Teoría de Loewner

Manuel D. Contreras

Departamento de Matemática Aplicada II
Universidad de Sevilla

V Encuentro de Análisis Funcional y Aplicaciones, 2009

Esquema de la conferencia.

Esquema:

Primera parte: Motivación y un poco de historia.

Veremos que la teoría de Loewner es una herramienta que se usa para resolver ciertos problemas *extremales* en *Análisis Complejo*.

Es un punto de encuentro entre *Análisis Complejo* y *EDOs*. Obviamente se usan técnicas y resultados de *Análisis Funcional* aunque quedan ocultos en las demostraciones.

Segunda parte: Algunos resultados nuestros sobre el tema.

Mostraremos alguna herramienta de *Análisis Funcional* que usamos: esto nos obligará a adentrarnos en alguna demostración.

¡Perdón por adelantado!

Esquema de la conferencia.

Esquema:

Primera parte: Motivación y un poco de historia.

Veremos que la teoría de Loewner es una herramienta que se usa para resolver ciertos problemas *extremales* en *Análisis Complejo*.

Es un punto de encuentro entre *Análisis Complejo* y *EDOs*. Obviamente se usan técnicas y resultados de *Análisis Funcional* aunque quedan ocultos en las demostraciones.

Segunda parte: Algunos resultados nuestros sobre el tema.

Mostraremos alguna herramienta de *Análisis Funcional* que usamos: esto nos obligará a adentrarnos en alguna demostración.

¡Perdón por adelantado!

Esquema de la conferencia.

Esquema:

Primera parte: Motivación y un poco de historia.

Veremos que la teoría de Loewner es una herramienta que se usa para resolver ciertos problemas *extremales* en *Análisis Complejo*.

Es un punto de encuentro entre *Análisis Complejo* y *EDOs*. Obviamente se usan técnicas y resultados de *Análisis Funcional* aunque quedan ocultos en las demostraciones.

Segunda parte: Algunos resultados nuestros sobre el tema.

Mostraremos alguna herramienta de *Análisis Funcional* que usamos: esto nos obligará a adentrarnos en alguna demostración.

¡Perdón por adelantado!

Esquema de la conferencia.

Esquema:

Primera parte: Motivación y un poco de historia.

Veremos que la teoría de Loewner es una herramienta que se usa para resolver ciertos problemas *extremales* en *Análisis Complejo*.

Es un punto de encuentro entre *Análisis Complejo* y *EDOs*. Obviamente se usan técnicas y resultados de *Análisis Funcional* aunque quedan ocultos en las demostraciones.

Segunda parte: Algunos resultados nuestros sobre el tema.

Mostraremos alguna herramienta de *Análisis Funcional* que usamos: esto nos obligará a adentrarnos en alguna demostración.

¡Perdón por adelantado!

Esquema de la conferencia.

Esquema:

Primera parte: Motivación y un poco de historia.

Veremos que la teoría de Loewner es una herramienta que se usa para resolver ciertos problemas *extremales* en *Análisis Complejo*.

Es un punto de encuentro entre *Análisis Complejo* y *EDOs*. Obviamente se usan técnicas y resultados de *Análisis Funcional* aunque quedan ocultos en las demostraciones.

Segunda parte: Algunos resultados nuestros sobre el tema.

Mostraremos alguna herramienta de *Análisis Funcional* que usamos: esto nos obligará a adentrarnos en alguna demostración.

¡Perdón por adelantado!

Conferencia basada en los trabajos:

- F. Bracci♣, M.D. Contreras, and S. Díaz-Madrigal♢, *Evolution Families and the Loewner Equation I: the unit disk*. Preprint 2008.
- F. Bracci, M.D. Contreras, and S. Díaz-Madrigal, *Evolution Families and the Loewner Equation II: complex hyperbolic manifolds*. Aparecerá en Math. Ann.
- M.D. Contreras, S. Díaz-Madrigal, and P. Gumenyuk♠, *Loewner Chains and Evolution Families*. Preprint 2008.

♣ Universitá di Roma “Tor Vergata” (Italia).
♢ Universidad de Sevilla.
♠ University of Bergen (Noruega).

Conferencia basada en los trabajos:

- F. Bracci♣, M.D. Contreras, and S. Díaz-Madrigal♢, *Evolution Families and the Loewner Equation I: the unit disk*. Preprint 2008.
- F. Bracci, M.D. Contreras, and S. Díaz-Madrigal, *Evolution Families and the Loewner Equation II: complex hyperbolic manifolds*. Aparecerá en Math. Ann.
- M.D. Contreras, S. Díaz-Madrigal, and P. Gumenyuk♠, *Loewner Chains and Evolution Families*. Preprint 2008.

♣ Universitá di Roma “Tor Vergata” (Italia).
♢ Universidad de Sevilla.
♠ University of Bergen (Noruega).

Un poco de historia: Teoría radial de Loewner.

Conjetura de Bieberbach, 1916

Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ univalente (analítica e inyectiva) dada por

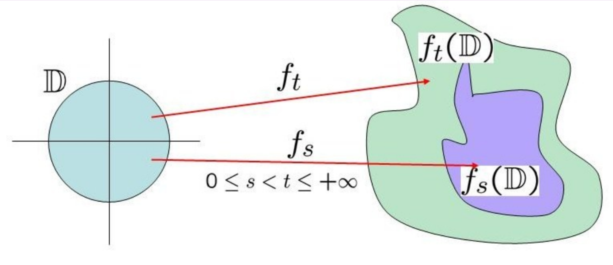
$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{D}.$$

¿Es cierto que $|a_n| \leq n$ para todo n?

Un poco de historia: Teoría radial de Loewner.

Idea de Loewner: incluir f en una familia de funciones univalentes dependiente de un parámetro t con un “orden”:

$$f_t(z) = a_1(t)z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n(t)z^n \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{D}.$$

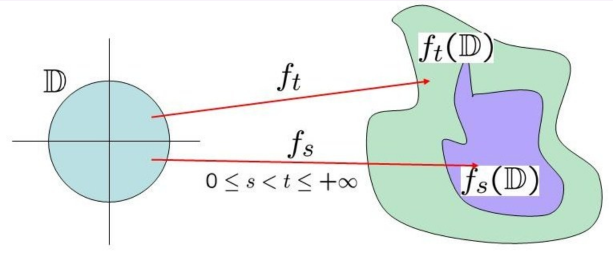


A continuación, derivar en t y, a partir de las estimaciones de la derivada (obtenidas de dicho “orden”), obtener información de los coeficientes a_n.

Un poco de historia: Teoría radial de Loewner.

Idea de Loewner: incluir f en una familia de funciones univalentes dependiente de un parámetro t con un “orden”:

$$f_t(z) = a_1(t)z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n(t)z^n \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{D}.$$



A continuación, derivar en t y, a partir de las estimaciones de la derivada (obtenidas de dicho “orden”), obtener información de los coeficientes a_n.

Un poco de historia: Teoría radial de Loewner.

Autores claves en el desarrollo de la teoría fueron

Loewner (1923)

Kufarev (1948) y Pommerenke (1965).

Finalmente la conjetura fue resuelta por de Branges en 1984.

La demostración que actualmente aparece en los textos se debe a Fitzgerald y Pommerenke (1985).

Véase el texto de Conway: Functions of one complex variable.

Un poco de historia: Teoría radial de Loewner.

Definición (Loewner, 1923)

Una familia $(f_t)_{t\geq 0}$ de funciones holomorfas en el disco unidad $\mathbb{D}$ se dice que es una cadena de Loewner si

- todas son univalentes;
- $f_t(0) = 0$, $f_t'(0) = e^t$ para todo $t \geq 0$;
- $f_s(\mathbb{D}) \subset f_t(\mathbb{D})$ siempre que $t \geq s \geq 0$.

Identificando f_t con su rango, podemos “pensar” que una cadena de Loewner es una familia creciente de dominios en el plano complejo: algo así como la forma de extenderse un fluido sobre una superficie plana horizontal.

Teorema

Sea f univalente con $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. Entonces existe una cadena de Loewner $(f_t)_{t\geq 0}$ tal que $f_0 = f$.

Un poco de historia: Teoría radial de Loewner.

Definición (Loewner, 1923)

Una familia $(f_t)_{t\geq 0}$ de funciones holomorfas en el disco unidad $\mathbb{D}$ se dice que es una cadena de Loewner si

- todas son univalentes;
- $f_t(0) = 0$, $f_t'(0) = e^t$ para todo $t \geq 0$;
- $f_s(\mathbb{D}) \subset f_t(\mathbb{D})$ siempre que $t \geq s \geq 0$.

