

Conjunts rectificables, fractals, i funcions quadràtiques

Xavier Tolsa



25 de novembre de 2019

Universitat de València

Mesura de Hausdorff 1-dimensional o longitud

Per $\varepsilon > 0$, donat un conjunt $E \subset \mathbb{R}^2$, denotem

$$\mathcal{H}_\varepsilon^1(E) = \inf \left\{ \sum_i \text{diam}(A_i) : E \subset \bigcup_i A_i, \text{diam}(A_i) \leq \varepsilon \right\}.$$

La mesura de Hausdorff 1-dimensional de E o longitud és

$$\mathcal{H}^1(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon^1(E) = \sup_{\varepsilon > 0} \mathcal{H}_\varepsilon^1(E).$$

Mesura de Hausdorff 1-dimensional o longitud

Per $\varepsilon > 0$, donat un conjunt $E \subset \mathbb{R}^2$, denotem

$$\mathcal{H}_\varepsilon^1(E) = \inf \left\{ \sum_i \text{diam}(A_i) : E \subset \bigcup_i A_i, \text{diam}(A_i) \leq \varepsilon \right\}.$$

La mesura de Hausdorff 1-dimensional de E o longitud és

$$\mathcal{H}^1(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon^1(E) = \sup_{\varepsilon > 0} \mathcal{H}_\varepsilon^1(E).$$

Coincideix amb la noció habitual de longitud en corbes.

Mesura de Hausdorff 1-dimensional o longitud

Per $\varepsilon > 0$, donat un conjunt $E \subset \mathbb{R}^2$, denotem

$$\mathcal{H}_\varepsilon^1(E) = \inf \left\{ \sum_i \text{diam}(A_i) : E \subset \bigcup_i A_i, \text{diam}(A_i) \leq \varepsilon \right\}.$$

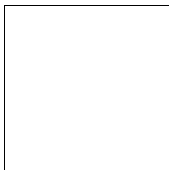
La mesura de Hausdorff 1-dimensional de E o longitud és

$$\mathcal{H}^1(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon^1(E) = \sup_{\varepsilon > 0} \mathcal{H}_\varepsilon^1(E).$$

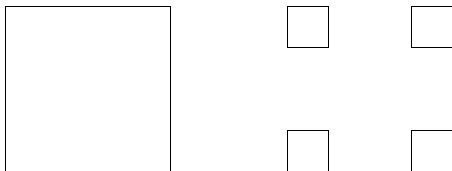
Coincideix amb la noció habitual de longitud en corbes.

Aquesta definició ens permet mesurar la longitud de qualsevol conjunt de \mathbb{R}^2 .

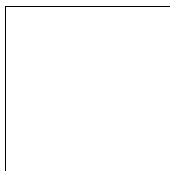
Exemple: el conjunt de Cantor planar $1/4$



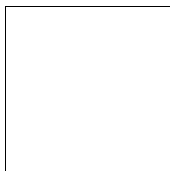
Exemple: el conjunt de Cantor planar 1/4



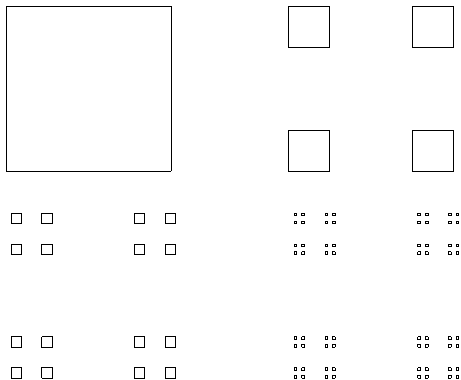
Exemple: el conjunt de Cantor planar 1/4



Exemple: el conjunt de Cantor planar 1/4

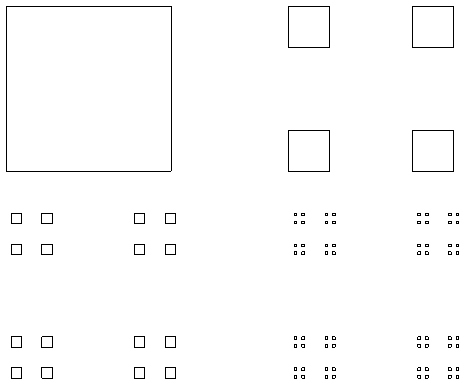


Exemple: el conjunt de Cantor planar 1/4



A cada generació n hi ha 4^n quadrats Q_i^n de costat 4^{-n} .
Per tant, $\sum_{i=1}^{4^n} \text{diam}(Q_i^n) = \sqrt{2}$.

Exemple: el conjunt de Cantor planar 1/4

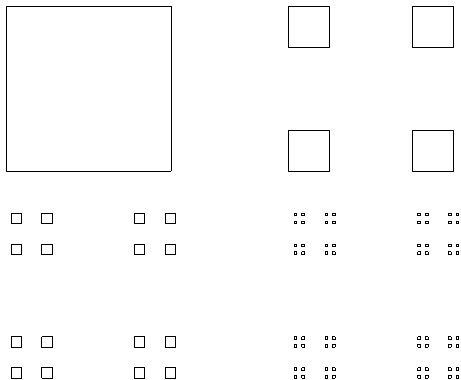


A cada generació n hi ha 4^n quadrats Q_i^n de costat 4^{-n} .

Per tant, $\sum_{i=1}^{4^n} \text{diam}(Q_i^n) = \sqrt{2}$.

Es dedueix que $\mathcal{H}^1(E) \leq \sqrt{2}$.

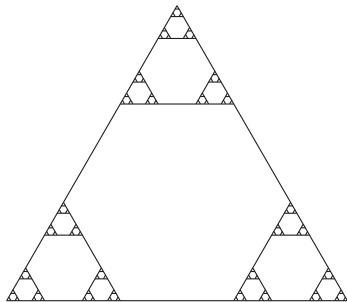
Exemple: el conjunt de Cantor planar 1/4



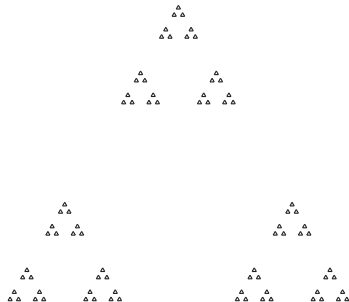
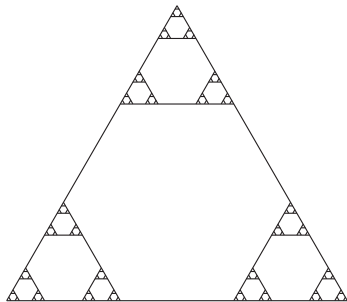
A cada generació n hi ha 4^n quadrats Q_i^n de costat 4^{-n} .
Per tant, $\sum_{i=1}^{4^n} \text{diam}(Q_i^n) = \sqrt{2}$.

