Bases incondicionales y normas duales estrictamente convexas

S. Troyanski

Trabajo conjunto con R. Smith

Salobreña, abril de 2009

Se dice que una norma $\|\cdot\|$ en un espacio de Banach X es *estrictamente convexa*, o rotunda, si la condición $\|x\| = \|y\| = \frac{1}{2}\|x + y\|$ implica que $x = y$. Geométricamente, esta propiedad equivale a decir que la

esfera unidad del espacio no contiene segmentos rectilíneos no triviales.

La norma de muchos espacios clásicos no es estrictamente convexa; sin embargo, a menudo es posible introducir una nueva norma equivalente con dicha propiedad. Nuestro objetivo es encontrar condiciones bajo las cuales un espacio de Banach dado admita normas equivalentes con esta propiedad. Más precisamente, buscamos condiciones sobre un espacio con base incondicional (en general no numerable) que garanticen la existencia de una norma equivalente con norma dual estrictamente convexa.

En el contexto de los espacios con base incondicional, otras propiedades de convexidad han sido caracterizadas. Se dice que una norma $\|\cdot\|$ sobre el espacio de Banach X es ***localmente uniformemente convexa* (LUR) si para cualquier $x \in X$ y cualquier sucesión $(x_n)_n \subset X$ tales que $\|x_n\| = \|x\| = 1$ y $\|x + x_n\| \to 2$ se tiene $\|x_n - x\| \to 0$.** Claramente, la convexidad localmente uniforme implica convexidad estricta.

En un artículo publicado hace 40 años proporcionamos un método para la construcción de norma equivalente LUR en los espacios de Banach con base incondicional. Si $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ es una base en el espacio de Banach X, con sistema biortogonal asociado $\{f_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, entonces la fórmula

$$|||x|||^2 = \|Tx\|^2_{\mathrm{Day}} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\|x\|_n\right)^2,$$

donde $T : X \longrightarrow c_0(\Gamma)$ es el operador lineal y acotado dado por la expresión

$$Tx = \{f_\gamma(x)\}_{\gamma\in\Gamma},$$

y

$$\|x\|_n = \sup\left\{\left\|\sum_{\gamma\in\Gamma\setminus A} f_\gamma(x)e_\gamma\right\| + 2\sum_{\gamma\in A}|f_\gamma(x)| : A\subseteq\Gamma, \mathrm{card}(A)\leq n\right\}$$

es una norma equivalente en X.

Si la base incondicional $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ es además monótona entonces la norma $|||\cdot|||$ es LUR. Recordemos que una base $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ en el espacio X es *monótona* si para dos conjuntos cualesquiera de números reales $\{a_\gamma\}_{\gamma\in A}$ y $\{b_\gamma\}_{\gamma\in A}$ tales que $A\subset\Gamma$ con $\operatorname{card}(A)<\infty$ y $|a_\gamma|\le|b_\gamma|$ para todo $\gamma\in A$ se tiene

$$\left\|\sum_{\gamma\in A} a_\gamma e_\gamma\right\| \le \left\|\sum_{\gamma\in A} b_\gamma e_\gamma\right\|.$$

Utilizando este hecho probamos el siguiente teorema.

Teorema 1. ***Sea X un espacio de Banach con base incondicional. Entonces X admite una norma equivalente con norma dual LUR si y sólo si X no contiene ningún subespacio isomorfo a ℓ_1.***

Demostración. R.C. James probó en 1950 que si X es un espacio con base incondicional $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ y X no contiene ningún subespacio isomorfo a ℓ_1, entonces dicha base es *contractiva*, es decir, el sistema conjugado correspondiente $\{f_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ es una base del espacio X^*. Cambiando los papeles de $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ y $\{f_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ en la definición de la norma $|||\cdot|||$ obtenemos una norma en X^*. De la propia definición se sigue que dicha norma es w^*-inferiormente semicontinua, y por tanto dual. Así pues, X admite una norma equivalente con norma dual LUR.

Por otro lado, si X tiene una norma dual LUR, entonces X es un espacio de Asplund en virtud del Teorema de Bishop-Phelps, y utilizando nuevamente un resultado de James deducimos que X no contiene ninguna copia de ℓ_1.

$\square$

En 1955, M.M. Day probó que si Γ es un conjunto no numerable, entonces el espacio $\ell_1(\Gamma)$ no admite ninguna norma equivalente Gâteaux diferenciable. De aquí se deduce que dicho espacio no tiene ninguna norma equivalente con norma dual estrictamente convexa. Utilizando este resultado obtuvimos el siguiente teorema.