Identificando f_t con su rango, podemos "pensar" que una cadena de Loewner es una familia creciente de dominios en el plano complejo: algo así como la forma de extenderse un fluido sobre una superficie plana horizontal.

Teorema

Sea f univalente con $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. Entonces existe una cadena de Loewner $(f_t)_{t\geq 0}$ tal que $f_0 = f$.

Un poco de historia: Teoría radial de Loewner.

Definición (Loewner, 1923)

Una familia $(f_t)_{t\geq 0}$ de funciones holomorfas en el disco unidad $\mathbb{D}$ se dice que es una cadena de Loewner si

- todas son univalentes;
- $f_t(0) = 0$, $f_t'(0) = e^t$ para todo $t \geq 0$;
- $f_s(\mathbb{D}) \subset f_t(\mathbb{D})$ siempre que $t \geq s \geq 0$.

Identificando f_t con su rango, podemos "pensar" que una cadena de Loewner es una familia creciente de dominios en el plano complejo: algo así como la forma de extenderse un fluido sobre una superficie plana horizontal.

Teorema

Sea f univalente con $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. Entonces existe una cadena de Loewner $(f_t)_{t\geq 0}$ tal que $f_0 = f$.

Un poco de historia: Teoría radial de Loewner.

La clave para el éxito de esta teoría radica en su relación con

Definición (EDO radial de Loewner)

La ecuación radial de Loewner en $\mathbb{D}$ es

$$\begin{cases} \overset{\bullet}{w} = -wp(w,t) & \text{para casi todo } t \in [s,\infty) \\ w(s) = z \end{cases}$$

donde $s \geq 0$ y $z \in \mathbb{D}$, con $p : \mathbb{D} \times [0,+\infty) \to \mathbb{C}$ medible en t, holomorfa en w, $p(0,t) = 1$ para todo $t \geq 0$ y $\operatorname{Re} p(w,t) \geq 0$.

La correspondiente solución (que está definida para todo $t \geq s$ y es analítica en z)

$$t \mapsto \varphi_{s,t}(z), \quad z \in \mathbb{D}, \ s \geq 0$$

es conocida en la literatura como familia de evolución (o funciones de transición, semigrupo asociado) y ...

Un poco de historia: Teoría radial de Loewner.

La clave para el éxito de esta teoría radica en su relación con

Definición (EDO radial de Loewner)

La ecuación radial de Loewner en $\mathbb{D}$ es

$$\begin{cases} \dot{w} = -wp(w,t) & \text{para casi todo } t \in [s,\infty) \\ w(s) = z \end{cases}$$

donde $s \geq 0$ y $z \in \mathbb{D}$, con $p : \mathbb{D} \times [0,+\infty) \to \mathbb{C}$ medible en t, holomorfa en w, $p(0,t) = 1$ para todo $t \geq 0$ y $\operatorname{Re} p(w,t) \geq 0$.

La correspondiente solución (que está definida para todo $t \geq s$ y es analítica en z)

$$t \mapsto \varphi_{s,t}(z), \quad z \in \mathbb{D}, \ s \geq 0$$

es conocida en la literatura como familia de evolución (o funciones de transición, semigrupo asociado) y ...

Un poco de historia: Teoría radial de Loewner.

... se verifica que si definimos f_s mediante

$$f_s := \lim_{t\to+\infty} e^t \varphi_{s,t} \quad \text{para todo } s \geq 0$$

tenemos que $(f_t)_{t\geq 0}$ es una cadena de Loewner. En cuyo caso

$$f_s = f_t \circ \varphi_{s,t} \qquad 0 \leq s \leq t.$$

Es decir, para cada función $p(z,t)$, a través de la soluciones de la EDO, uno construye una cadena de Loewner.

De hecho, toda cadena de Loewner se construye con este método.

Un poco de historia: Teoría radial de Loewner.

... se verifica que si definimos f_s mediante

$$f_s := \lim_{t\to+\infty} e^t \varphi_{s,t} \quad \text{para todo } s \geq 0$$

tenemos que $(f_t)_{t\geq 0}$ es una cadena de Loewner. En cuyo caso

$$f_s = f_t \circ \varphi_{s,t} \qquad 0 \leq s \leq t.$$

Es decir, para cada función $p(z,t)$, a través de la soluciones de la EDO, uno construye una cadena de Loewner.

De hecho, toda cadena de Loewner se construye con este método.

Un poco de historia: Teoría radial de Loewner.

... se verifica que si definimos f_s mediante

$$f_s := \lim_{t \to +\infty} e^t \varphi_{s,t} \quad \text{para todo } s \geq 0$$

tenemos que $(f_t)_{t \geq 0}$ es una cadena de Loewner. En cuyo caso

$$f_s = f_t \circ \varphi_{s,t} \qquad 0 \leq s \leq t.$$

Es decir, para cada función $p(z,t)$, a través de la soluciones de la EDO, uno construye una cadena de Loewner.

De hecho, toda cadena de Loewner se construye con este método.

Un poco de historia: Teoría radial de Loewner.

Esquema resumen: Teoría radial de Loewner

Conceptos: (f_s), $(\varphi_{s,t})$, $p(z,t)$.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Cadena de Loewner}} \arrow[r, shift left] \arrow[dr] & \boxed{\text{EDO de Loewner}} \arrow[l, shift left] \arrow[d] \\
 & \boxed{\text{Familia de evolución}}
\end{tikzcd}$$

Relaciones:
para $z \in \mathbb{D}$ y $0 \leq s \leq t$ se tiene:

1. La función $t \mapsto \varphi_{s,t}(z)$ es solución de
$$\begin{cases} \dot{w} = -wp(w,t) \\ w(s) = z \end{cases}$$
2. $f_s = f_t \circ \varphi_{s,t}$ y
3. $f_s := \lim_{t\to+\infty} e^t \varphi_{s,t}$.

Conjetura de Bieberbach: estimar p y pasar la información a f_0.

Un poco de historia: Teoría cordal de Loewner.

Conjetura de Mandelbrot, 1982

La dimensión de Hausdorff de la frontera exterior de un arco Browniano plano $B[0,1]$ es $\frac{4}{3}$ con probabilidad 1.

El movimiento browniano es el movimiento aleatorio constante de partículas diminutas suspendidas en un medio fluido.
Su formulación matemática precisa se debe a Einstein (1905).

Frontera exterior=frontera de la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus B[0,1]$.

Teorema (Lawler, Schramm, Werner, 2002)

La conjetura de Mandelbrot es cierta.

Un poco de historia: Teoría cordal de Loewner.

Conjetura de Mandelbrot, 1982

La dimensión de Hausdorff de la frontera exterior de un arco Browniano plano $B[0,1]$ es $\frac{4}{3}$ con probabilidad 1.

El movimiento browniano es el movimiento aleatorio constante de partículas diminutas suspendidas en un medio fluido.
Su formulación matemática precisa se debe a Einstein (1905).

Frontera exterior=frontera de la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus B[0,1]$.

Teorema (Lawler, Schramm, Werner, 2002)

La conjetura de Mandelbrot es cierta.

Un poco de historia: Teoría cordal de Loewner.

Conjetura de Mandelbrot, 1982

La dimensión de Hausdorff de la frontera exterior de un arco Browniano plano $B[0, 1]$ es $\frac{4}{3}$ con probabilidad 1.

El movimiento browniano es el movimiento aleatorio constante de partículas diminutas suspendidas en un medio fluido.
Su formulación matemática precisa se debe a Einstein (1905).

Frontera exterior=frontera de la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus B[0, 1]$.

Teorema (Lawler, Schramm, Werner, 2002)

La conjetura de Mandelbrot es cierta.

Un poco de historia: Teoría cordal de Loewner.

Conjetura de Mandelbrot, 1982

La dimensión de Hausdorff de la frontera exterior de un arco Browniano plano $B[0,1]$ es $\frac{4}{3}$ con probabilidad 1.

El movimiento browniano es el movimiento aleatorio constante de partículas diminutas suspendidas en un medio fluido.
Su formulación matemática precisa se debe a Einstein (1905).

Frontera exterior=frontera de la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus B[0,1]$.

Teorema (Lawler, Schramm, Werner, 2002)

La conjetura de Mandelbrot es cierta.

Un poco de historia: Teoría cordal de Loewner.

Definición (Schramm, 1999)

La EDO cordal de Loewner en el disco unidad $\mathbb{D}$ es la ecuación

$$\begin{cases} \dot{w} = (1-w)^2 p(w,t) & \text{para casi todo } t \in [s,\infty) \\ w(s) = z \end{cases}$$

donde $s \geq 0$ y $z \in \mathbb{D}$, con $p : \mathbb{D} \times [0,+\infty) \to \mathbb{C}$ medible en t, holomorfa en w y $\operatorname{Re} p(w,t) \geq 0$.

