un punt de suport i resoldré equacions de 2n grau

Centre: IES Veles e Vents

Curs i Cicle: 4 ESO

Tutor/a: Francisco Savall Alemany – Maria Pilar Santatecla Fayos

Categoria de concurs: FÍSICA

Alumnat: Paula Enguix Tarrio – Aitana Longar Franco – Victoria Marco Climent – Elena Romanova Paduryanova

1. Resum breu del projecte i objectius

Aprofitem el principi d'Arquimedes i la llei de la palanca per a construir un dispositiu - calculadora mecànica - que permet resoldre equacions de segon grau.

2. Material i muntatge

Hem dissenyat tres figures geomètriques que han sigut tallades en alumini amb un gruix de 6 mm (figura 1). La primera d'elles (A) és un triangle invertit amb una altura de 7 cm i una base de 14 cm, la segona (B) és un rectangle amb 1 cm de base i 7 cm d'altura i la tercera (C) és un quadrat amb 1 cm de costat. Es disposa una barra metàl·lica amb marques horitzontals equidistants, penjada pel centre i equilibrada. La barra es troba sobre un recipient que es pot emplenar d'aigua de manera controlada i que té una escala mòbil que permet mesurar l'altura de l'aigua. De la barra metàl·lica es penjen les tres figures geomètriques. Una pesa cilíndrica (D) ajuda a equilibrar la palanca. El muntatge es mostra en la figura 2. El punt inferior del prisma i el triangle han de quedar a la mateixa altura, el quadrat ha de quedar completament per davall de les altres dues figures.



Figura 1: Figures tallades en alumini sobre paper mil·limetrat.

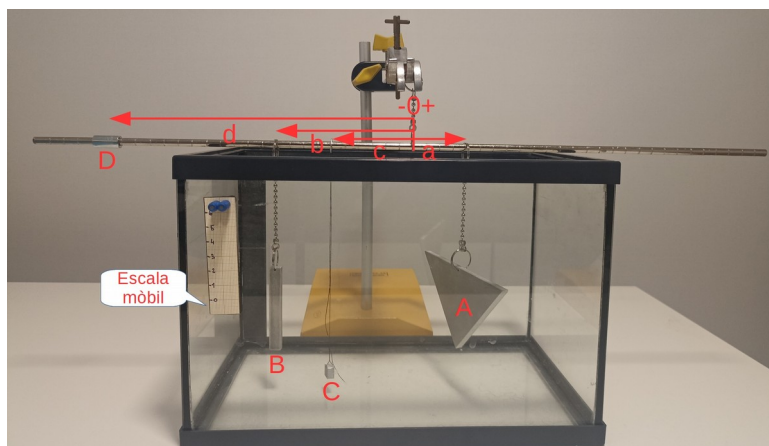


Figura 2: Estructura de la calculadora mecànica amb les peces A, B, C i D a distàncies a, b, c i d del punt de recolzament.

3. Fonamentació: Principis físics involucrats i la seua relació amb aplicacions tecnològiques

D'acord amb el principi d'Arquimedes, sobre un objecte que s'ha submergit en un fluid actua una força vertical i cap a dalt (anomenada empenyiment) proporcional al volum d'aigua que desplaça l'objecte. Concretament, l'empenyiment respon a l'equació $E = V_{\text{submergit}} \cdot d_{\text{liquid}} \cdot g$, on d és la densitat del líquid (amb $d = 1000 \text{ kg/m}^3$ per a l'aigua) i g la gravetat ($g = 9,8 \text{ m/s}^2$). Així, quan es submergeixen les diferents figures en aigua (figura 3) experimenten els següents empenyiments:

- La figura quadrada (C), en tindre un volum $V_C = 0,6 \text{ cm}^3 = 6 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3$, experimenta un empenyiment $E_C = 5,88 \cdot 10^{-3} \text{ N}$.
- El rectangle (B), a mesura que es submergeix a una profunditat h (com mostra la figura 3), experimenta un empenyiment proporcional a h . El volum submergit és $V_B = (0,6 \cdot 1 \cdot h) \text{ cm}^3 = (0,6 \cdot h) \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$ (on h es mesura en cm) i l'empenyiment $E_B = 5,88 \cdot 10^{-3} \cdot h \text{ N}$.
- El triangle invertit (A), en tindre doble base que altura (figura 3), a mesura que es submergeix experimenta un empenyiment proporcional a h^2 . El volum submergit és $V_A = [0,6 \cdot (h \cdot 2h) / 2] \text{ cm}^3 = (0,6 \cdot h^2) \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$ (on h es mesura en cm) i l'empenyiment $E_A = 5,88 \cdot 10^{-3} \cdot h^2 \text{ N}$.

