

DEMO 163

Medida de la densidad con la balanza hidrostática
método de Arquímedes - Galileo



Autora de la ficha	Juan Carlos Jiménez, Chantal Ferrer Roca
Palabras clave	Densidad, empuje, hidrostática, Arquímedes y Galileo Galilei
Objetivo	Determinar la densidad de un cuerpo a partir de la relación entre su peso medido en aire y al introducirlo en agua. Entender el papel de la fuerza de empuje y su relación con la masa del fluido desalojado.
Material	Recipiente, agua, dinamómetro, báscula, objeto problema (pesa de bronce).
Tiempo de Montaje	2 minutos

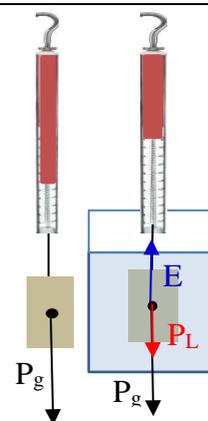
Descripción

La balanza hidrostática mide el empuje que un fluido ejerce sobre un cuerpo inmerso en él y permite determinar la densidad de ese cuerpo basándose en el principio de Arquímedes. Se utiliza tanto un dinamómetro como una báscula, que realizan una medida del peso del cuerpo en el aire y al introducirlo en un fluido, en este caso agua.

Demostración cualitativa con dinamómetro o báscula:

Al colgar el cuerpo del dinamómetro en aire medimos la fuerza gravitatoria (o peso P_g): por ejemplo, $P_g = 4,9$ N. Ahora repetimos sumergiendo el cuerpo completamente en agua, de forma que no toque el fondo o las paredes. El dinamómetro indica una fuerza menor de 4,3 N.

Igualmente, podemos usar la báscula: colocamos el vaso con agua sobre la báscula y taramos. Apoyamos el cuerpo también sobre la báscula y medimos su masa $m_c = 496,7$ g. Pero al introducirlo completamente en el agua, colgando de un hilo, la báscula indica una masa menor, de 60,2 g.



EXPLICACIÓN 1. Medida de la densidad con el dinamómetro: Al introducir el cuerpo en el fluido (agua), actúa la fuerza empuje hidrostático, que coincide con el peso del fluido desalojado al introducir el sólido: $E = m_f g = \rho_f V_f g$

El empuje es de sentido opuesto al peso y se debe a la variación de la presión del fluido sobre el objeto con la profundidad, mayor en la parte inferior que en la superior (en agua, por cada 10 m de profundidad, la presión aumenta en 1 atmósfera).

La fuerza resultante $P_L = P_g - E$ es vertical (en este caso con sentido hacia abajo y menor que el peso).

$$P_L = P_g - E = \rho_c V_c g - \rho_f V_f g = (\rho_c - \rho_f) g V \rightarrow \frac{P_g}{E} = \frac{P_g}{P_g - P_L} = \frac{\rho_c}{\rho_f} \equiv \rho_{especifica} \Rightarrow \rho_c = \left(\frac{P_g}{P_g - P_L} \right) \rho_f = \frac{P_g}{E} \rho_f$$

Los subíndices 'c' y 'f' hacen referencia al cuerpo y al fluido respectivamente. El objeto debe estar totalmente sumergido para que sea cierta la consideración de que $V_c = V_f$. El cociente entre el peso en aire P_g y E (diferencia entre pesada en aire y en agua) proporciona directamente la densidad específica del cuerpo (respecto a la densidad del fluido, agua en este caso). La densidad del agua $\rho_f \approx 1$ g/cm³, luego el cociente entre peso y empuje es prácticamente la densidad del cuerpo en g/cm³.

Para el objeto problema incluido en la demo, se han obtenido las siguientes medidas y resultados, incluyendo las incertidumbres:

$$\left. \begin{array}{l} P_g = (4,9 \pm 0,1) N \quad P_f = (4,3 \pm 0,1) N \\ E = P_g - P_f = (0,60 \pm 0,14) N \\ \rho_{agua, 25^\circ C} = (0,99701 \pm 0,00001) g/cm^3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho_c = \frac{P_g}{E} \rho_f = 8,16667 g/cm^3 \\ \varepsilon_r(\rho_c) = \sqrt{\varepsilon_r^2(P_g) + \varepsilon_r^2(E) + \varepsilon_r^2(\rho_{agua})} \approx \varepsilon_r(E) = 0,23 \end{array} \right.$$

Luego $\rho_c = (8,2 \pm 1,9) \frac{g}{cm^3}$, que coincide con la densidad de una aleación de bronce (entre 7,4 y 8,9 g/cm³, ver tabla)

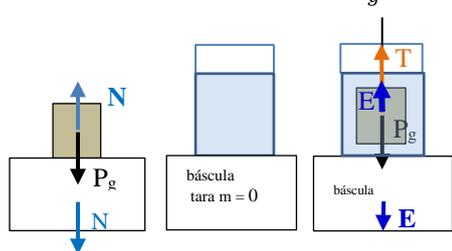
Como se puede ver, el error relativo que predomina es el del empuje. Por tanto, cuanto mayor sea este, menor incertidumbre tendrá la densidad del cuerpo. En este caso el error relativo de la densidad es superior al 20%, pero se podría reducir realizando medidas con un dinamómetro de mayor sensibilidad.

EXPLICACIÓN 2. Medida de la densidad con una báscula:

1. La báscula mide la fuerza de contacto N que aplica el cuerpo sobre ella (igual y opuesta a la que la báscula aplica al cuerpo). En equilibrio, $N = P_g = m_c g = \rho_c V g$. La báscula generalmente está calibrada en kg y mide la masa del cuerpo, es decir: $N/g = m_c = \rho_c V$. Coloco el objeto sobre ella y la báscula marca $m_c = 496,7$ g.