La correspondiente solución (que está definida para todo $t \geq s$)

$$t \mapsto \varphi_{s,t}(z), \quad z \in \mathbb{D}, \; s \geq 0$$

también es conocida como familia de evolución.

- De hecho, el caso usual es $p(w,t) = \frac{1}{T(w)+ih(t)}$ con $T(w) = \frac{1+w}{1-w}$ y $h : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ continua.

Un poco de historia: Teoría cordal de Loewner.

Definición (Schramm, 1999)

La EDO cordal de Loewner en el disco unidad $\mathbb{D}$ es la ecuación

$$\begin{cases} \dot{w} = (1-w)^2 p(w,t) & \text{para casi todo } t \in [s,\infty) \\ w(s) = z \end{cases}$$

donde $s \geq 0$ y $z \in \mathbb{D}$, con $p : \mathbb{D} \times [0,+\infty) \to \mathbb{C}$ medible en t, holomorfa en w y $\operatorname{Re} p(w,t) \geq 0$.

La correspondiente solución (que está definida para todo $t \geq s$)

$$t \mapsto \varphi_{s,t}(z), \quad z \in \mathbb{D}, \ s \geq 0$$

también es conocida como familia de evolución.

- De hecho, el caso usual es $p(w,t) = \frac{1}{T(w)+ih(t)}$ con $T(w) = \frac{1+w}{1-w}$ y $h : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ continua.

Un poco de historia: Teoría cordal de Loewner.

Muchos autores han trabajado en esta década en la ecuación cordal de Loewner:

- Lawler, Schramm, Werner: su versión estocástica ha permitido resolver la conjetura de Mandelbrot.
- R. O. Bauer, Friedrich
- Marshall, Rohde
- Prokhorov, Vasiliev
- ...

Un poco de historia: Teoría cordal de Loewner.

Muchos autores han trabajado en esta década en la ecuación cordal de Loewner:

- Lawler, Schramm, Werner: su versión estocástica ha permitido resolver la conjetura de Mandelbrot.
- R. O. Bauer, Friedrich
- Marshall, Rohde
- Prokhorov, Vasiliev
- ...

Un poco de historia: Teoría cordal de Loewner.

Muchos autores han trabajado en esta década en la ecuación cordal de Loewner:

- Lawler, Schramm, Werner: su versión estocástica ha permitido resolver la conjetura de Mandelbrot.
- R. O. Bauer, Friedrich
- Marshall, Rohde
- Prokhorov, Vasiliev
- ...

Un poco de historia: cordal comparado con radial.

Sea $p : \mathbb{D} \times [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ medible en t, holomorfa en z, con cierta normalización de $p(0, t)$ para $t \geq 0$ y $\operatorname{Re} p(z, t) \geq 0$.
Fijemos $s \geq 0$ y $z \in \mathbb{D}$.

EDO radial de Loewner

$$\begin{cases} \dot{w} = -wp(w, t) & \text{para casi todo } t \in [s, \infty) \\ w(s) = z \end{cases}$$

EDO cordal de Loewner

$$\begin{cases} \dot{w} = (1 - w)^2 p(w, t) & \text{para casi todo } t \in [s, \infty) \\ w(s) = z \end{cases}$$

Problema

¿Se puede hacer un estudio simultáneo de ambas teorías?

Un poco de historia: Familias de evolución.

Otra pregunta tratada ampliamente:
(por Ba, Gorjainov, R. O. Bauer, Friedrich, ...)

Problema

¿Qué es realmente una familia de evolución?

Es decir, ¿qué propiedades intrínsecas debe satisfacer una familia biparamétrica $(\varphi_{s,t})$ para ser solución de la EDO radial (o cordal) de Loewner?

Un poco de historia: Familias de evolución.

Otra pregunta tratada ampliamente:
(por Ba, Gorjainov, R. O. Bauer, Friedrich, ...)

Problema

¿Qué es realmente una familia de evolución?

Es decir, ¿qué propiedades intrínsecas debe satisfacer una familia biparamétrica $(\varphi_{s,t})$ para ser solución de la EDO radial (o cordal) de Loewner?

Un poco de historia: Familias de evolución.

Algunas propiedades naturales son:

- Holomorfía: $\varphi_{s,t}$ son auto-aplicaciones holomorfas de $\mathbb{D}$.
- Álgebra: $\varphi_{s,s} = id$ y $\varphi_{s,t} = \varphi_{u,t} \circ \varphi_{s,u}$, para $0 \leq s \leq u \leq t$ (reflejo de la unicidad de solución en la EDO).

De hecho, mucho más es necesario y en algunos intentos en la literatura pueden verse propiedades como:

- Univalencia: Cada $\varphi_{s,t}$ es univalente.
- Normalización radial: $\varphi_{s,t}(0) = 0$ y $\varphi'_{s,t}(0) = e^{s-t}$, para $s \leq t$.
  Cordal: $\varphi_{s,t}(1) = 1$ y $\varphi'_{s,t}(1) = 1$, para $s \leq t$ (angular).

Problema

¿Suficientes para garantizar que provienen de una EDO de Loewner?

Un poco de historia: Familias de evolución.

Algunas propiedades naturales son:

- Holomorfía: $\varphi_{s,t}$ son auto-aplicaciones holomorfas de $\mathbb{D}$.
- Álgebra: $\varphi_{s,s} = id$ y $\varphi_{s,t} = \varphi_{u,t} \circ \varphi_{s,u}$, para $0 \leq s \leq u \leq t$ (reflejo de la unicidad de solución en la EDO).

De hecho, mucho más es necesario y en algunos intentos en la literatura pueden verse propiedades como:

- Univalencia: Cada $\varphi_{s,t}$ es univalente.
- Normalización radial: $\varphi_{s,t}(0) = 0$ y $\varphi'_{s,t}(0) = e^{s-t}$, para $s \leq t$.
  Cordal: $\varphi_{s,t}(1) = 1$ y $\varphi'_{s,t}(1) = 1$, para $s \leq t$ (angular).

Problema

¿Suficientes para garantizar que provienen de una EDO de Loewner? NO

Un poco de historia: Familias de evolución.

Algunas propiedades naturales son:

- Holomorfía: $\varphi_{s,t}$ son auto-aplicaciones holomorfas de $\mathbb{D}$.
- Álgebra: $\varphi_{s,s} = id$ y $\varphi_{s,t} = \varphi_{u,t} \circ \varphi_{s,u}$, para $0 \leq s \leq u \leq t$ (reflejo de la unicidad de solución en la EDO).

De hecho, mucho más es necesario y en algunos intentos en la literatura pueden verse propiedades como:

- Univalencia: Cada $\varphi_{s,t}$ es univalente.
- Normalización radial: $\varphi_{s,t}(0) = 0$ y $\varphi'_{s,t}(0) = e^{s-t}$, para $s \leq t$.
  Cordal: $\varphi_{s,t}(1) = 1$ y $\varphi'_{s,t}(1) = 1$, para $s \leq t$ (angular).

Problema

¿Suficientes para garantizar que provienen de una EDO de Loewner? NO

Un poco de historia: Familias de evolución.

Algunas propiedades naturales son:

- Holomorfía: $\varphi_{s,t}$ son auto-aplicaciones holomorfas de $\mathbb{D}$.
- Álgebra: $\varphi_{s,s} = id$ y $\varphi_{s,t} = \varphi_{u,t} \circ \varphi_{s,u}$, para $0 \leq s \leq u \leq t$ (reflejo de la unicidad de solución en la EDO).

De hecho, mucho más es necesario y en algunos intentos en la literatura pueden verse propiedades como:

- Univalencia: Cada $\varphi_{s,t}$ es univalente.
- Normalización radial: $\varphi_{s,t}(0) = 0$ y $\varphi'_{s,t}(0) = e^{s-t}$, para $s \leq t$.

  Cordal: $\varphi_{s,t}(1) = 1$ y $\varphi'_{s,t}(1) = 1$, para $s \leq t$ (angular).

Problema

¿Suficientes para garantizar que provienen de una EDO de Loewner? NO

Un poco de historia: Familias de evolución.

Algunas propiedades naturales son:

- Holomorfía: $\varphi_{s,t}$ son auto-aplicaciones holomorfas de $\mathbb{D}$.
- Álgebra: $\varphi_{s,s} = id$ y $\varphi_{s,t} = \varphi_{u,t} \circ \varphi_{s,u}$, para $0 \leq s \leq u \leq t$ (reflejo de la unicidad de solución en la EDO).

