

DEMO 137

Varilla que gira con pesas en los extremos

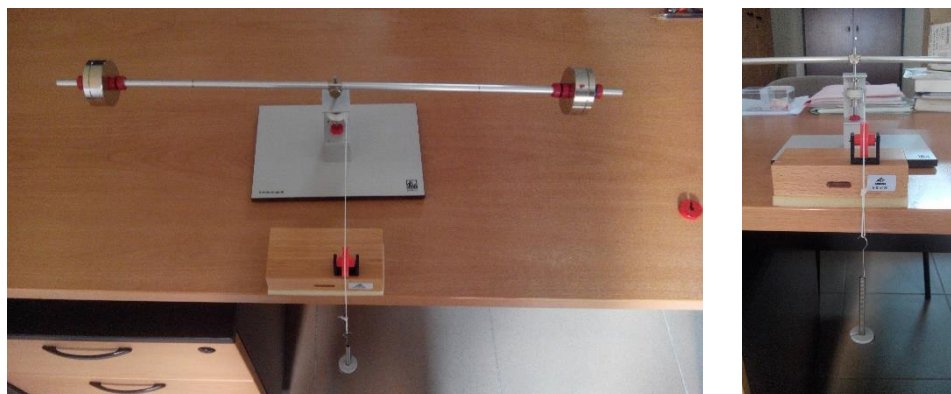


Fig. 1 Montaje experimental

Autor de la ficha	Domingo Martínez García y Chantal Ferrer Roca
Palabras clave	Rotación del sólido rígido, momento de fuerzas, aceleración angular y momento de inercia.
Objetivo	Ilustrar cualitativa y cuantitativamente los conceptos básicos involucrados en la dinámica de rotación de un sólido rígido, midiendo velocidad angular, aceleración angular y poniendo de manifiesto el papel que juega el momento de inercia en la dinámica de rotación de un sistema.
Material	Base con eje de rotación y husillo, hilo, soporte con polea, varilla hueca de acero, pesas de disco (100 y 200 g), fijadores de pesas de plástico, gancho portapesas y pesa ranurada de 10g.
Tiempo de Montaje	5 minutos

Descripción

En primer lugar se monta la base con el eje de rotación en la mesa, sujetando la varilla con las pesas de disco en el eje. Poner las pesas de disco a una distancia $R = 25$ cm del eje (posición extrema marcada en la varilla para los fijadores de plástico). A continuación se enrolla el hilo en el husillo poniendo en el extremo el gancho porta-pesas, con la pesa de 10 g. La base de la polea se coloca al borde de la mesa y se hace pasar el hilo por la polea de manera que la pesa cuelgue verticalmente. Procurad que el hilo quede perpendicular al husillo en la parte horizontal y que no roce con la mesa en la vertical (tal y como ilustran las figuras de arriba). Al dejar caer libremente la pesa hacia abajo el hilo se desenrolla del husillo haciendo girar el sistema varilla-pesas.

La dinámica del sistema se puede describir con las siguientes ecuaciones:

$$r \cdot T = I \cdot \alpha \quad (1)$$

$$mg - T = ma \quad (2)$$

$$a = r \cdot \alpha \quad (3)$$

Siendo r el radio del husillo, T la tensión del hilo, I el momento de inercia del sistema varilla-pesas, a la aceleración angular, a la aceleración lineal de la pesa colgante y m su masa (incluida la masa del portapesas). Combinando las ecuaciones anteriores se puede obtener la siguiente expresión para la aceleración angular:

$$\alpha = \frac{rmg}{I + mr^2} \quad (4)$$

que en la aproximación $I \gg mr^2$ se puede escribir como: $\alpha \approx \frac{rmg}{I}$ (5)

que podemos interpretar como si el momento de fuerzas que hace girar el sistema varilla-pesas lo generara la fuerza gravitatoria (mg) de la pesa que cae verticalmente. Esta ecuación pone de manifiesto que hay una relación inversamente proporcional entre la aceleración angular del sistema y el momento de inercia, que vamos a comprobar experimentalmente. Mediremos la aceleración angular para dos valores del momento de inercia (cambiando la distancia de las pesas al eje).

El momento de inercia se puede calcular con la expresión: $I = I_{\text{varilla}} + I_{\text{pesas}} = \frac{1}{12} M_{\text{var}} L^2 + 2M_{\text{pesa}} R^2$ (6)

Aproximando las pesas como masas puntuales, y siendo L la longitud de la varilla y R la distancia de las pesas al eje de giro. Teniendo en cuenta que $M_{\text{varilla}} = 114,2$ g, $L = 60$ cm, $M_{\text{pesa}} = 300$ g y si consideramos dos distancias al eje $R_1 = 25$ cm y $R_2 = 12,5$ cm, se puede obtener el momento de inercia, para cada una de las situaciones utilizando la ecuación (6) :

$$I_1(R_1) = 40,9 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad I_2(R_2) = 12,8 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Se pueden comparar con mr^2 : $m = 10$ g (10 g del portapesas y otros 10 g de la pesa gris) $r \approx 1$ cm, con lo que $mr^2 = 2 \cdot 10^{-6}$ kg·m², es decir, cuatro o cinco órdenes de magnitud menor que I , lo que justifica la validez de la aproximación en la ecuación (5).