Es dedueix que $\mathcal{H}^1(E) \leq \sqrt{2}$. De fet $\mathcal{H}^1(E) = \sqrt{2}$.

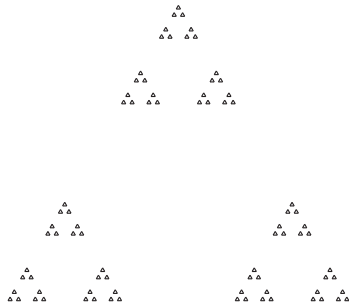
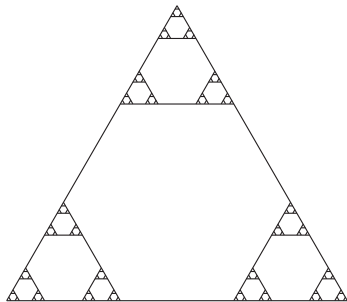
Una versió triangular



Una versió triangular

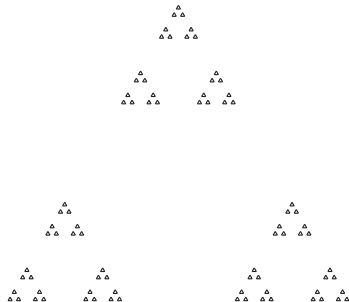
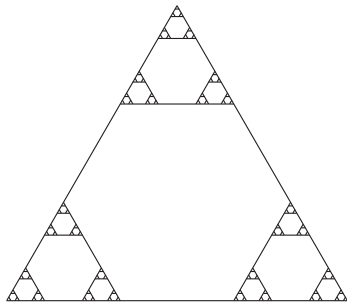


Una versió triangular



A cada generació n hi ha 3^n triangles de costat 3^{-n} .

Una versió triangular



A cada generació n hi ha 3^n triangles de costat 3^{-n} .
Es dedueix que $0 < \mathcal{H}^1(E) < \infty$.

Rectificabilitat

- Un conjunt $E \subset \mathbb{R}^2$ s'anomena **rectificable** si està contingut en una unió numerable de corbes de longitud finita, llevat d'un conjunt de longitud 0.

Rectificabilitat

- Un conjunt $E \subset \mathbb{R}^2$ s'anomena **rectificable** si està contingut en una unió numerable de corbes de longitud finita, llevat d'un conjunt de longitud 0.
- $E \subset \mathbb{R}^2$ és **purament no rectificable** si $\mathcal{H}^1(E \cap \Gamma) = 0$ per a tota corba Γ de longitud finita.

Rectificabilitat

- Un conjunt $E \subset \mathbb{R}^2$ s'anomena **rectificable** si està contingut en una unió numerable de corbes de longitud finita, llevat d'un conjunt de longitud 0.
- $E \subset \mathbb{R}^2$ és **purament no rectificable** si $\mathcal{H}^1(E \cap \Gamma) = 0$ per a tota corba Γ de longitud finita.

Hi ha versions en dimensions superiors d'aquestes nocions.

Exemples de conjunts purament no rectificables

El conjunt de Cantor planar $1/4$ i la seva versió triangular:

□□ □□ □□ □□

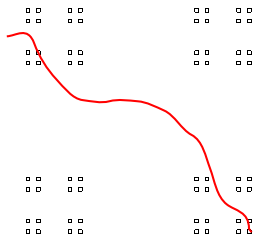
□□ □□ □□ □□

□□ □□ □□ □□

□□ □□ □□ □□

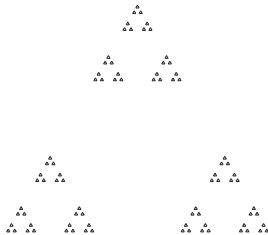
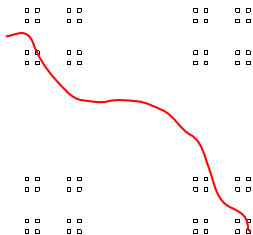
Exemples de conjunts purament no rectificables

El conjunt de Cantor planar $1/4$ i la seva versió triangular:

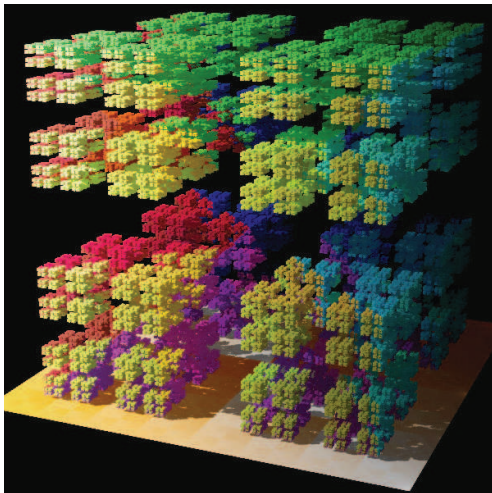


Exemples de conjunts purament no rectificables

El conjunt de Cantor planar $1/4$ i la seva versió triangular:



Un conjunt purament no rectificable 2-dimensional en \mathbb{R}^3



Teoria geomètrica de la mesura

La teoria geomètrica de la mesura estudia, entre d'altres coses, les diferents propietats dels conjunts rectificables i dels purament no rectificables.

Teoria geomètrica de la mesura

La teoria geomètrica de la mesura estudia, entre d'altres coses, les diferents propietats dels conjunts rectificables i dels purament no rectificables.

El “pare” de la teoria geomètrica de la mesura:

Besicovitch (1891-1970)



Caracteritzacions de la rectificabilitat

Hi ha caracteritzacions de la rectificabilitat en termes de:

- Existència de tangents aproximades.
- Existència de densitats.
- Mida de les projeccions ortogonals.

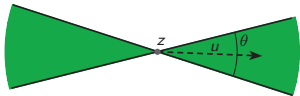
(Besicovitch, Federer, Marstrand, Mattila, Preiss...).