De hecho, mucho más es necesario y en algunos intentos en la literatura pueden verse propiedades como:

- Univalencia: Cada $\varphi_{s,t}$ es univalente.
- Normalización radial: $\varphi_{s,t}(0) = 0$ y $\varphi'_{s,t}(0) = e^{s-t}$, para $s \leq t$.
  Cordal: $\varphi_{s,t}(1) = 1$ y $\varphi'_{s,t}(1) = 1$, para $s \leq t$ (angular).

Problema

¿Suficientes para garantizar que provienen de una EDO de Loewner? NO

Un poco de historia: Esquema resumen

Teoría radial (o clásica) de Loewner

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Cadena de Loewner}} \arrow[r, shift left] \arrow[dr] & \boxed{\text{EDO de Loewner}} \arrow[l, shift left] \arrow[d] \\
& \boxed{\text{Familia de evolución}}
\end{tikzcd}$$

Teoría cordal de Loewner (o de Schramm-Loewner)

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{¿Cadena de Loewner?}} & \boxed{\text{EDO de Loewner}} \arrow[d] \\
& \boxed{\text{Familia de evolución}}
\end{tikzcd}$$

Problemas:

- ¿Qué es una familia de evolución?
- ¿Se puede hacer un estudio simultáneo de ambas teorías?
- ¿Hay un concepto de cadena cordal de Loewner?

Un poco de historia: Esquema resumen

Teoría radial (o clásica) de Loewner

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{Cadena de Loewner}} \arrow[rr, shift left] \arrow[dr] & & \boxed{\text{EDO de Loewner}} \arrow[ll, shift left] \arrow[dl] \\ & \boxed{\text{Familia de evolución}} & \end{tikzcd}$$

Teoría cordal de Loewner (o de Schramm-Loewner)

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{¿Cadena de Loewner?}} & & \boxed{\text{EDO de Loewner}} \arrow[dl] \\ & \boxed{\text{Familia de evolución}} & \end{tikzcd}$$

Problemas:

- ¿Qué es una familia de evolución?
- ¿Se puede hacer un estudio simultáneo de ambas teorías?
- ¿Hay un concepto de cadena cordal de Loewner?

Un poco de historia: Esquema resumen

Teoría radial (o clásica) de Loewner

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{Cadena de Loewner}} \arrow[rr, shift left] \arrow[dr] & & \boxed{\text{EDO de Loewner}} \arrow[ll, shift left] \arrow[dl] \\ & \boxed{\text{Familia de evolución}} & \end{tikzcd}$$

Teoría cordal de Loewner (o de Schramm-Loewner)

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{¿Cadena de Loewner?}} & & \boxed{\text{EDO de Loewner}} \arrow[dl] \\ & \boxed{\text{Familia de evolución}} & \end{tikzcd}$$

Problemas:

- ¿Qué es una familia de evolución?
- ¿Se puede hacer un estudio simultáneo de ambas teorías?
- ¿Hay un concepto de cadena cordal de Loewner?

Un poco de historia: Esquema resumen

Teoría radial (o clásica) de Loewner

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Cadena de Loewner}} \arrow[rr, shift left] \arrow[dr] & & \boxed{\text{EDO de Loewner}} \arrow[ll, shift left] \arrow[dl] \\
& \boxed{\text{Familia de evolución}} &
\end{tikzcd}$$

Teoría cordal de Loewner (o de Schramm-Loewner)

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{¿Cadena de Loewner?}} & & \boxed{\text{EDO de Loewner}} \arrow[dl] \\
& \boxed{\text{Familia de evolución}} &
\end{tikzcd}$$

Problemas:

- ¿Qué es una familia de evolución?
- ¿Se puede hacer un estudio simultáneo de ambas teorías?
- ¿Hay un concepto de cadena cordal de Loewner?

Un poco de historia: Esquema resumen

Teoría radial (o clásica) de Loewner

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\text{Cadena de Loewner}} & \begin{array}{c}\longrightarrow\\ \longleftarrow\end{array} & \boxed{\text{EDO de Loewner}} \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \boxed{\text{Familia de evolución}} & \end{array}$$

Teoría cordal de Loewner (o de Schramm-Loewner)

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\text{¿Cadena de Loewner?}} & & \boxed{\text{EDO de Loewner}} \\ & & \swarrow \\ & \boxed{\text{Familia de evolución}} & \end{array}$$

Nuestra propuesta:

- Introducir el concepto de familia de evolución.
- Desde tal concepto, desarrollar toda la teoría.
- Dificultad principal que encontramos: construir la EDO.

Un poco de historia: Esquema resumen

Teoría radial (o clásica) de Loewner

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Cadena de Loewner}} \arrow[rr, shift left] \arrow[dr] & & \boxed{\text{EDO de Loewner}} \arrow[ll, shift left] \arrow[dl] \\
& \boxed{\text{Familia de evolución}} &
\end{tikzcd}
$$

Teoría cordal de Loewner (o de Schramm-Loewner)

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{¿Cadena de Loewner?}} & & \boxed{\text{EDO de Loewner}} \arrow[dl] \\
& \boxed{\text{Familia de evolución}} &
\end{tikzcd}
$$

Nuestra propuesta:

- Introducir el concepto de familia de evolución.
- Desde tal concepto, desarrollar toda la teoría.
- Dificultad principal que encontramos: construir la EDO.

Definición de Familia de Evolución

Definición

Una familia bipar. $(\varphi_{s,t})_{0\leq s\leq t<+\infty}$ de autoaplic. analíticas de $\mathbb{D}$ diremos que es una familia de evolución de orden $d \in [1, \infty]$ si

- **EF1** $\varphi_{s,s} = id_{\mathbb{D}}$,
- **EF2** $\varphi_{s,t} = \varphi_{u,t} \circ \varphi_{s,u}$ para todo $0 \leq s \leq u \leq t < +\infty$,
- **EF3** para todo $z \in \mathbb{D}$ y para todo $T > 0$, existe una función no negativa $k_{z,T} \in L^d([0, T], \mathbb{R})$ tal que

$$|\varphi_{s,u}(z) - \varphi_{s,t}(z)| \leq \int_u^t k_{z,T}(\xi)d\xi$$

para todo $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$.

Teorema (Bracci, C., Díaz-Madrigal)

Cada $\varphi_{s,t}$ es univalente.

Definición de Familia de Evolución

Definición

Una familia bipar. $(\varphi_{s,t})_{0\leq s\leq t<+\infty}$ de autoaplic. analíticas de $\mathbb{D}$ diremos que es una familia de evolución de orden $d \in [1,\infty]$ si

- EF1 $\varphi_{s,s} = id_{\mathbb{D}}$,
- EF2 $\varphi_{s,t} = \varphi_{u,t} \circ \varphi_{s,u}$ para todo $0 \leq s \leq u \leq t < +\infty$,
- EF3 para todo $z \in \mathbb{D}$ y para todo $T > 0$, existe una función no negativa $k_{z,T} \in L^d([0,T],\mathbb{R})$ tal que

$$|\varphi_{s,u}(z) - \varphi_{s,t}(z)| \leq \int_u^t k_{z,T}(\xi)d\xi$$

para todo $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$.

Teorema (Bracci, C., Díaz-Madrigal)

Cada $\varphi_{s,t}$ es univalente.

Algunos ejemplos de familias de evolución

Observación

Todas las nociones de "familia de evolución" encontradas en la literatura quedan incluidas en nuestro concepto e imponen (directa o indirectamente) que el orden sea $d = \infty$.

Ejemplo (Transformaciones de Möbius, I)

Sea $\lambda : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^+$ una función creciente y absolutamente continua cuya derivada esté en $L^d_{loc}([0, +\infty), \mathbb{R})$. Entonces,

$$\varphi_{s,t}(z) := e^{\lambda(s)-\lambda(t)} z$$

es una familia de evolución de orden d.

Algunos ejemplos de familias de evolución

Observación

Nuestro concepto de familia de evolución no impone que las funciones involucradas compartan un punto fijo en $\overline{\mathbb{D}}$.

Ejemplo (Transformaciones de Möbius, II)

$$\varphi_{s,t}(z) := e^{s-t}z + e^{-t}(e^{it} - e^{is})$$

es una familia de evolución de orden ∞ sin un punto fijo común en $\overline{\mathbb{D}}$.

Algunos ejemplos de familias de evolución

Definición

Un semigrupo de funciones analíticas es una familia $(\phi_t)_{t\geq 0}$ de autoaplicaciones analíticas de $\mathbb{D}$ tal que

- S1 ϕ_0 es la identidad en $\mathbb{D}$,
- S2 $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$, para todo $t, s \geq 0$,
- S3 $\lim_{t\to 0} \phi_t(z) = z$, para todo $z \in \mathbb{D}$.