A partir de la ecuación (5): al disminuir R , disminuye el momento de inercia I , y por lo tanto aumenta la aceleración angular, es decir $\alpha_2 > \alpha_1$. La relación teórica entre las aceleraciones angulares α_1 e α_2 que se obtiene a partir de la relación (5) y los datos es:

$$\left. \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right|_{teo} = \left. \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right|_{teo} = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{teo} = 3,1 \quad \text{o, lo que es lo mismo} \quad \alpha_2^{teo} \approx 3,1 \alpha_1^{teo} \quad (7)$$

MEDIDAS EXPERIMENTALES. Hay dos procedimientos: medir la aceleración angular a partir de la velocidad angular inicial y final, o bien medir el tiempo de descenso de la masa.

MÉTODO 1: un o una estudiante cronometra el tiempo de caída de la masa desde el instante en que se suelta la barra hasta el que la masa toca el suelo en las dos situaciones: con las pesas en la posición más externa (1) y más interna (2). La distancia vertical recorrida por la masa en ambos casos es $h = \frac{1}{2} a_1 \Delta t_1^2 = \frac{1}{2} a_2 \Delta t_2^2$. Luego se cumple que

$$\left. \frac{a_2}{a_1} \right|_{exp} = \left. \frac{\Delta t_1^2}{\Delta t_2^2} \right|_{exp} = \frac{32,3^2}{57,9^2} = 3,2$$

Este resultado coincide con la predicción teórica dentro del margen de incertidumbre (7), lo que indica que el modelo de sólido rígido es adecuado. Hay que tener en cuenta, además, que se ha obtenido asumiendo varias aproximaciones (pesas como masas puntuales, vástago como varilla, poleas de masa despreciable, ausencia de rozamientos, etc.) (8)

MÉTODO 2:

- Dos estudiantes estarán preparados con sendos cronómetros. Se Suelta el gancho con las pesas.
- Un o una estudiante cronometra el tiempo que tarda la masa en llegar al suelo (Δt).
- En cuanto la masa toque el suelo, el siguiente estudiante cronometra el tiempo que tarda el sistema en dar dos vueltas (t) (para ello se ha puesto una marca de referencia en una de las pesas de disco). Al tocar las pesas el suelo, el hilo deja de tener tensión y por lo tanto la aceleración angular se anula y el sistema gira con ω constante, salvo por el rozamiento. Por ello hay que hacer la medida antes de que éste amortigüe el movimiento.

Con estas medidas se puede calcular la ω_{final} , y α , ambos experimentales (obtenidos a partir de las medidas de los tiempos siendo $\Delta\omega = \omega_f$ (la velocidad angular inicial es cero). $\omega_{exp} = 2 \cdot \frac{2\pi}{t}$ $\alpha_{exp} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$

Luego para $R_1 = 25$ cm, se obtiene un determinado valor de la aceleración angular α_1 : $\alpha_1^{exp} = \frac{\Delta\omega_2}{\Delta t_2} = \frac{4\pi}{t_1 \Delta t_1}$

Repetimos la medida reduciendo la distancia de las pesas al eje de giro a la mitad, es decir para un valor $R_2 = 12,5$ cm, se obtiene un valor α_2 para la aceleración angular. $\alpha_2^{exp} = \frac{\Delta\omega_2}{\Delta t_2} = \frac{4\pi}{t_2 \Delta t_2}$

Tras la medida, se verifica que los valores experimentales coinciden con la predicción teórica dentro del margen de incertidumbre: $\frac{\alpha_2^{exp}}{\alpha_1^{exp}} = \frac{t_1 \Delta t_1}{t_2 \Delta t_2} \approx 3,1$

Sugerencias

- En función del tiempo disponible se puede hacer un experimento más completo. Por ejemplo, medir la aceleración angular para más valores de la distancia de las pesas al eje de rotación. O bien estudiar la influencia de la masa m , para un valor fijo del momento de inercia I . Para ello se dispone de una pesa ranurada roja, adicional, de 20 g.
- La ecuación (5) tiene una utilidad adicional: determinar el momento de inercia desconocido de un cuerpo arbitrario mediante una recta de regresión de puntos experimentales, siendo α la ordenada, m la variable (se cambian las masas que penden del portapesas), y gr/I la pendiente

$$\alpha \approx \frac{gr}{I} \cdot m \quad (5)$$