Teorema 2 (S.T., 1975)**.** ***Un espacio de Banach con base simétrica admite una norma equivalente con norma dual estrictamente convexa, si y sólo si, X no contiene ningún subespacio isomorfo a $\ell_1(\Gamma)$, Γ no numerable.***

Este resultado sugiere la siguiente cuestión:

Si X es un espacio de Banach con base incondicional que no contiene a $\ell_1(\Gamma)$ siendo Γ un conjunto no numerable, ¿admite X una norma equivalente con norma dual estrictamente convexa?

En 1993, S. Argyros y S. Mercourakis proporcionaron un ejemplo de espacio con base incondicional, sin copias de $\ell_1(\Gamma)$, Γ no numerable, que no admite norma equivalente con norma dual estrictamente convexa.

En los años 90, R. Haydon obtuvo una caracterización de los árboles Υ para los cuales el espacio $C(\Upsilon)$ admite una norma estrictamente convexa. En 2006, R. Smith caracterizó asimismo los espacios de este tipo que poseen una norma dual estrictamente convexa.

Recientemente, Smith ha probado que si K es un compacto de Gruenhage entonces el espacio $C(K)^*$ tiene una norma dual estrictamente convexa. Recordemos que un espacio topológico Z es un *espacio de Gruenhage* si existen familias $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos abiertos tales que para cualesquiera $x, y \in Z$ existen $n \in \mathbb{N}$ y $U \in \mathscr{U}_n$ de modo que el conjunto $U \cap \{x, y\}$ consta de un solo elemento y al menos uno de los puntos x o y pertenece a una cantidad finita de conjuntos $U' \in \mathscr{U}_n$.

Haciendo uso del resultado anterior hemos obtenido, en colaboración con R. Smith, una caracterización de los espacios con base incondicional cuyo espacio dual tiene una norma dual estrictamente convexa.

Sea X un espacio de Banach con base incondicional $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ y sistema conjugado $\{f_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, y designemos por $\mathscr{A}=\mathscr{A}(X)$ a la familia de todos los subconjuntos $A\subset\Gamma$ para los cuales la expresión

$$\mathbb{1}_A(x)=\sum_{\gamma\in A} f_\gamma(x)$$

define un elemento del espacio X^*. Es claro que si A es un subconjunto finito de Γ entonces $A\in\mathscr{A}(X)$. Es fácil ver asimismo que $\mathscr{A}(c_0(\Gamma))$ coincide con la familia de todos los subconjuntos finitos de Γ y que $\mathscr{A}(\ell_1(\Gamma))$ es la familia de todos los subconjuntos de Γ.

En 2007, en colaboración con A. Moltó, J. Orihuela, V. Zizler probamos que si la norma en X^* es estrictamente convexa entonces existe una norma $|||\cdot|||$ equivalente en X cuya norma dual es estrictamente convexa y tal que la base $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ es monótona con respecto a esta norma.

Sea $\rho : \mathscr{A} \longrightarrow (0,\infty)$ la función definida por la expresión

$$\rho(A) = |||\mathbb{1}_A|||.$$

Esta función es estrictamente creciente, es decir, $\rho(A) < \rho(B)$ cuando A y B son elementos de $\mathscr{A}$ tales que A está contenido estrictamente en B. En efecto, supongamos que que $A \subseteq B$. Entonces, para cada $\gamma \in \Gamma$ se tiene

$$0 \leq \mathbb{1}_A(\gamma) \leq \mathbb{1}_A(\gamma) + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{B\setminus A}(\gamma) \leq \mathbb{1}_B(\gamma).$$

Como la base $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ es monótona respecto de $|||\cdot|||$ obtenemos

$$\rho(A) = |||\mathbb{1}_A||| \leq |||\mathbb{1}_A + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{B\setminus A}||| \leq |||\mathbb{1}_B||| = \rho(B),$$

de modo que ρ es creciente. Supongamos ahora que $\rho(A) = \rho(B)$. Entonces

$$\mathbb{1}_A + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{B\setminus A} = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B\right),$$

y consecuentemente,

$$|||\mathbb{1}_A||| = |||\mathbb{1}_B||| = \frac{1}{2} \cdot |||\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B|||.$$

Pero como la norma $|||\cdot|||$ es estrictamente convexa se sigue que $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$, es decir, $A = B$.