Ejemplo (Semigrupos de funciones analíticas)

Sea (ϕ_t) un semigrupo de funciones analíticas de $\mathbb{D}$. Entonces,

$$\varphi_{s,t} := \phi_{t-s}, \qquad \text{para } t \geq s$$

es una familia de evolución de orden ∞.

Algunos ejemplos de familias de evolución

Definición

Un semigrupo de funciones analíticas es una familia $(\phi_t)_{t\geq 0}$ de autoaplicaciones analíticas de $\mathbb{D}$ tal que

- S1 ϕ_0 es la identidad en $\mathbb{D}$,
- S2 $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$, para todo $t, s \geq 0$,
- S3 $\lim_{t\to 0} \phi_t(z) = z$, para todo $z \in \mathbb{D}$.

Ejemplo (Semigrupos de funciones analíticas)

Sea (ϕ_t) un semigrupo de funciones analíticas de $\mathbb{D}$. Entonces,

$$\varphi_{s,t} := \phi_{t-s}, \qquad \text{para } t \geq s$$

es una familia de evolución de orden ∞.

Funciones de Herglotz

Definición

Una función de Herglotz (generalizada) de orden $d \in [1, +\infty]$ es una función $p : \mathbb{D} \times [0, +\infty) \mapsto \mathbb{C}$ con las siguientes propiedades:

HF1 Para cada $z \in \mathbb{D}$, la función $t \in [0, +\infty) \mapsto p(z, t) \in \mathbb{C}$ pertenece a $L^d_{loc}([0, +\infty), \mathbb{C})$;

HF2 Para todo $t \in [0, +\infty)$, la función $z \in \mathbb{D} \mapsto p(z, t) \in \mathbb{C}$ es holomorfa;

HF3 Para todo $z \in \mathbb{D}$ y para todo $t \in [0, +\infty)$, se tiene que $\operatorname{Re} p(z, t) \geq 0$.

Herglotz y Fam. de Evolución: Una relación uno a uno

Teorema (Bracci, C., Díaz-Madrigal)

1. Sea $(\varphi_{s,t})$ una familia de evolución de orden $d \geq 1$. Entonces existen
   - una única función de Herglotz p de orden d y
   - una única función medible $\tau : [0, +\infty) \to \overline{\mathbb{D}}$

   tales que para todo $z \in \mathbb{D}$ y $s \geq 0$ la aplicación $t \mapsto \varphi_{s,t}(z)$ es la solución (Carathéodory) del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \overset{\bullet}{w} = (w - \tau(t))(\overline{\tau(t)}w - 1)p(w,t) \\ w(s) = z. \end{cases} \tag{3.1}$$

2. Dada una función de Herglotz p de orden d y una función medible $\tau : [0, +\infty) \to \overline{\mathbb{D}}$, existe una única familia de evolución $(\varphi_{s,t})$ de orden d tal que (3.1) se *satisface*.

Herglotz y Fam. de Evolución: Una relación uno a uno

Teorema (Bracci, C., Díaz-Madrigal)

1. Sea $(\varphi_{s,t})$ una familia de evolución de orden $d \geq 1$. Entonces existen
   - una única función de Herglotz p de orden d y
   - una única función medible $\tau : [0, +\infty) \to \overline{\mathbb{D}}$

   tales que para todo $z \in \mathbb{D}$ y $s \geq 0$ la aplicación $t \mapsto \varphi_{s,t}(z)$ es la solución (Carathéodory) del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{w} = (w - \tau(t))(\overline{\tau(t)}w - 1)p(w, t) \\ w(s) = z. \end{cases} \tag{3.1}$$

2. Dada una función de Herglotz p de orden d y una función medible $\tau : [0, +\infty) \to \overline{\mathbb{D}}$, existe una única familia de evolución $(\varphi_{s,t})$ de orden d tal que (3.1) se *satisface.*

Herglotz y Fam. de Evolución: Una relación uno a uno

Teorema (Bracci, C., Díaz-Madrigal)

Hay una correspondencia uno a uno entre familias de evolución $(\varphi_{s,t})$ de orden d y parejas (τ, p):

$$\begin{cases} \dot{w} = (w - \tau(t))(\overline{\tau(t)}w - 1)p(w,t) \\ w(s) = z. \end{cases}$$

- Eligiendo adecuadamente la función τ (constantemente cero o uno), se recuperan las dos ecuaciones radial y cordal de Loewner. Volveremos a esto al final.

Algunos ejemplos

Ejemplo (Transformaciones de Möbius)

Dada la familia de evolución

$$\varphi_{s,t}(z) := e^{\lambda(s)-\lambda(t)}z$$

su pareja (τ, p) asociada es

$$\tau(t) = 0, \quad p(z,t) = \lambda'(t).$$

Algunos ejemplos

Ejemplo (Transformaciones de Möbius)

Dada la familia de evolución

$$\varphi_{s,t}(z) := e^{s-t}z + e^{-t}(e^{it} - e^{is})$$

su pareja (τ, p) asociada es

$$\tau(t) = ie^{(i-1)t}, \quad p(z,t) = \frac{1}{1 - z\overline{\tau(t)}}.$$

Algunos ejemplos

Ejemplo (Semigrupos de funciones analíticas)

Sea (ϕ_t) un semigrupo de funciones analíticas.
Por el teorema de Berkson-Porta, existe una función analítica $p : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} p \geq 0$ y un punto $\tau \in \overline{\mathbb{D}}$ tal que

$$G(z) = (z - \tau)(\overline{\tau} z - 1)p(z)$$

es el generador infinitesimal del semigrupo ($G(z) = \left.\frac{\partial \phi_t(z)}{\partial t}\right|_{t=0}$).
Si consideramos la familia de evolución

$$\varphi_{s,t} := \phi_{t-s}$$

entonces su pareja (τ, p) es independiente de t.

Algunos ejemplos

Ejemplo (Semigrupos de funciones analíticas)

Sea (ϕ_t) un semigrupo de funciones analíticas.
Por el teorema de Berkson-Porta, existe una función analítica $p : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} p \geq 0$ y un punto $\tau \in \overline{\mathbb{D}}$ tal que

$$G(z) = (z - \tau)(\overline{\tau} z - 1)p(z)$$

es el generador infinitesimal del semigrupo ($G(z) = \frac{\partial \phi_t(z)}{\partial t}\Big|_{t=0}$).
Si consideramos la familia de evolución

$$\varphi_{s,t} := \phi_{t-s}$$

entonces su pareja (τ, p) es independiente de t.

Algunos ejemplos

Ejemplo (Schramm)

Tomemos dos funciones medibles $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ y $\tau : [0, +\infty) \to \overline{\mathbb{D}}$ y definamos

$$p(z, t) = \frac{2}{T(z) + ih(t)},$$

donde $T(z) = \frac{1+z}{1-z}$.
Entonces, la familia de evolución asociada a (τ, p) es de orden ∞.

- Schramm: $\tau(t) = 1$ y h es continua.
- Sobre este ejemplo se ha trabajado mucho en la última década: Marshall, Rohde, Prokhorov, Vasiliev,... han abordado el problema de caracterizar cuándo los rangos de la familia de evolución son de tipo *Slit*.

Algunos ejemplos

Ejemplo (Schramm)

Tomemos dos funciones medibles $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ y $\tau : [0, +\infty) \to \overline{\mathbb{D}}$ y definamos

$$p(z,t) = \frac{2}{T(z) + ih(t)},$$

donde $T(z) = \frac{1+z}{1-z}$.
Entonces, la familia de evolución asociada a (τ, p) es de orden ∞.

- Schramm: $\tau(t) = 1$ y h es continua.
- Sobre este ejemplo se ha trabajado mucho en la última década: Marshall, Rohde, Prokhorov, Vasiliev,... han abordado el problema de caracterizar cuándo los rangos de la familia de evolución son de tipo *Slit*.

Desde la FE hacia la EDO

Notación: $G(w,t) = (w - \tau(t))(\overline{\tau(t)}w - 1)p(w,t)$.
¿Cómo construir G tal que $t \mapsto \varphi_{s,t}(z)$ sea solución de

$$\dot{w} = G(w,t)?$$

Supongamos por un momento que, fijados $s \geq 0$ y $z \in \mathbb{D}$,

$$t \mapsto \varphi_{s,t}(z)$$

es derivable. Entonces debe verificarse que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_{s,t}(z)) = G(\varphi_{s,t}(z), t) \qquad \text{para todo } t \geq s.$$

Tomando $t = s$, tendríamos $G(z,s) = \frac{\partial}{\partial t}(\varphi_{s,t}(z))\Big|_{t=s}$.