Tangents

Donat $z \in \mathbb{R}^2$, un vector unitari $u \in \mathbb{R}^2$, i un angle $\theta > 0$, considerem el con (tancat) $X(z, u, \theta)$:

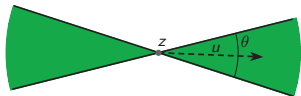
Tangents

Donat $z \in \mathbb{R}^2$, un vector unitari $u \in \mathbb{R}^2$, i un angle $\theta > 0$, considerem el con (tancat) $X(z, u, \theta)$:



Tangents

Donat $z \in \mathbb{R}^2$, un vector unitari $u \in \mathbb{R}^2$, i un angle $\theta > 0$, considerem el con (tancat) $X(z, u, \theta)$:

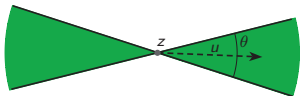


- Díem que $E \subset \mathbb{R}^2$ té una tangent en $z \in E$ en la direcció u si per a tot $\theta > 0$ existeix $r_0 > 0$ tal que

$$E \cap B(z, r) \setminus X(z, u, \theta) = \emptyset \quad \text{si } 0 < r \leq r_0.$$

Tangents

Donat $z \in \mathbb{R}^2$, un vector unitari $u \in \mathbb{R}^2$, i un angle $\theta > 0$, considerem el con (tancat) $X(z, u, \theta)$:



- Díem que $E \subset \mathbb{R}^2$ té una tangent en $z \in E$ en la direcció u si per a tot $\theta > 0$ existeix $r_0 > 0$ tal que

$$E \cap B(z, r) \setminus X(z, u, \theta) = \emptyset \quad \text{si } 0 < r \leq r_0.$$

- Díem que $E \subset \mathbb{R}^2$ té una tangent aproximada en $z \in E$ en la direcció u si, per a tot $\theta > 0$,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^1(E \cap B(z, r) \setminus X(z, u, \theta))}{r} = 0.$$

Rectificabilitat i tangents

Teorema

Sigui $E \subset \mathbb{R}^2$, $0 < \mathcal{H}^1(E) < \infty$. Llavors:

Rectificabilitat i tangents

Teorema

Sigui $E \subset \mathbb{R}^2$, $0 < \mathcal{H}^1(E) < \infty$. Llavors:

- *E és rectificable si i només si E té una tangent aproximada \mathcal{H}^1 -q.p.t. $x \in E$.*

Rectificabilitat i tangents

Teorema

Sigui $E \subset \mathbb{R}^2$, $0 < \mathcal{H}^1(E) < \infty$. Llavors:

- E és rectificable si i només si E té una tangent aproximada \mathcal{H}^1 -q.p.t. $x \in E$.*
- E és purament no rectificable si i només si per \mathcal{H}^1 -q.p.t. $x \in E$ no hi ha cap tangent aproximada.*

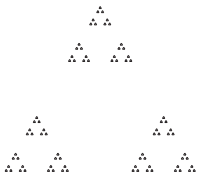
Rectificabilitat i tangents

Teorema

Sigui $E \subset \mathbb{R}^2$, $0 < \mathcal{H}^1(E) < \infty$. Llavors:

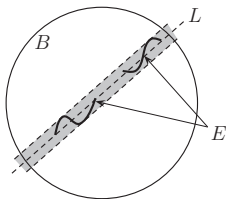
- E és rectificable si i només si E té una tangent aproximada \mathcal{H}^1 -q.p.t. $x \in E$.
- E és purament no rectificable si i només si per \mathcal{H}^1 -q.p.t. $x \in E$ no hi ha cap tangent aproximada.

Exemple: El següent conjunt no té tangent aproximada en cap punt (\mathcal{H}^1 -q.p.t.):



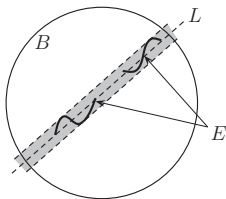
Els coeficients β de Peter Jones i el teorema de Bishop-Jones

Donats $E \subset \mathbb{R}^2$ i una bola B , denotem $\beta_E(B) = \inf_{L \text{ recta}} \sup_{x \in E \cap B} \frac{\text{dist}(x, L)}{r(B)}$.



Els coeficients β de Peter Jones i el teorema de Bishop-Jones

Donats $E \subset \mathbb{R}^2$ i una bola B , denotem $\beta_E(B) = \inf_{L \text{ recta}} \sup_{x \in E \cap B} \frac{\text{dist}(x, L)}{r(B)}$.



Teorema (Bishop, Jones, 1994)

Sigui Γ una corba de Jordan. Llavors, excepte en un conjunt de mesura \mathcal{H}^1 nul·la,

$$\int_0^1 \beta_{\Gamma}(B(x, r))^2 \frac{dr}{r} < \infty \text{ en } x \in \Gamma \Leftrightarrow \Gamma \text{ té una tangent en } x.$$

La funció quadràtica de Jones i la rectificabilitat

Donat $E \subset \mathbb{R}^2$, considerem

$$J(x) := \int_0^\infty \beta_E(B(x, r))^2 \frac{dr}{r}.$$

Es la funció quadràtica de Jones.

La funció quadràtica de Jones i la rectificabilitat

Donat $E \subset \mathbb{R}^2$, considerem

$$J(x) := \int_0^\infty \beta_E(B(x, r))^2 \frac{dr}{r}.$$

Es la funció quadràtica de Jones.

L'estudi d'aquesta funció quadràtica i altres variants permet aplicar tècniques inspirades en anàlisi harmònica a l'estudi de la rectificabilitat.

La funció quadràtica de Jones i la rectificabilitat

Donat $E \subset \mathbb{R}^2$, considerem

$$J(x) := \int_0^\infty \beta_E(B(x, r))^2 \frac{dr}{r}.$$

Es la funció quadràtica de Jones.

L'estudi d'aquesta funció quadràtica i altres variants permet aplicar tècniques inspirades en anàlisi harmònica a l'estudi de la rectificabilitat.

Aplicacions:

- Inici de la teoria quantitativa de la rectificabilitat.

La funció quadràtica de Jones i la rectificabilitat

Donat $E \subset \mathbb{R}^2$, considerem

$$J(x) := \int_0^\infty \beta_E(B(x, r))^2 \frac{dr}{r}.$$

Es la funció quadràtica de Jones.

L'estudi d'aquesta funció quadràtica i altres variants permet aplicar tècniques inspirades en anàlisi harmònica a l'estudi de la rectificabilitat.