En $\mathscr{A}$ consideramos la topología de convergencia puntual τ_p. Es fácil ver que $\mathscr{A}$ es homeomorfo al conjunto $\{\mathbb{1}_A : A \in \mathscr{A}\} \subset X^*$, dotado de la topología que hereda de la topología débil estrella en X^*. Como la norma $|||\cdot|||$ es dual se sigue que $|||\cdot|||$ es w^*-inferiormente semicontinua. **Por esta razón, la función $\rho : \mathscr{A} \longrightarrow (0, \infty)$ es τ_p-inferiormente semicontinua.** Esta condición y la monotonía de la función ρ caracterizan los espacios de Banach con base incondicional que admiten una norma equivalente con norma dual estrictamente convexa.

Teorema 3 (R. Smith, S.T.)**.** ***Sea X un espacio de Banach con base incondicional normalizada y sea $\mathscr{A}$ la familia de conjuntos definida***

más arriba. Entonces X admite una norma equivalente con norma dual estrictamente convexa si y sólo si existe una función estrictamente monótona y τ_p-inferiormente semicontinua $\rho : \mathscr{A} \longrightarrow (0, \infty)$.

Nota 4. ***Es fácil ver que el subespacio $\overline{\mathrm{span}\{e_\gamma\}_{\gamma \in A}}^{\|\cdot\|}$ es isomorfo a $\ell_1(A)$ si y sólo si $A \in \mathscr{A}$. En otras palabras, la función ρ controla la cantidad de subespacios de X isomorfos a ℓ_1.***

La demostración del teorema anterior es topológica y está basada en el siguiente lema.

Lema 5. *Sea K un subconjunto τ_p-compacto de $[0, 1]^\Gamma$ tal que $x \wedge y \in K$ si $x, y \in K$. Supongamos además que existe una función τ_p-inferiormente semicontinua $\rho : K \longrightarrow [0, 1]$ con la siguiente propiedad:*

$(*)$ *Si $y < x$ entonces existen un número $\alpha < \rho(x)$ y un conjunto abierto U que contiene a y de modo que para cualquier $z \in U$ con $z \leq x$ se tiene $\rho(z) < \alpha$.*

Entonces:

I. K *es fragmentable.*

II. *Para cada* $r \in [0,1]$, $(\rho^{-1}(r), \tau_p)$ *tiene una network* σ*-aislada.*

Si, además, $K \subseteq \{0,1\}^{\Gamma}$, *entonces*

III. K *es descriptivo.*

Recordemos algunos conceptos topológicos. Se dice que una función $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ es una *simétrica* si satisface todos los axiomas de una métrica excepto, quizá, la desigualdad triangular.

Sea (Z, τ) un espacio topológico regular. Se dice que Z es *fragmentable* si existe una métrica d en Z de modo que para cada subconjunto no vacío $E \subseteq Z$ y cada $\epsilon > 0$ existe un conjunto τ-abierto $U \subset Z$ tal que $E \cap U$ es no acotado y tiene diámetro menor que ϵ. En 1985, N. Ribarska probó que para que Z sea fragmentable es suficiente que d sea una función no negativa en $Z \times Z$ de modo que $x = y$ cuando $d(x, y) = 0$.

Una familia $\mathscr{N}$ de subconjuntos de Z es una *network* para Z si, para cualquier conjunto $U \in \tau$ y cualquier $x \in U$ existe un $N \in \mathscr{N}$ tal que $x \in N \subseteq U$.

Una familia de subconjuntos $\mathscr{F}$ de Z se denomina *aislada* si para cualquier $E \in \mathscr{F}$ se tiene que la intersección $E \cap \overline{\bigcup \mathscr{F} \setminus \{E\}}$ es vacía; esta condición equivale a la existencia de un conjunto $U \in \tau$ tal que $E \subseteq U$ y $U \cap F \neq \emptyset$ para cada $F \in \mathscr{F} \setminus E$.

Una network $\mathscr{N}$ es σ-*aislada* si se puede expresar como unión numerable de conjuntos aislados.

El espacio Z es *descriptivo* si Z es compacto y admite una network σ-aislada. La clase de los espacios descriptivos es amplia y contiene, entre otros, a los compactos metrizables, los compactos de Eberlein y los compactos de Gul'ko. Por otra parte se sabe que todo espacio descriptivo es un compacto de Gruenhage.

Los conceptos de simétrica, network σ-aislada y espacio descriptivo han sido estudiados en los trabajos de G. Gruenhage (1984), R. Hansell (2001), M. Raja (2003) y N. Ribarska (1987).

Antes de formular nuestro resultado completo necesitamos un teorema muy profundo de M. Raja.