Desde la FE hacia la EDO

Definamos $g_{s,n} := n(\varphi_{s,s+1/n} - id) \in Hol(\mathbb{D}, \mathbb{C})$.
¿Cómo "tomar límite" en n en la sucesión $(g_{n,s})_n$?

Teorema (Aumann (1967), ver el texto de Castaing y Valadier)

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio medible completo con μ σ-finita, $[X, d]$ un espacio métrico completo separable y $\Gamma : \Omega \to 2^X$ tal que

(i) Para cada $\omega \in \Omega$, $\Gamma(\omega)$ es no vacío y cerrado.

(ii) Para cada $x \in X$ y $r > 0$, $\{\omega \in \Omega : \Gamma(\omega) \cap B(x, r) \neq \emptyset\} \in \Sigma$.

Entonces Γ admite un selector medible $\sigma : \Omega \to X$.

En nuestro caso $X = Hol(\mathbb{D}, \mathbb{C})$, $\Omega = [0, +\infty)$, μ=Leb. ¿Y Γ?

$ac(g_{s,n}) :=$ conj. de puntos de acumul. de $(g_{s,n})_n$ en $Hol(\mathbb{D}, \mathbb{C})$.

¿$\Gamma(s) = ac(g_{s,n})$? Una sel. suya debe jugar el papel de límite.
Pero este conjunto puede estar lejos de cumplir las hipótesis del teorema de selección (por ejemplo, por ser vacío).

Desde la FE hacia la EDO

Definamos $g_{s,n} := n(\varphi_{s,s+1/n} - id) \in Hol(\mathbb{D}, \mathbb{C})$.
¿Cómo "tomar límite" en n en la sucesión $(g_{n,s})_n$?

Teorema (Aumann (1967), ver el texto de Castaing y Valadier)

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio medible completo con μ σ-finita, $[X, d]$ un espacio métrico completo separable y $\Gamma : \Omega \to 2^X$ tal que

(i) Para cada $\omega \in \Omega$, $\Gamma(\omega)$ es no vacío y cerrado.

(ii) Para cada $x \in X$ y $r > 0$, $\{\omega \in \Omega : \ \Gamma(\omega) \cap B(x, r) \neq \emptyset\} \in \Sigma$.

Entonces Γ admite un selector medible $\sigma : \Omega \to X$.

En nuestro caso $X = Hol(\mathbb{D}, \mathbb{C})$, $\Omega = [0, +\infty)$, μ=Leb. ¿Y Γ?

$ac(g_{s,n}) :=$ conj. de puntos de acumul. de $(g_{s,n})_n$ en $Hol(\mathbb{D}, \mathbb{C})$.

¿$\Gamma(s) = ac(g_{s,n})$? Una sel. suya debe jugar el papel de límite.
Pero este conjunto puede estar lejos de cumplir las hipótesis del teorema de selección (por ejemplo, por ser vacío).

Desde la FE hacia la EDO

Definamos $g_{s,n} := n(\varphi_{s,s+1/n} - id) \in Hol(\mathbb{D}, \mathbb{C})$.
¿Cómo "tomar límite" en n en la sucesión $(g_{n,s})_n$?

Teorema (Aumann (1967), ver el texto de Castaing y Valadier)

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio medible completo con μ σ-finita, $[X, d]$ un espacio métrico completo separable y $\Gamma : \Omega \to 2^X$ tal que

(i) Para cada $\omega \in \Omega$, $\Gamma(\omega)$ es no vacío y cerrado.

(ii) Para cada $x \in X$ y $r > 0$, $\{\omega \in \Omega : \ \Gamma(\omega) \cap B(x, r) \neq \emptyset\} \in \Sigma$.

Entonces Γ admite un selector medible $\sigma : \Omega \to X$.

En nuestro caso $X = Hol(\mathbb{D}, \mathbb{C})$, $\Omega = [0, +\infty)$, μ=Leb. ¿Y Γ?

$ac(g_{s,n}) :=$ conj. de puntos de acumul. de $(g_{s,n})_n$ en $Hol(\mathbb{D}, \mathbb{C})$.

¿$\Gamma(s) = ac(g_{s,n})$? Una sel. suya debe jugar el papel de límite.
Pero este conjunto puede estar lejos de cumplir las hipótesis del teorema de selección (por ejemplo, por ser vacío).

Desde la FE hacia la EDO

Definamos $g_{s,n} := n(\varphi_{s,s+1/n} - id) \in Hol(\mathbb{D}, \mathbb{C})$.
¿Cómo "tomar límite" en n en la sucesión $(g_{n,s})_n$?

Teorema (Aumann (1967), ver el texto de Castaing y Valadier)

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio medible completo con μ σ-finita, $[X, d]$ un espacio métrico completo separable y $\Gamma : \Omega \to 2^X$ tal que

(i) Para cada $\omega \in \Omega$, $\Gamma(\omega)$ es no vacío y cerrado.

(ii) Para cada $x \in X$ y $r > 0$, $\{\omega \in \Omega : \ \Gamma(\omega) \cap B(x, r) \neq \emptyset\} \in \Sigma$.

Entonces Γ admite un selector medible $\sigma : \Omega \to X$.

En nuestro caso $X = Hol(\mathbb{D}, \mathbb{C})$, $\Omega = [0, +\infty)$, μ=Leb. ¿Y Γ?

$ac(g_{s,n}) :=$ conj. de puntos de acumul. de $(g_{s,n})_n$ en $Hol(\mathbb{D}, \mathbb{C})$.

¿$\Gamma(s) = ac(g_{s,n})$? Una sel. suya debe jugar el papel de límite.
Pero este conjunto puede estar lejos de cumplir las hipótesis del teorema de selección (por ejemplo, por ser vacío).

Desde la FE hacia la EDO

Definamos $g_{s,n} := n(\varphi_{s,s+1/n} - id) \in Hol(\mathbb{D}, \mathbb{C})$.
¿Cómo "tomar límite" en n en la sucesión $(g_{n,s})_n$?

Teorema (Aumann (1967), ver el texto de Castaing y Valadier)

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio medible completo con μ σ-finita, $[X, d]$ un espacio métrico completo separable y $\Gamma : \Omega \to 2^X$ tal que

(i) Para cada $\omega \in \Omega$, $\Gamma(\omega)$ es no vacío y cerrado.

(ii) Para cada $x \in X$ y $r > 0$, $\{\omega \in \Omega : \ \Gamma(\omega) \cap B(x, r) \neq \emptyset\} \in \Sigma$.

Entonces Γ admite un selector medible $\sigma : \Omega \to X$.

En nuestro caso $X = Hol(\mathbb{D}, \mathbb{C})$, $\Omega = [0, +\infty)$, μ=Leb. ¿Y Γ?

$ac(g_{s,n}) :=$ conj. de puntos de acumul. de $(g_{s,n})_n$ en $Hol(\mathbb{D}, \mathbb{C})$.

¿$\Gamma(s) = ac(g_{s,n})$? Una sel. suya debe jugar el papel de límite.

Pero este conjunto puede estar lejos de cumplir las hipótesis del teorema de selección (por ejemplo, por ser vacío).

Desde la FE hacia la EDO

Definamos $g_{s,n} := n(\varphi_{s,s+1/n} - id) \in Hol(\mathbb{D}, \mathbb{C})$.
¿Cómo "tomar límite" en n en la sucesión $(g_{n,s})_n$?

Teorema (Aumann (1967), ver el texto de Castaing y Valadier)

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio medible completo con μ σ-finita, $[X, d]$ un espacio métrico completo separable y $\Gamma : \Omega \to 2^X$ tal que

(i) Para cada $\omega \in \Omega$, $\Gamma(\omega)$ es no vacío y cerrado.

(ii) Para cada $x \in X$ y $r > 0$, $\{\omega \in \Omega : \ \Gamma(\omega) \cap B(x,r) \neq \emptyset\} \in \Sigma$.

Entonces Γ admite un selector medible $\sigma : \Omega \to X$.

En nuestro caso $X = Hol(\mathbb{D}, \mathbb{C})$, $\Omega = [0, +\infty)$, μ=Leb. ¿Y Γ?

$ac(g_{s,n}) :=$ conj. de puntos de acumul. de $(g_{s,n})_n$ en $Hol(\mathbb{D}, \mathbb{C})$.