Aplicacions:

- Inici de la teoria quantitativa de la rectificabilitat.
- Estudi de l'acotació d'operadors integrals singulars sobre conjunts rectificables.

La funció quadràtica de Jones i la rectificabilitat

Donat $E \subset \mathbb{R}^2$, considerem

$$J(x) := \int_0^\infty \beta_E(B(x, r))^2 \frac{dr}{r}.$$

Es la funció quadràtica de Jones.

L'estudi d'aquesta funció quadràtica i altres variants permet aplicar tècniques inspirades en anàlisi harmònica a l'estudi de la rectificabilitat.

Aplicacions:

- Inici de la teoria quantitativa de la rectificabilitat.
- Estudi de l'acotació d'operadors integrals singulars sobre conjunts rectificables.
- Problema de Painlevé sobre les singularitats evitables de les funcions analítiques acotades.

La funció quadràtica de Jones i la rectificabilitat

Donat $E \subset \mathbb{R}^2$, considerem

$$J(x) := \int_0^\infty \beta_E(B(x, r))^2 \frac{dr}{r}.$$

Es la funció quadràtica de Jones.

L'estudi d'aquesta funció quadràtica i altres variants permet aplicar tècniques inspirades en anàlisi harmònica a l'estudi de la rectificabilitat.

Aplicacions:

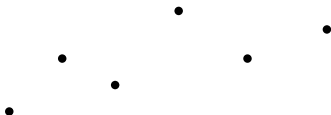
- Inici de la teoria quantitativa de la rectificabilitat.
- Estudi de l'acotació d'operadors integrals singulars sobre conjunts rectificables.
- Problema de Painlevé sobre les singularitats evitables de les funcions analítiques acotades.
- Problemes de frontera lliure, superfícies mínimes,...

Peter Jones i el “traveling salesman theorem”

La demostració del teorema de Bishop-Jones està basada en el l'anomenat “traveling salesman theorem” (teorema del viatjant de comerç) de Peter Jones (1990).

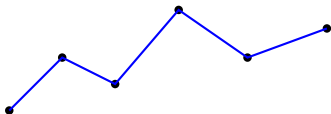
Peter Jones i el “traveling salesman theorem”

La demostració del teorema de Bishop-Jones està basada en el l'anomenat “traveling salesman theorem” (teorema del viatjant de comerç) de Peter Jones (1990).



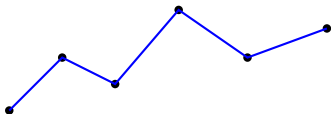
Peter Jones i el “traveling salesman theorem”

La demostració del teorema de Bishop-Jones està basada en el l'anomenat “traveling salesman theorem” (teorema del viatjant de comerç) de Peter Jones (1990).



Peter Jones i el “traveling salesman theorem”

La demostració del teorema de Bishop-Jones està basada en el l'anomenat “traveling salesman theorem” (teorema del viatjant de comerç) de Peter Jones (1990).



Peter Jones (1952-)

Contribucions importants en:

- Anàlisi harmònica.
- Anàlisi complexa.
- Teoria geomètrica de la mesura.



El traveling salesman theorem de Peter Jones

Teorema (Jones, 1990)

Sigui $E \subset \mathbb{R}^2$. La longitud de la corba de longitud mínima que conté E satisfà

$$\mathcal{H}^1(\Gamma) \approx \text{diam}(E) + \sum_{Q \in \mathcal{D}} \beta_E(3Q)^2 \ell(Q).$$

El traveling salesman theorem de Peter Jones

Teorema (Jones, 1990)

Sigui $E \subset \mathbb{R}^2$. La longitud de la corba de longitud mínima que conté E satisfà

$$\mathcal{H}^1(\Gamma) \approx \text{diam}(E) + \sum_{Q \in \mathcal{D}} \beta_E(3Q)^2 \ell(Q).$$

Observacions:

- $a \approx b$ vol dir que existeix una constant universal $C > 0$ tal que $C^{-1}a \leq b \leq Cb$.

El traveling salesman theorem de Peter Jones

Teorema (Jones, 1990)

Sigui $E \subset \mathbb{R}^2$. La longitud de la corba de longitud mínima que conté E satisfà

$$\mathcal{H}^1(\Gamma) \approx \text{diam}(E) + \sum_{Q \in \mathcal{D}} \beta_E(3Q)^2 \ell(Q).$$

Observacions:

- $a \approx b$ vol dir que existeix una constant universal $C > 0$ tal que $C^{-1}a \leq b \leq Cb$.
- $\text{diam}(E)$ és el diàmetre de E .

El traveling salesman theorem de Peter Jones

Teorema (Jones, 1990)

Sigui $E \subset \mathbb{R}^2$. La longitud de la corba de longitud mínima que conté E satisfà

$$\mathcal{H}^1(\Gamma) \approx \text{diam}(E) + \sum_{Q \in \mathcal{D}} \beta_E(3Q)^2 \ell(Q).$$

Observacions:

- $a \approx b$ vol dir que existeix una constant universal $C > 0$ tal que $C^{-1}a \leq b \leq Cb$.
- $\text{diam}(E)$ és el diàmetre de E .
- \mathcal{D} és la família de tots els quadrats diàdics del pla:

$$Q = (j_x 2^k, (j_x + 1) 2^k] \times (j_y 2^k, (j_y + 1) 2^k], \quad j_x, j_y, k \in \mathbb{Z}.$$

El traveling salesman theorem de Peter Jones

Teorema (Jones, 1990)

Sigui $E \subset \mathbb{R}^2$. La longitud de la corba de longitud mínima que conté E satisfà

$$\mathcal{H}^1(\Gamma) \approx \text{diam}(E) + \sum_{Q \in \mathcal{D}} \beta_E(3Q)^2 \ell(Q).$$

Observacions:

- $a \approx b$ vol dir que existeix una constant universal $C > 0$ tal que $C^{-1}a \leq b \leq Cb$.
- $\text{diam}(E)$ és el diàmetre de E .
- \mathcal{D} és la família de tots els quadrats diàdics del pla:

$$Q = (j_x 2^k, (j_x + 1) 2^k] \times (j_y 2^k, (j_y + 1) 2^k], \quad j_x, j_y, k \in \mathbb{Z}.$$

- $3Q$ és el quadrat concentric amb Q de costat triple.