Teorema 6 (Raja, 2003)**.** ***Si*** (B_{X^*}, w^*) ***es es un compacto descriptivo entonces*** X ***admite una norma equivalente con norma dual*** w^****-LUR.***

Recordemos que una norma $\|\cdot\|$ es un espacio dual X^* es *débil estrella localmente uniformemente convexa* (w^*-LUR) si, para cualquier $x^* \in X^*$ y cualquier sucesión $(x_n^*)_n \subset X^*$ tales que $\|x_n^*\| = \|x^*\| = 1$ y $\|x_n^* + x^*\| \to 2$ se tiene $x_n^* \to x^*$ en la topología débil estrella de X^*.

Ahora estamos en condiciones de formular nuestro teorema

Teorema 7 (R. Smith, S.T.). ***Supongamos que el espacio X tiene una base incondicional normalizada, y sea $\mathscr{A}$ la familia de conjuntos definida más arriba. Las condiciones siguientes son equivalentes:***

(1) (B_{X^*}, w^*) ***es un compacto de Gruenhage;***

(2) X ***admite una norma equivalente con norma dual estrictamente convexa;***

(3) ***Existe una aplicación creciente y τ_p-inferiormente semicontinua***

$$\rho : \mathscr{A} \longrightarrow [0, 1].$$

(4) (B_{X^*}, w^*) ***es un espacio compacto descriptivo.***

(5) X ***admite una norma equivalente con norma dual w^*-LUR.***

Ejemplos: Supongamos que $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ es una base monótona, incondicional y normalizada en X. Escribamos

$$\mathscr{A}_1 = \{A \in \mathscr{A} : \|\mathbb{1}_A\| \leq 1\}.$$

Esta familia tiene las siguientes propiedades:

1. Para cada $\gamma \in \Gamma$, $\{\gamma\} \in \mathscr{A}_1$ (por ser $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ una base normalizada);
2. Si $B \in \mathscr{A}_1$ y $A \subset B$, entonces $A \in \mathscr{A}_1$ (por ser $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ monótona e incondicional);
3. El conjunto $\mathscr{A}_1$, dotado de la convergencia puntual, es compacto.

Una familia de subconjuntos con estas propiedades se denomina *adecuada*. Estas familias fueron introducidas por M. Talagrand en 1979, y han sido consideradas por otros autores como S. Argyros y S. Mercourakis (1993) o A. Leiderman y G. Sokolov (1984).

El conjunto de los subconjuntos totalmente ordenados de un conjunto totalmente ordenado E es adecuado en E. Si Γ es un conjunto de sentencias en una teoría de primer orden entonces la familia de los subconjuntos consistentes de Γ es adecuada en Γ. Dada una familia adecuada $\mathscr{A}$, definimos un retículo de Banach ideal $\ell_{\mathscr{A}}$ como el conjunto formado por los $x \in \ell_\infty(\Gamma)$ tales que $\|x\|_{\mathscr{A}} < \infty$, siendo

$$\|x\|_{\mathscr{A}} = \sup\left\{\|x \restriction A\|_1 : A \in \mathscr{A}\right\},$$

donde $\|\cdot\|_1$ designa la norma 1 (Argyros & Mercourakis, Rocky Mountain Journal of Mathematics). Así por ejemplo, si $\mathscr{A} = \cup\left\{\{\gamma\} : \gamma \in \Gamma\right\}$ entonces $\ell_{\mathscr{A}} = \ell_\infty(\Gamma)$, y si $\Gamma \in \mathscr{A}$ entonces $\ell_{\mathscr{A}} = \ell_1(\Gamma)$.

Es fácil ver que, en general, la base unitaria $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ constituye un conjunto normalizado, monótono e incondicional en $\ell_{\mathscr{A}}$. Sea $h_{\mathscr{A}} = \overline{\operatorname{span}\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}}^{\|\cdot\|_{\mathscr{A}}}$ y denotemos de nuevo con el símbolo $\|\cdot\|_{\mathscr{A}}$ la norma dual en el espacio $h^\star_{\mathscr{A}}$. Dados $x \in h_{\mathscr{A}}$ y

$A \subseteq \Gamma$ definimos

$$\mathbb{1}_A(x) = \sum_{\gamma \in A} x_\gamma$$

cuando esta suma tiene sentido. Es claro que las funciones $\mathbb{1}_A$, $A \in \mathscr{A}$ son elementos del espacio $h^*_{\mathscr{A}}$, y que

$$\|\mathbb{1}_A\|_{\mathscr{A}} = 1$$

cuando el conjunto A es no vacío. También es fácil comprobar que la aplicación π definida en $\mathscr{A}$ por medio de la expresión $\pi(A) = \mathbb{1}_A$ es $\tau_p - w^*$ continua; en particular, la imagen $\pi(\mathscr{A})$ es homeomorfa a $\mathscr{A}$.