Cada figura se situa a una distància del punt de recolzament de la palanca. Anomenem «a» al punt del braç de la palanca del que penja el triangle, «b» al punt del que penja el rectangle, «c» al punt del que penja el quadrat i «d» al punt on es troba situada la peça cilíndrica. D'acord amb la llei de la palanca, considerant negatives les posicions a l'esquerra del punt de recolzament i positives les posicions a la dreta, per a què la palanca es trobe en equilibri s'ha de verificar que:

$$a \cdot P_A + b \cdot P_B + c \cdot P_C + d \cdot P_D = 0 \quad (\text{Eq. 1})$$

on P_n és el pes de cadascuna de les figures esmentades abans. Si les figures es submergeixen en aigua, la seua acció sobre la palanca disminuirà, en tant que part del seu pes serà contrarestat per l'empenyiment. Anomenarem «pes aparent (P_{ap})» a la força que fa cadascuna de les figures sobre la palanca, sent $P_{ap} = P - E$.

Usem aquest dispositiu per buscar solucions d'equacions de segon grau amb la forma $ax^2 + bx + c = 0$. A mesura que afegim aigua, en el moment en què es torna a equilibrar la palanca es complirà, de manera general, que:

$$a \cdot P_{apA} + b \cdot P_{apB} + c \cdot P_{apC} + d \cdot P_D = 0 \quad (\text{Eq. 2})$$

Desenvolupem l'expressió tenint en compte la definició de pes aparent:

$$a \cdot (P_A - E_A) + b \cdot (P_B - E_B) + c \cdot (P_C - E_C) + d \cdot P_D = 0 \quad (\text{Eq. 3})$$

Multipliquem per eliminar els parèntesis i usem la igualtat expressada en l'equació 1. Arribem així a:

$$a \cdot E_A + b \cdot E_B + c \cdot E_C = 0 \quad (\text{Eq. 4})$$

Recuperem les expressions corresponents a l'empenyiment de les figures A, B i C. Considerant que l'altura de l'aigua per a

la qual es torna a assolir l'equilibri de la palanca és h' arribem a la següent equació:

$$a \cdot 5,88 \cdot 10^{-3} h'^2 + b \cdot 5,88 \cdot 10^{-3} h' + c \cdot 5,88 \cdot 10^{-3} = 0 \quad (\text{Eq. 5})$$

Simplificant tenim:

$$a \cdot h'^2 + b \cdot h' + c = 0 \quad (\text{Eq. 6})$$

D'acord amb l'equació 6, h' és una solució de l'equació de segon grau.

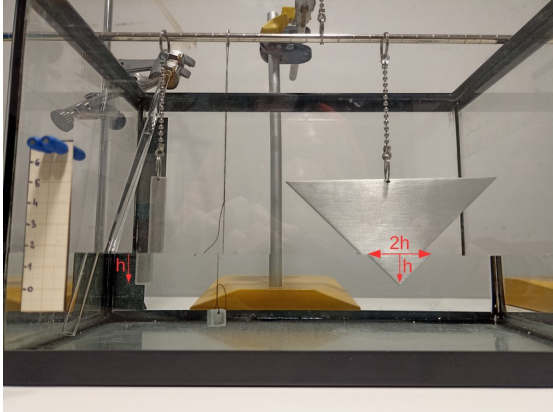


Figura 3: Dimensions de cada figura sota l'aigua. La imatge està afectada per la refracció i la perspectiva. L'escala, que queda en primer pla, indica sobre paper mil·límetrat la profunditat h .