El traveling salesman theorem de Peter Jones

Teorema (Jones, 1990)

Sigui $E \subset \mathbb{R}^2$. La longitud de la corba de longitud mínima que conté E satisfà

$$\mathcal{H}^1(\Gamma) \approx \text{diam}(E) + \sum_{Q \in \mathcal{D}} \beta_E(3Q)^2 \ell(Q).$$

Observacions:

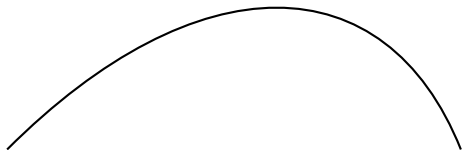
- $a \approx b$ vol dir que existeix una constant universal $C > 0$ tal que $C^{-1}a \leq b \leq Cb$.
- $\text{diam}(E)$ és el diàmetre de E .
- \mathcal{D} és la família de tots els quadrats diàdics del pla:

$$Q = (j_x 2^k, (j_x + 1) 2^k] \times (j_y 2^k, (j_y + 1) 2^k], \quad j_x, j_y, k \in \mathbb{Z}.$$

- $3Q$ és el quadrat concentric amb Q de costat triple.
- $\ell(Q)$ és el costat de Q .

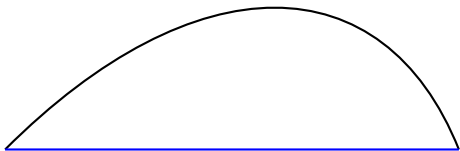
El traveling salesman theorem de Peter Jones (2)

Idea de la demostració:



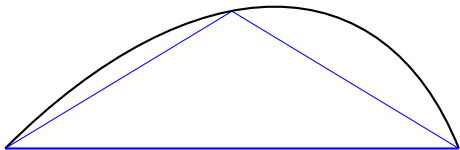
El traveling salesman theorem de Peter Jones (2)

Idea de la demostració:



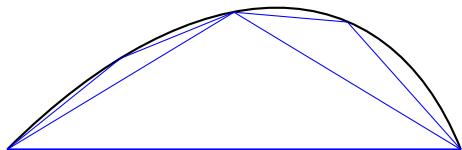
El traveling salesman theorem de Peter Jones (2)

Idea de la demostració:



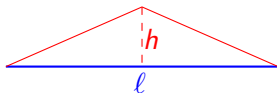
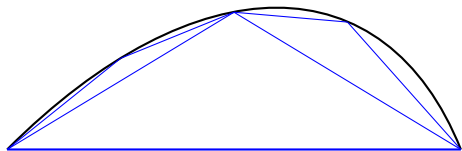
El traveling salesman theorem de Peter Jones (2)

Idea de la demostració:



El traveling salesman theorem de Peter Jones (2)

Idea de la demostració:

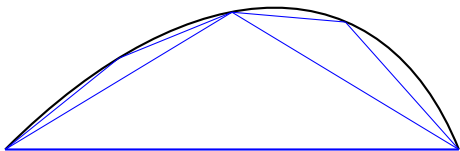


L'increment de longitud és

$$\sqrt{(2h)^2 + l^2} - l \approx \left(\frac{h}{l}\right)^2 l = \beta^2 l.$$

El traveling salesman theorem de Peter Jones (2)

Idea de la demostració:



L'increment de longitud és

$$\sqrt{(2h)^2 + l^2} - l \approx \left(\frac{h}{l}\right)^2 l = \beta^2 l.$$

Els coeficients β mesuren l'increment de longitud entre aproximacions successives de E mitjançant cobes Γ_k formades per segments de longitud comparable a 2^{-k} .

Essencialment, es compleix

$$\mathcal{H}^1(\Gamma_{k+1}) - \mathcal{H}^1(\Gamma_k) \approx \sum_{Q \in \mathcal{D}: \ell(Q) = 2^{-k}} \beta_E(3Q)^2 \ell(Q).$$

La funció ε^2 de Carleson

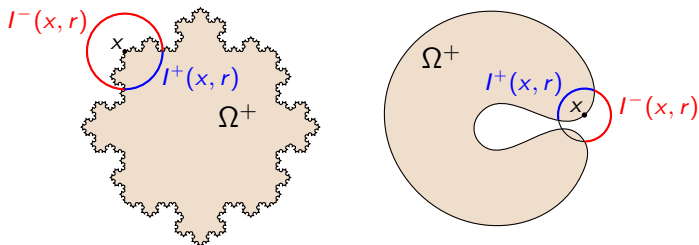
Sigui $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ una corba de Jordan, i Ω^+ , Ω^- les components acotada i no acotada, respectivament, de $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$.

Per $x \in \Gamma$, $r > 0$, siguin $I^+(x, r)$, $I^-(x, r)$, els arcs de longitud màxima continguts en $\Omega^+ \cap \partial B(x, r)$ i $\Omega^- \cap \partial B(x, r)$.

La funció ε^2 de Carleson

Sigui $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ una corba de Jordan, i Ω^+ , Ω^- les components acotada i no acotada, respectivament, de $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$.

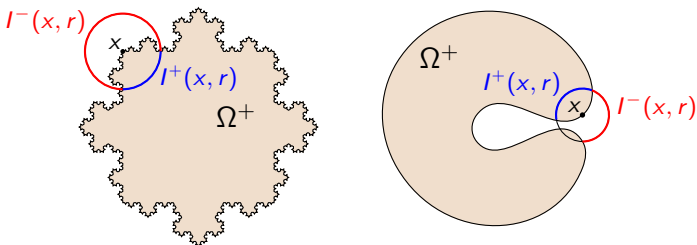
Per $x \in \Gamma$, $r > 0$, siguin $I^+(x, r)$, $I^-(x, r)$, els arcs de longitud màxima continguts en $\Omega^+ \cap \partial B(x, r)$ i $\Omega^- \cap \partial B(x, r)$.



La funció ε^2 de Carleson

Sigui $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ una corba de Jordan, i Ω^+ , Ω^- les components acotada i no acotada, respectivament, de $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$.

Per $x \in \Gamma$, $r > 0$, siguin $I^+(x, r)$, $I^-(x, r)$, els arcs de longitud màxima continguts en $\Omega^+ \cap \partial B(x, r)$ i $\Omega^- \cap \partial B(x, r)$.



Siguin $\theta^\pm(x, r)$ els angles dels arcs $I^\pm(x, r)$.