¿$\Gamma(s) = ac(g_{s,n})$? Una sel. suya debe jugar el papel de límite.
Pero este conjunto puede estar lejos de cumplir las hipótesis del teorema de selección (por ejemplo, por ser vacío).

Desde la FE hacia la EDO: ¿Γ?

Fijemos $m \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{D}$. Existe $k := k_{z,m} \in L^d([0, m+1], \mathbb{R})$ tq

$$|\varphi_{s,u}(z) - \varphi_{s,t}(z)| \leq \int_u^t k(\xi) d\xi$$

para todo $0 \leq s \leq u \leq t \leq m+1$.

De esta forma (tomando k como cero fuera de $[0, m+1]$)

$$|g_{s,n}(z)| = |n(\varphi_{s,s+1/n}(z) - z)| \leq n \int_s^{s+1/n} k(\xi) d\xi \leq \mathrm{Max}_k(s),$$

donde $\mathrm{Max}_k(s) := \sup\{\frac{1}{|I|} \int_I k(\xi) d\xi : \ s \in I = \text{intervalo de } \mathbb{R}\}$.

Por el teorema maximal de Hardy-Littlewood, existe un conjunto de medida cero $N(m, z)$ tal que $\mathrm{Max}_k(s) < +\infty$ para todo $s \in [0, m] \setminus N(m, z)$.

Desde la FE hacia la EDO: ¿Γ?

Fijemos $m \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{D}$. Existe $k := k_{z,m} \in L^d([0, m+1], \mathbb{R})$ tq

$$|\varphi_{s,u}(z) - \varphi_{s,t}(z)| \leq \int_u^t k(\xi)d\xi$$

para todo $0 \leq s \leq u \leq t \leq m+1$.

De esta forma (tomando k como cero fuera de $[0, m+1]$)

$$|g_{s,n}(z)| = |n(\varphi_{s,s+1/n}(z) - z)| \leq n \int_s^{s+1/n} k(\xi)d\xi \leq \mathrm{Max}_k(s),$$

donde $\mathrm{Max}_k(s) := \sup\{\frac{1}{|I|}\int_I k(\xi)d\xi : \ s \in I = \text{intervalo de } \mathbb{R}\}$.

Por el teorema maximal de Hardy-Littlewood, existe un conjunto de medida cero $N(m, z)$ tal que $\mathrm{Max}_k(s) < +\infty$ para todo $s \in [0, m] \setminus N(m, z)$.

Desde la FE hacia la EDO: ¿Γ?

Fijemos $m \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{D}$. Existe $k := k_{z,m} \in L^d([0, m+1], \mathbb{R})$ tq

$$|\varphi_{s,u}(z) - \varphi_{s,t}(z)| \leq \int_u^t k(\xi) d\xi$$

para todo $0 \leq s \leq u \leq t \leq m+1$.
De esta forma (tomando k como cero fuera de $[0, m+1]$)

$$|g_{s,n}(z)| = |n(\varphi_{s,s+1/n}(z) - z)| \leq n \int_s^{s+1/n} k(\xi) d\xi \leq \mathrm{Max}_k(s),$$

donde $\mathrm{Max}_k(s) := \sup\{\frac{1}{|I|}\int_I k(\xi) d\xi : \ s \in I = \text{intervalo de } \mathbb{R}\}$.
Por el teorema maximal de Hardy-Littlewood, existe un conjunto de medida cero $N(m, z)$ tal que $\mathrm{Max}_k(s) < +\infty$ para todo $s \in [0, m] \setminus N(m, z)$.

Desde la FE hacia la EDO: ¿Γ?

Fijemos $m \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{D}$. Existe $k := k_{z,m} \in L^d([0, m+1], \mathbb{R})$ tq

$$|\varphi_{s,u}(z) - \varphi_{s,t}(z)| \leq \int_u^t k(\xi) d\xi$$

para todo $0 \leq s \leq u \leq t \leq m+1$.
De esta forma (tomando k como cero fuera de $[0, m+1]$)

$$|g_{s,n}(z)| = |n(\varphi_{s,s+1/n}(z) - z)| \leq n \int_s^{s+1/n} k(\xi) d\xi \leq \mathrm{Max}_k(s),$$

donde $\mathrm{Max}_k(s) := \sup\{\frac{1}{|I|} \int_I k(\xi) d\xi : \ s \in I = \text{intervalo de } \mathbb{R}\}$.
Por el teorema maximal de Hardy-Littlewood, existe un conjunto de medida cero $N(m, z)$ tal que $\mathrm{Max}_k(s) < +\infty$ para todo $s \in [0, m] \setminus N(m, z)$.

Desde la FE hacia la EDO: ¿Γ?

Así, fijado z esto permite controlar $|g_{s,n}(z)|$ salvo para s en el conjunto de medida cero $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} N(m,z)$.

Llamamos

$$M := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} (N(m,0) \cup N(m,1/2)).$$

Tomamos $\Gamma : \Omega \to 2^{Hol(\mathbb{D},\mathbb{C})}$ dado por

$$\Gamma(s) := \begin{cases} ac(g_{s,n}), & s \notin M \\ \{id\}, & s \in M. \end{cases}$$

Γ verifica las hipótesis del teorema y su selector medible σ es tal que se puede llegar a probar que para cada $z \in \mathbb{D}$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_{s,t}(z)) = \sigma(t)(\varphi_{s,t}(z)) \text{ para casi todo } t \geq s.$$

Desde la FE hacia la EDO: ¿Γ?

Así, fijado z esto permite controlar $|g_{s,n}(z)|$ salvo para s en el conjunto de medida cero $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} N(m,z)$.

Llamamos

$$M := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} (N(m,0) \cup N(m,1/2)).$$

Tomamos $\Gamma : \Omega \to 2^{Hol(\mathbb{D},\mathbb{C})}$ dado por

$$\Gamma(s) := \begin{cases} ac(g_{s,n}), & s \notin M \\ \{id\}, & s \in M. \end{cases}$$

Γ verifica las hipótesis del teorema y su selector medible σ es tal que se puede llegar a probar que para cada $z \in \mathbb{D}$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_{s,t}(z)) = \sigma(t)(\varphi_{s,t}(z)) \text{ para casi todo } t \geq s.$$

Desde la FE hacia la EDO: ¿Γ?

Así, fijado z esto permite controlar $|g_{s,n}(z)|$ salvo para s en el conjunto de medida cero $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} N(m,z)$.

Llamamos

$$M := \bigcup_{m\in\mathbb{N}}(N(m,0)\cup N(m,1/2)).$$

Tomamos $\Gamma:\Omega\to 2^{Hol(\mathbb{D},\mathbb{C})}$ dado por

$$\Gamma(s) := \begin{cases} ac(g_{s,n}), & s\notin M \\ \{id\}, & s\in M. \end{cases}$$

Γ verifica las hipótesis del teorema y su selector medible σ es tal que se puede llegar a probar que para cada $z\in\mathbb{D}$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_{s,t}(z)) = \sigma(t)(\varphi_{s,t}(z)) \text{ para casi todo } t\geq s.$$

Desde la FE hacia la EDO

A continuación hay que obtener que σ tiene una factorización (p, τ) adecuada.

Es decir, $\sigma(t)(z) = (z - \tau(t))(\overline{\tau(t)}z - 1)p(z, t)$

y, para todo $z \in \mathbb{D}$ y $s \geq 0$, la aplicación $t \mapsto \varphi_{s,t}(z)$ es la solución (Carathéodory) del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \overset{\bullet}{w} = (w - \tau(t))(\overline{\tau(t)}w - 1)p(w, t) \\ w(s) = z. \end{cases}$$

Definición de Cadenas de Loewner

Definición

Una familia $(f_t)_{0\leq t<+\infty}$ de aplicaciones holomorfas en $\mathbb{D}$ es una cadena de Loewner de orden $d \in [1,+\infty]$ si

- LC1. cada función $f_t : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ es univalente,
- LC2. $f_s(\mathbb{D}) \subset f_t(\mathbb{D})$ para todo $0 \leq s < t < +\infty$,
- LC3. para cada compacto $K \subset \mathbb{D}$ y todo $T > 0$ existe una función no negativa $k_{K,T} \in L^d([0,T],\mathbb{R})$ tal que

$$|f_s(z) - f_t(z)| \leq \int_s^t k_{K,T}(\xi)d\xi$$

para todo $z \in K$ y todo $0 \leq s \leq t \leq T$.

Diremos que (f_t) está normalizada si $f_0(0) = 0$ y $f_0'(0) = 1$.