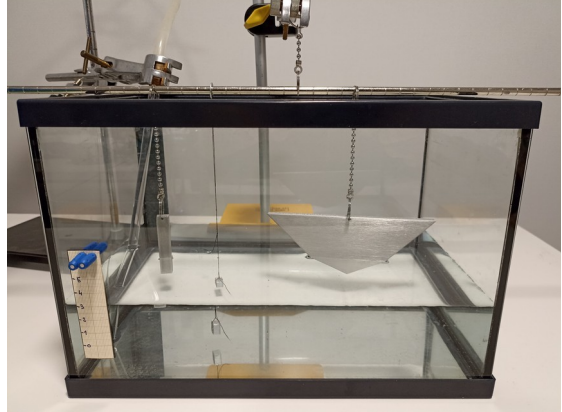


Figura 4: La palanca queda en equilibri quan l'aigua arriba a 3 cm d'altura.

4. Funcionament i resultats: observacions i mesures

Podem plantejar diferents equacions de 2ⁿ grau situant les peces en diferents posicions. Per exemple, per resoldre l'equació $2x^2 - 5x - 3 = 0$ seguint el següent procediment:

- La barra metàl·lica té unes marques equidistants. Considerem que cadascuna de les divisions de la barra correspon a 0,5 unitats. Situem les peces A, B i C en les posicions a, b i c, respectivament. Situem la peça A a 2 unitats (4 divisions) a la dreta del punt de recolzament, la peça B a 5 unitats (10 divisions) a l'esquerra del punt de recolzament i la peça C a 3 unitats (6 divisions), també a l'esquerra del punt de recolzament (aquesta distribució és la que es mostra en la figura 2). A continuació, situem el cilindre de manera que la palanca estiga equilibrada. En aquesta situació, es compleix la condició que estableix l'equació 1, amb la forma particular:

$$2 \cdot P_A - 5 \cdot P_B - 3 \cdot P_C - d \cdot P_D = 0 \quad (\text{Eq. 7})$$

- A continuació afegim aigua fins que la peça C queda completament submergida, sense que l'aigua arribi a tocar la resta de les peces. Com el pes aparent de C disminueix per l'acció de l'empenyiment, la palanca s'inclinarà cap al costat contrari al que es troba aquesta peça.
- Seguim emplenant el recipient fins que l'aigua arribi a fer contacte amb la part més baixa de les peces A i B, sense arribar a submergir-les, ni tan sols parcialment. Situem l'escala mòbil de manera que el zero coincidisca amb el nivell de l'aigua. Aquesta escala mesura quant es submergeixen aquestes peces, és a dir, el valor de h emprat en calcular l'empenyiment sobre cada peça (figura 3).
- Continuem afegint aigua fins que la palanca es torna a equilibrar. L'altura de l'aigua que marca en aquest moment l'escala mòbil (que anomenarem h') és una solució de l'equació de segon grau. Seguint amb la demostració que presentem en l'apartat anterior, l'equació 6 pren la forma:

$$2 \cdot h'^2 - 3 \cdot h' - 5 = 0 \quad (\text{Eq. 8})$$

Es pot verificar que 3 és la solució de l'equació i, com es mostra en la figura 4, la palanca queda equilibrada quan l'escala marca una altura de l'aigua de 3 cm.

5. Conclusions

Amb aquest treball hem aconseguit construir un dispositiu que aprofita lleis físiques per a resoldre equacions. Per les característiques que té, la longitud de la palanca no permet resoldre equacions amb coeficients superiors a 8, i per les dimensions de les peces emprades no es poden trobar solucions fora de l'interval [0,6]. Admetem que aquest dispositiu no pot competir amb les calculadores electròniques, però és un exemple de connexió entre camps de la ciència i la tècnica, en tant que mostra com usar principis físics per resoldre problemes pràctics. Actualment treballem en la introducció d'un element que permeta resoldre equacions de tercer grau, que esperem mostrar durant la fira.

6. Bibliografia

Carrascosa, J., et al. (2016). Física i Química 4^è ESO. Disponible en <https://drive.google.com/file/d/0B72xyoVim3zVNIJJbjVwRzN2cGM/view?resourcekey=0-n7o14dCzAjg1tWvDMZU94A>
 Dewdney, A. K. (1985). Juegos de ordenador. Artefactos analógicos que resuelven múltiples problemas y suscitan una retahíla de cuestiones. *Investigación y Ciencia* (107), p. 87-94.
 Phet interactive simulations, University of Colorado. La palanca https://phet.colorado.edu/sims/html/balancing-act/latest/balancing-act_es_ES.html
 Tipler, P. A. (1999). Física para la ciencia y la tecnología. Volumen 1. Ed. Reverté, Barcelona.