Sigui

$$\varepsilon(x, r) = \max(|\pi - \theta^+(x, r)|, |\pi - \theta^-(x, r)|), \quad \mathcal{E}(x) = \int_0^1 \varepsilon(x, r)^2 \frac{dr}{r}.$$

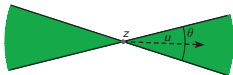
Conjectura ε^2 de Carleson

Recordem:

$$\varepsilon(x, r) = \max(|\pi - \theta^+(x, r)|, |\pi - \theta^-(x, r)|), \quad \mathcal{E}(x) = \int_0^1 \varepsilon(x, r)^2 \frac{dr}{r}.$$

Recordem també que $\Gamma = \partial\Omega^+ \subset \mathbb{R}^2$ té una tangent en x en la direcció u si per a tot $\theta > 0$ existeix $r_0 > 0$ tal que

$$E \cap B(x, r) \setminus X(x, u, \theta) = \emptyset \quad \text{si } 0 < r \leq r_0.$$



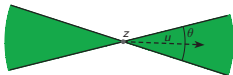
Conjectura ε^2 de Carleson

Recordem:

$$\varepsilon(x, r) = \max(|\pi - \theta^+(x, r)|, |\pi - \theta^-(x, r)|), \quad \mathcal{E}(x) = \int_0^1 \varepsilon(x, r)^2 \frac{dr}{r}.$$

Recordem també que $\Gamma = \partial\Omega^+ \subset \mathbb{R}^2$ té una tangent en x en la direcció u si per a tot $\theta > 0$ existeix $r_0 > 0$ tal que

$$E \cap B(x, r) \setminus X(x, u, \theta) = \emptyset \quad \text{si } 0 < r \leq r_0.$$



Díem que és una tangent pel domini Ω^+ si, a més, una component de $B(x, r) \setminus X(x, u, \theta)$ està continguda en Ω^+ i l'altra en Ω^- , per $0 < r \leq r_0$.

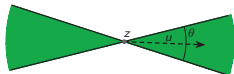
Conjectura ε^2 de Carleson

Recordem:

$$\varepsilon(x, r) = \max(|\pi - \theta^+(x, r)|, |\pi - \theta^-(x, r)|), \quad \mathcal{E}(x) = \int_0^1 \varepsilon(x, r)^2 \frac{dr}{r}.$$

Recordem també que $\Gamma = \partial\Omega^+ \subset \mathbb{R}^2$ té una tangent en x en la direcció u si per a tot $\theta > 0$ existeix $r_0 > 0$ tal que

$$E \cap B(x, r) \setminus X(x, u, \theta) = \emptyset \quad \text{si } 0 < r \leq r_0.$$



Díem que és una tangent pel domini Ω^+ si, a més, una component de $B(x, r) \setminus X(x, u, \theta)$ està continguda en Ω^+ i l'altra en Ω^- , per $0 < r \leq r_0$.

Conjectura (Carleson, \sim 1987)

Sigui $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ una corba de Jordan. Llavors, llevat d'un conjunt de longitud 0,

$$\Omega^+ \text{ té una tangent a } x \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{E}(x) < \infty.$$

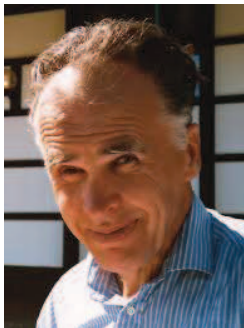
Conjectura ε^2 de Carleson (2)

La conjectura va ser formulada per Carleson i/o Bishop a finals dels 1980 motivats per connexions amb la mesura harmònica.

Conjectura ε^2 de Carleson (2)

La conjectura va ser formulada per Carleson i/o Bishop a finals dels 1980 motivats per connexions amb la mesura harmònica.

Lennart Carleson (1928-)



Contribucions importants en:

- Anàlisi harmònica (convergència puntual de sèries de Fourier).
- Dinàmica complexa.

Premi Abel 2006.

Conjectura ε^2 de Carleson (2)

La conjectura va ser formulada per Carleson i/o Bishop a finals dels 1980 motivats per connexions amb la mesura harmònica.

Christopher Bishop



Contribucions importants en:

- Anàlisi complexa.
- Teoria geomètrica de funcions.
- Dinàmica complexa.

(Alumne de Peter Jones).

Solució de la conjectura ε^2 de Carleson

Recordem:

Conjectura

Per una corba de Jordan $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, llevat d'un conjunt de longitud 0, tenim

$$\Omega^+ \text{ té una tangent a } x \iff \mathcal{E}(x) < \infty.$$

Solució de la conjectura ε^2 de Carleson

Recordem:

Conjectura

Per una corba de Jordan $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, llevat d'un conjunt de longitud 0, tenim

$$\Omega^+ \text{ té una tangent a } x \iff \mathcal{E}(x) < \infty.$$

La **implicació** \Rightarrow és coneguda des del 1987, per un argument essencialment degut a Bishop.

Solució de la conjectura ε^2 de Carleson

Recordem:

Conjectura

Per una corba de Jordan $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, llevat d'un conjunt de longitud 0, tenim

$$\Omega^+ \text{ té una tangent a } x \iff \mathcal{E}(x) < \infty.$$

La **implicació** \Rightarrow és coneguda des del 1987, per un argument essencialment degut a Bishop. Es pot demostrar:

- Utilitzant un teorema de distorsió de la mesura harmònica.

Solució de la conjectura ε^2 de Carleson

Recordem:

Conjectura

Per una corba de Jordan $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, llevat d'un conjunt de longitud 0, tenim

$$\Omega^+ \text{ té una tangent a } x \iff \mathcal{E}(x) < \infty.$$

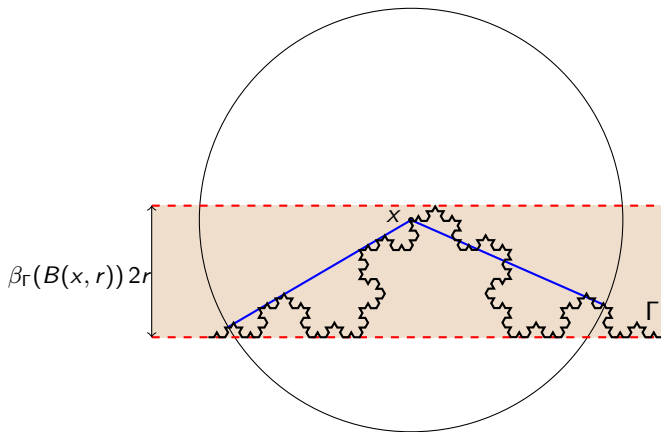
La **implicació** \Rightarrow és coneguda des del 1987, per un argument essencialment degut a Bishop. Es pot demostrar:

- Utilitzant un teorema de distorsió de la mesura harmònica.
- O bé utilitzant el teorema de Bishop-Jones i el fet que

$$\varepsilon(x, r) \leq C \beta_{\Gamma}(B(x, r))$$

si x és un punt tangent i r prou petit.

$$\varepsilon(x, r) \leq C \beta_{\Gamma}(B(x, r))$$



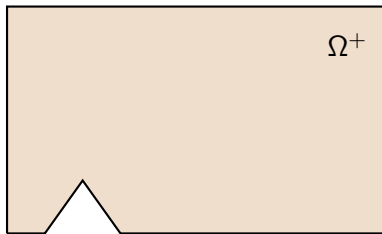
$$\varepsilon(x, r) \geq C' \beta_{\Gamma}(B(x, r)) ?$$

$$\varepsilon(x, r) \geq C' \beta_{\Gamma}(B(x, r)) ?$$

NO !!

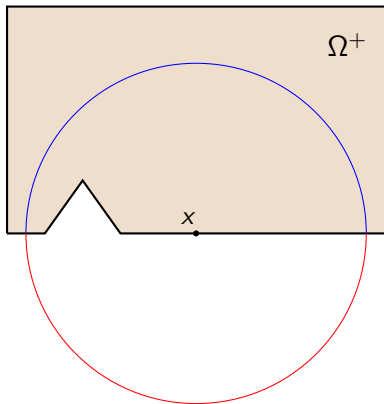
$$\varepsilon(x, r) \geq C' \beta_{\Gamma}(B(x, r)) ?$$

NO !!



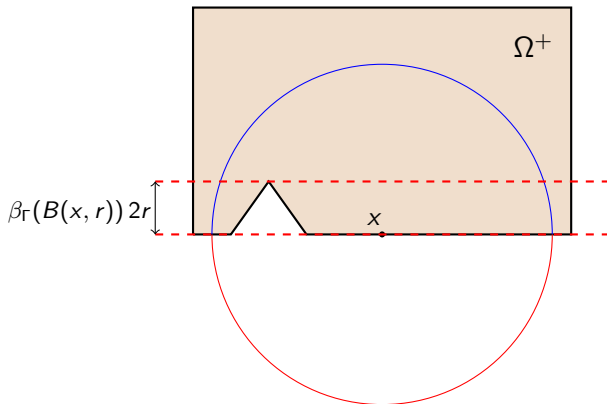
$$\varepsilon(x, r) \geq C' \beta_{\Gamma}(B(x, r)) ?$$

NO !!



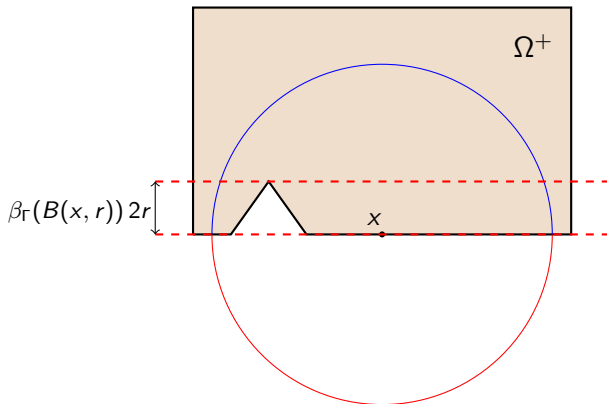
$$\varepsilon(x, r) \geq C' \beta_{\Gamma}(B(x, r)) ?$$

NO !!



$$\varepsilon(x, r) \geq C' \beta_{\Gamma}(B(x, r)) ?$$

NO !!



En aquest cas: $\varepsilon(x, r) = 0$ i $\beta_{\Gamma}(B(x, r)) > 0$.

L'altra implicació de la conjectura ε^2 de Carleson

La implicació

$$\mathcal{E}(x) < \infty \quad \Rightarrow \quad \Omega^+ \text{ té una tangent a } x, \text{ per } \mathcal{H}^1 \text{ q.p.t. } x$$

ha estat oberta fins molt recentment.

L'altra implicació de la conjectura ε^2 de Carleson

Teorema (Jaye, T., Villa, 2019)

Donada una corba de Jordan $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, llevat d'un conjunt de longitud 0, tenim

$$\mathcal{E}(x) < \infty \quad \Rightarrow \quad \Omega^+ \text{ té una tangent a } x.$$

L'altra implicació de la conjectura ε^2 de Carleson

Teorema (Jaye, T., Villa, 2019)

Donada una corba de Jordan $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, llevat d'un conjunt de longitud 0, tenim

$$\mathcal{E}(x) < \infty \quad \Rightarrow \quad \Omega^+ \text{ té una tangent a } x.$$

- Una dificultat important de la demostració és el fet que els coeficients $\varepsilon(x, r)$ són molt més inestables que $\beta_\Gamma(B(x, r))$ quan r o x canvien lleugerament.

L'altra implicació de la conjectura ε^2 de Carleson

Teorema (Jaye, T., Villa, 2019)

Donada una corba de Jordan $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, llevat d'un conjunt de longitud 0, tenim

$$\mathcal{E}(x) < \infty \quad \Rightarrow \quad \Omega^+ \text{ té una tangent a } x.$$

- Una dificultat important de la demostració és el fet que els coeficients $\varepsilon(x, r)$ són molt més inestables que $\beta_\Gamma(B(x, r))$ quan r o x canvien lleugerament.

Algunes tècniques involucrades en la demostració:

- Tècniques quantitatives de rectificabilitat originades amb el “traveling salesman theorem” de Peter Jones, i posteriorment refinades per David i Léger.

L'altra implicació de la conjectura ε^2 de Carleson

Teorema (Jaye, T., Villa, 2019)

Donada una corba de Jordan $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, llevat d'un conjunt de longitud 0, tenim

$$\mathcal{E}(x) < \infty \quad \Rightarrow \quad \Omega^+ \text{ té una tangent a } x.$$

- Una dificultat important de la demostració és el fet que els coeficients $\varepsilon(x, r)$ són molt més inestables que $\beta_\Gamma(B(x, r))$ quan r o x canvien lleugerament.