Cadenas de Loewner y Familias de Evolución

Teorema (C., Díaz-Madrigal, Gumenyuk)

Sea (f_t) una cadena de Loewner de orden $d \in [1, +\infty]$ y consideremos

$$\varphi_{s,t} := f_t^{-1} \circ f_s, \quad 0 \leq s \leq t.$$

Entonces $(\varphi_{s,t})$ es una familia de evolución del mismo orden d. Recíprocamente, para cualquier familia de evolución $(\varphi_{s,t})$ de orden $d \in [1, +\infty]$, existe una cadena de Loewner (f_t) de orden d tal que

$$f_t \circ \varphi_{s,t} = f_s, \quad 0 \leq s \leq t. \tag{4.1}$$

Definición

(f_t) se dice asociada a $(\varphi_{s,t})$ si se satisface (4.1).

Cadenas de Loewner y Familias de Evolución

Teorema (C., Díaz-Madrigal, Gumenyuk)

Sea (f_t) una cadena de Loewner de orden $d \in [1, +\infty]$ y consideremos

$$\varphi_{s,t} := f_t^{-1} \circ f_s, \quad 0 \leq s \leq t.$$

Entonces $(\varphi_{s,t})$ es una familia de evolución del mismo orden d. Recíprocamente, para cualquier familia de evolución $(\varphi_{s,t})$ de orden $d \in [1, +\infty]$, existe una cadena de Loewner (f_t) de orden d tal que

$$f_t \circ \varphi_{s,t} = f_s, \quad 0 \leq s \leq t. \tag{4.1}$$

Definición

(f_t) se dice asociada a $(\varphi_{s,t})$ si se satisface (4.1).

Cadenas de Loewner y Familias de Evolución

Teorema (C., Díaz-Madrigal, Gumenyuk)

Sea (f_t) una cadena de Loewner de orden $d \in [1, +\infty]$ y consideremos

$$\varphi_{s,t} := f_t^{-1} \circ f_s, \quad 0 \leq s \leq t.$$

Entonces $(\varphi_{s,t})$ es una familia de evolución del mismo orden d. Recíprocamente, para cualquier familia de evolución $(\varphi_{s,t})$ de orden $d \in [1, +\infty]$, existe una cadena de Loewner (f_t) de orden d tal que

$$f_t \circ \varphi_{s,t} = f_s, \quad 0 \leq s \leq t. \tag{4.1}$$

Definición

(f_t) se dice asociada a $(\varphi_{s,t})$ si se satisface (4.1).

Cadenas y Familias de Evolución: ¿Rel. uno a uno?

Dada una familia de evolución, podemos tener muchas cadenas de Loewner asociadas. Dada una cualquiera de ellas, tenemos resultados que nos dicen cómo construir las demás y el siguiente resultado de unicidad:

Teorema (C., Díaz-Madrigal, Gumenyuk)

Sea $(\varphi_{s,t})$ una familia de evolución. Sea (f_t) la cadena de Loewner asociada $(\varphi_{s,t})$ construida en el anterior teorema. Equivalen:

1. (f_t) es la una única cadena de Loewner normalizada asociada a $(\varphi_{s,t})$.
2. $\bigcup\limits_{t\geq 0} f_t(\mathbb{D}) = \mathbb{C}$.
3. ...

Regreso a los casos clásicos

Desde el punto de vista de las EDO,

$$\begin{cases} \dot{w} = (w - \tau(t))(\overline{\tau(t)}w - 1)p(w,t) & \text{para casi todo } t \in [s, \infty) \\ w(s) = z. \end{cases}$$

la nueva ecuación tiene como casos particulares

EDO radial de Loewner: $\tau(t) = 0$

$$\dot{w} = -wp(w,t)$$

EDO cordal de Loewner: $\tau(t) = 1$

$$\dot{w} = (1 - w)^2 p(w,t)$$

¿Cómo se traduce en términos de la familia de evolución o en términos de la Cadena de Loewner que τ sea constante?

Punto fijo común

Teorema (Bracci, C., Díaz-Madrigal)

Sea $(\varphi_{s,t})$ una familia de evolución de orden d con

$$\tau = \text{constante} \in \overline{\mathbb{D}}.$$

- τ es el punto de Denjoy-Wolff de cada función no trivial $\varphi_{s,t}$.
- Existe una única función localmente absolutamente continua $\lambda : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ con
  1. $\lambda' \in L^d_{loc}([0, +\infty), \mathbb{C})$
  2. $\lambda(0) = 0$ y $\operatorname{Re} \lambda(t) \geq \operatorname{Re} \lambda(s) \geq 0$ para todo $0 \leq s \leq t < +\infty$
  3. para $s \leq t$

$$\varphi'_{s,t}(\tau) = e^{\lambda(s)-\lambda(t)}.$$

(la derivada en sentido angular si $\tau \in \partial\mathbb{D}$).

Punto fijo común interior

A partir del resultado anterior, se puede particularizar a $\tau \in \mathbb{D}$ y $\tau \in \partial\mathbb{D}$, obteniéndose la teoría radial y cordal. Por ejemplo

Punto fijo común interior

Teorema (Bracci, C., Díaz-Madrigal)

Sea $(\varphi_{s,t})$ una familia de autoaplicaciones analíticas con punto fijo común $\tau \in \mathbb{D}$.
Supongamos además que $(\varphi_{s,t})$ satisface

EF1 $\varphi_{s,s} = id_{\mathbb{D}}$,

EF2 $\varphi_{s,t} = \varphi_{u,t} \circ \varphi_{s,u}$ para todo $0 \leq s \leq u \leq t < +\infty$,

y tal que $\varphi'_{0,t}(\tau) \neq 0$ para todo $t \geq 0$. Entonces, equivalen:

1. $(\varphi_{s,t})$ es una familia de evolución de orden d (EF3).
2. La aplicación $t \in [0, +\infty) \mapsto \mu(t) := \varphi'_{0,t}(\tau)$ es absolutamente continua y $\mu' \in L^d_{loc}([0, +\infty), \mathbb{R})$.

En el caso de Loewner radial, $\mu(t) = \varphi'_{0,t}(0) = e^{-t}$ y así la afirmación 2 se verifica trivialmente. Además, $\bigcup_{t \geq 0} f_t(\mathbb{D}) = \mathbb{C}$.

Punto fijo común interior

Teorema (Bracci, C., Díaz-Madrigal)

Sea $(\varphi_{s,t})$ una familia de autoaplicaciones analíticas con punto fijo común $\tau \in \mathbb{D}$.
Supongamos además que $(\varphi_{s,t})$ satisface

EF1 $\varphi_{s,s} = id_{\mathbb{D}}$,

EF2 $\varphi_{s,t} = \varphi_{u,t} \circ \varphi_{s,u}$ para todo $0 \leq s \leq u \leq t < +\infty$,

y tal que $\varphi'_{0,t}(\tau) \neq 0$ para todo $t \geq 0$. Entonces, equivalen:

1. $(\varphi_{s,t})$ es una familia de evolución de orden d (EF3).
2. La aplicación $t \in [0, +\infty) \mapsto \mu(t) := \varphi'_{0,t}(\tau)$ es absolutamente continua y $\mu' \in L^d_{loc}([0, +\infty), \mathbb{R})$.

En el caso de Loewner radial, $\mu(t) = \varphi'_{0,t}(0) = e^{-t}$ y así la afirmación 2 se verifica trivialmente. Además, $\bigcup_{t \geq 0} f_t(\mathbb{D}) = \mathbb{C}$.

Punto fijo común en la frontera

Teorema (Bracci, C., Díaz-Madrigal)

Sea $(\varphi_{s,t})$ una familia de autoaplicaciones analíticas con punto fijo común $\tau \in \partial\mathbb{D}$. Supongamos además que $(\varphi_{s,t})$ satisface

EF1 $\varphi_{s,s} = id_{\mathbb{D}}$,

EF2 $\varphi_{s,t} = \varphi_{u,t} \circ \varphi_{s,u}$ para todo $0 \leq s \leq u \leq t < +\infty$.

Entonces, equivalen:

1. $(\varphi_{s,t})$ es una familia de evolución de orden d (EF3).
2. (i) La aplicación $t \in [0, +\infty) \mapsto \mu(t) := \varphi'_{0,t}(\tau)$ es absolutamente continua y $\mu' \in L^d_{loc}([0, +\infty), \mathbb{R})$.
   (ii) Existe un punto $z_0 \in \mathbb{D}$ tal que para todo $T > 0$ existe $k_{z_0,T} \in L^d([0, T], \mathbb{R})$ con $(0 \leq s \leq u \leq t \leq T)$

$$|\varphi_{s,u}(z_0) - \varphi_{s,t}(z_0)| \leq \int_u^t k_{z_0,T}(\xi)d\xi.$$