2. Coloco el vaso con agua sobre la báscula y la taro para que marque 0 gramos. La medida de N/g anterior también se puede hacer apoyando el objeto sobre el vaso tras haber tarado, o apoyado en el fondo, dentro del vaso con agua.

3. Ahora suspendo el objeto del hilo: sujetando por un extremo, lo sumerjo completamente en el vaso, evitando que toque el fondo o las paredes. En este caso sobre el cuerpo actúa la fuerza gravitatoria P_g , la tensión del hilo T y el empuje E del agua sobre el cuerpo, de forma que en equilibrio, $T = P_g - E$. Además, el cuerpo ejerce una fuerza E igual y opuesta sobre el agua que es la que mide la báscula. En nuestro caso $\frac{E}{g} = m_{agua} = \rho_{agua} \cdot V = 60,2$ g.



La relación entre N y E proporciona la densidad relativa del objeto respecto a la del agua: $\frac{N}{E} = \frac{m_c}{m_{agua}} = \frac{\rho}{\rho_{agua}}$

Por lo tanto $\frac{N}{E} = \frac{m}{m_a} = \frac{256}{93} = 8,2508 = \frac{\rho}{\rho_a}$

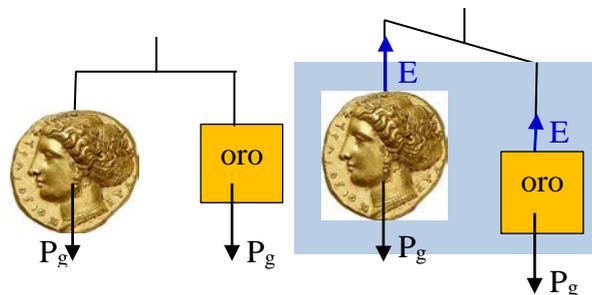
Si se realiza el análisis de errores, se obtiene finalmente $\rho = 8,251 \pm 0,014$ g/cm³, compatible con una pieza de bronce. En este caso, el error relativo es mucho menor (<0,2%).

MATERIAL	DENSIDAD (kg/m ³)
Aluminio	2700
Zinc	7100
Estaño	7310
Cobre	8930
Bronce (aleación)	7400-8900

Nota histórica: La historia popular sobre Arquímedes cuenta que salió corriendo desnudo por la ciudad de Siracusa, gritando ¡Eureka!, tras dar con la solución, mientras se daba un baño, al problema que el rey Hierón le había planteado para saber si era víctima de una estafa: determinar si la corona de oro encargada a un orfebre era realmente de oro o una amalgama. El aumento del nivel del agua y su desbordamiento cuando se introdujo en la bañera habría inspirado a Arquímedes el método para resolverlo. Esta leyenda se debe a Vitruvio y no hace justicia al elevado nivel científico de los trabajos de Arquímedes. Su tratado *Sobre los cuerpos flotantes* analiza (libro I) los principios hidrostáticos generales y (Libro II) la estabilidad de diferentes secciones de paraboloides en un fluido (secciones de navíos). Se sabe, además, que Arquímedes contribuyó al diseño de la nave *Siracusia* (un Titánico de la época que contenía jardines, biblioteca, termas, y una gigantesca catapulta en cubierta- lo que requería especial estabilidad), supervisó su construcción e ideó un sistema mecánico que permitía la botadura empleando una sola mano.

Galileo Galilei, 19 siglos después, se dio cuenta de que esta leyenda no podía ser cierta, al estudiar los tratados de Arquímedes y comprobar el sofisticado nivel de sus contenidos. A partir de ellos, Galileo reconstruyó los principios hidrostáticos que el propio Arquímedes habría usado si hubiera tenido que discernir la composición de dos cuerpos de igual peso y diferente densidad, y los recogió en *La Bilancetta*. (La pequeña balanza). El eminente historiador de la ciencia Alexander Koyré, de hecho, consideró que la revolución científica del s. XVI consistió en la admisión y gradual comprensión de la obra de Arquímedes.

La idea es la siguiente: dos cuerpos en aire con la misma masa (y peso P_g) se equilibran en la balanza. Pero si al introducir el conjunto en agua dejan de estar en equilibrio, significa que el empuje no es el mismo sobre ambos. En la figura, el empuje sobre la moneda es mayor, luego desaloja mayor masa y volumen de agua que la pieza de oro. Por lo tanto, su densidad es menor (hay que concluir que está amalgamada con otro metal). La densidad se puede cuantificar experimentalmente sin necesidad de conocer, y esto es lo importante, el volumen del cuerpo.



Sugerencias El cuerpo debe quedar totalmente sumergido (sin tocar paredes laterales y ni el fondo del recipiente). Usar a continuación la demo 36 de la balanza de Mohr <https://fisicademos.blogs.uv.es/files/2017/07/demo36.pdf>

Bibliografía <http://www.sc.edu/es/sbweb/fisica3/fluidos/densidad/densidad.html>
Los tratados de Arquímedes (ed. T. L. Heath, CUP 1897)). *Sobre los cuerpos flotantes* (p 252) <https://archive.org/details/worksofarchimede00arch/page/252>
Chantal Ferrer roca y Andrea Bombi “La revolución olvidada, aspectos lingüísticos de una pérdida y recuperación. Reflexiones sobre un ensayo de Lucio Russo” <http://roderic.uv.es/handle/10550/27386>