Algunes tècniques involucrades en la demostració:

- Tècniques quantitatives de rectificabilitat originades amb el “traveling salesman theorem” de Peter Jones, i posteriorment refinades per David i Léger.
- Arguments de compacitat.

L'altra implicació de la conjectura ε^2 de Carleson

Teorema (Jaye, T., Villa, 2019)

Donada una corba de Jordan $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, llevat d'un conjunt de longitud 0, tenim

$$\mathcal{E}(x) < \infty \quad \Rightarrow \quad \Omega^+ \text{ té una tangent a } x.$$

- Una dificultat important de la demostració és el fet que els coeficients $\varepsilon(x, r)$ són molt més inestables que $\beta_\Gamma(B(x, r))$ quan r o x canvien lleugerament.

Algunes tècniques involucrades en la demostració:

- Tècniques quantitatives de rectificabilitat originades amb el “traveling salesman theorem” de Peter Jones, i posteriorment refinades per David i Léger.
- Arguments de compacitat.
- Estimacions de Fourier en grafs Lipschitz.

Densitats

- Densitat 1-dimensional de E en x :

$$D^1(x, E) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^1(B(x, r) \cap E)}{2r},$$

Densitats

- Densitat 1-dimensional de E en x :

$$D^1(x, E) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^1(B(x, r) \cap E)}{2r},$$

- Densitat superior 1-dimensional:

$$D^{1,*}(x, E) := \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^1(B(x, r) \cap E)}{2r},$$

- Densitat inferior 1-dimensional:

$$D_*^1(x, E) := \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^1(B(x, r) \cap E)}{2r}.$$

Rectificabilitat i densitats

Recordem que:

$$D^1(x, E) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^1(B(x, r) \cap E)}{2r}.$$

Rectificabilitat i densitats

Recordem que:

$$D^1(x, E) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^1(B(x, r) \cap E)}{2r}.$$

Teorema (Besicovitch-Moore-Marstrand)

Sigui $E \subset \mathbb{R}^2$, $0 < \mathcal{H}^1(E) < \infty$. Són equivalents:

Rectificabilitat i densitats

Recordem que:

$$D^1(x, E) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^1(B(x, r) \cap E)}{2r}.$$

Teorema (Besicovitch-Moore-Marstrand)

Sigui $E \subset \mathbb{R}^2$, $0 < \mathcal{H}^1(E) < \infty$. Són equivalents:

- *E és rectificable.*

Rectificabilitat i densitats

Recordem que:

$$D^1(x, E) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^1(B(x, r) \cap E)}{2r}.$$

Teorema (Besicovitch-Moore-Marstrand)

Sigui $E \subset \mathbb{R}^2$, $0 < \mathcal{H}^1(E) < \infty$. Són equivalents:

- E és rectificable.
- $D^1(x, E) = 1$ \mathcal{H}^1 -q.p.t. $x \in E$.

Rectificabilitat i densitats

Recordem que:

$$D^1(x, E) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^1(B(x, r) \cap E)}{2r}.$$

Teorema (Besicovitch-Moore-Marstrand)

Sigui $E \subset \mathbb{R}^2$, $0 < \mathcal{H}^1(E) < \infty$. Són equivalents:

- E és rectificable.
- $D^1(x, E) = 1$ \mathcal{H}^1 -q.p.t. $x \in E$.
- $D^1(x, E)$ existeix \mathcal{H}^1 -q.p.t. $x \in E$.

Rectificabilitat i densitats

Recordem que:

$$D^1(x, E) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^1(B(x, r) \cap E)}{2r}.$$

Teorema (Besicovitch-Moore-Marstrand)

Sigui $E \subset \mathbb{R}^2$, $0 < \mathcal{H}^1(E) < \infty$. Són equivalents:

- E és rectificable.
- $D^1(x, E) = 1$ \mathcal{H}^1 -q.p.t. $x \in E$.
- $D^1(x, E)$ existeix \mathcal{H}^1 -q.p.t. $x \in E$.

Implicació difícil:

$$D^1(x, E) \text{ existeix } \mathcal{H}^1\text{-q.p.t. } x \in E \quad \Rightarrow \quad E \text{ és rectificable.}$$

Rectificabilitat i densitats

Recordem que:

$$D^1(x, E) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^1(B(x, r) \cap E)}{2r}.$$

Teorema (Besicovitch-Moore-Marstrand)

Sigui $E \subset \mathbb{R}^2$, $0 < \mathcal{H}^1(E) < \infty$. Són equivalents:

- E és rectificable.
- $D^1(x, E) = 1$ \mathcal{H}^1 -q.p.t. $x \in E$.
- $D^1(x, E)$ existeix \mathcal{H}^1 -q.p.t. $x \in E$.

Implicació difícil:

$$D^1(x, E) \text{ existeix } \mathcal{H}^1\text{-q.p.t. } x \in E \Rightarrow E \text{ és rectificable.}$$

Problema obert (Besicovitch):

E purament no rectificable $\Rightarrow D_*^1(x, E) \leq 1/2$ \mathcal{H}^1 -q.p.t. $x \in E$.

Una funció quadràtica relacionada amb la densitat

Teorema (T.)

Sigui $E \subset \mathbb{R}^2$ amb $0 < \mathcal{H}^1(E) < \infty$. Llavors, E és rectificable si i només si

$$\int_0^1 \left(\frac{\mathcal{H}^1(E \cap B(x, r))}{r^n} - \frac{\mathcal{H}^1(E \cap B(x, 2r))}{(2r)^n} \right)^2 \frac{dr}{r} < \infty \quad \mathcal{H}^1\text{-q.p.t.}$$

Una funció quadràtica relacionada amb la densitat

Teorema (T.)

Sigui $E \subset \mathbb{R}^2$ amb $0 < \mathcal{H}^1(E) < \infty$. Llavors, E és rectificable si i només si

$$\int_0^1 \left(\frac{\mathcal{H}^1(E \cap B(x, r))}{r^n} - \frac{\mathcal{H}^1(E \cap B(x, 2r))}{(2r)^n} \right)^2 \frac{dr}{r} < \infty \quad \mathcal{H}^1\text{-q.p.t.}$$

- Contribucions prèvies de Chouisionis, Garnett, Le, T., Toro.

Moltes gràcies!