# Teoría del Punto Fijo para Operadores No Lineales: Aplicaciones

**J. Garcia Falset**

U. València

Salobreña, Abril de 2010

1. Introducción
2. Investigación
   - Resultados de punto fijo y de existencia de ceros
   - Geometría de los espacios de Banach
   - Existencia de soluciones y comportamiento asintótico
3. Algunos resultados
   - Ceros de Operadores Acretivos
   - Puntos fijos de aplicaciones

1. El Grupo empieza a gestarse en el curso académico $1984 - 85$ con la incorporación de E. Llorens-Fuster al Departamento de Análisis.

1. El Grupo empieza a gestarse en el curso académico $1984 - 85$ con la incorporación de E. Llorens-Fuster al Departamento de Análisis.
2. El curso $1986 - 87$ me incorporo al Departamento de Análisis y empiezo la Tesis doctoral bajo la dirección de E. Llorens.

1. El Grupo empieza a gestarse en el curso académico $1984 - 85$ con la incorporación de E. Llorens-Fuster al Departamento de Análisis.
2. El curso $1986 - 87$ me incorporo al Departamento de Análisis y empiezo la Tesis doctoral bajo la dirección de E. Llorens.
3. El primer proyecto subvencionado data del año $1993 - 94$. Desde este curso el proyecto del grupo siempre ha contado con financiación.

1. El Grupo empieza a gestarse en el curso académico $1984 - 85$ con la incorporación de E. Llorens-Fuster al Departamento de Análisis.
2. El curso $1986 - 87$ me incorporo al Departamento de Análisis y empiezo la Tesis doctoral bajo la dirección de E. Llorens.
3. El primer proyecto subvencionado data del año $1993 - 94$. Desde este curso el proyecto del grupo siempre ha contado con financiación.
4. El cuso academico $2000 - 01$ se incorpora al grupo E. Mazcuan-Navarro.

1. El Grupo empieza a gestarse en el curso académico $1984-85$ con la incorporación de E. Llorens-Fuster al Departamento de Análisis.
2. El curso $1986-87$ me incorporo al Departamento de Análisis y empiezo la Tesis doctoral bajo la dirección de E. Llorens.
3. El primer proyecto subvencionado data del año $1993-94$. Desde este curso el proyecto del grupo siempre ha contado con financiación.
4. El cuso academico $2000-01$ se incorpora al grupo E. Mazcuan-Navarro.

En la actualidad el grupo está formado:

Jesús Garcia-Falset (IP)
Enrique Llorens-Fuster
Eva Mazcuñan-Navarro
Simeon Reich

# Financiación

En los últimos 5 años los proyectos subvencionados que hemos obtenidos son los siguientes:

- *TEORÍA MÉTRICA DEL PUNTO FIJO Y ACRETIVIDAD: EXISTENCIA Y COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO.*
  *ENTIDAD FINANCIADORA: MCTE- Ministerio de ciencia y tecnología*
  *INVESTIGADOR PRINCIPAL: ENRIQUE LLORENS FUSTER.*
- *TEORÍA MÉTRICA DEL PUNTO FIJO, HIPERCICLICIDAD Y APLICACIONES*
  *ENTIDAD FINANCIADORA: MCTE- Ministerio de ciencia y tecnología*
  *INVESTIGADOR PRINCIPAL: ENRIQUE LLORENS FUSTER.*
- *OPERADORES NO EXPANSIVOS, MONÓTONOS Y ACRETIVOS: APLICACIONES*
  *ENTIDAD FINANCIADORA: Ministerio de ciencia e innovación*
  *INVESTIGADOR PRINCIPAL: JESÚS GARCIA FALSET.*

En los últimos 5 años los proyectos subvencionados que hemos obtenidos son los siguientes (coordinados con el grupo de Análisis No lineal de la Universidad de Sevilla):

- *TEORÍA MÉTRICA DEL PUNTO FIJO Y ACRETIVIDAD: EXISTENCIA Y COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO.*
  *ENTIDAD FINANCIADORA: MCTE- Ministerio de ciencia y tecnología*
  *INVESTIGADOR PRINCIPAL: ENRIQUE LLORENS FUSTER.*
- *TEORÍA MÉTRICA DEL PUNTO FIJO, HIPERCICLICIDAD Y APLICACIONES*
  *ENTIDAD FINANCIADORA: MCTE- Ministerio de ciencia y tecnología*
  *INVESTIGADOR PRINCIPAL: ENRIQUE LLORENS FUSTER.*
- *OPERADORES NO EXPANSIVOS, MONÓTONOS Y ACRETIVOS: APLICACIONES*
  *ENTIDAD FINANCIADORA: Ministerio de ciencia e innovación*
  *INVESTIGADOR PRINCIPAL: JESÚS GARCIA FALSET.*

El principal objetivo del grupo intenta cubrir una doble faceta:

(a) Obtener resultados de existencia de punto fijo así como ceros de clases significativas de operadores no lineales: Aplicaciones no-expansivas, pseudo-contractivas, operadores monótonos, acretivos etc.

El principal objetivo del grupo intenta cubrir una doble faceta:

(a) Obtener resultados de existencia de punto fijo así como ceros de clases significativas de operadores no lineales:Aplicaciones no-expansivas, pseudo-contractivas, operadores monótonos, acretivos etc.

(b) La segunda faceta se dedica a estudiar resultados de existencia de soluciones para varios tipos de ecuaciones funcionales: Ecuaciones integrales, ecuaciones diferenciales en espacios de Banach, ecuaciones en derivadas parciales etc.

# Teoremas de punto fijo

En los últimos años las aportaciones del grupo a este respecto se pueden resumir en las siguientes publicaciones:

(1) J. Garcia-Falset, E. LLorens-Fuster, E.M. Mazcuñán-Navarro, *Unifrmly nonsquare spaces have the fixed point property for nonexpansive mappings, J. Fun. Anal. 233 (2006) 494-514.*

(2) *E.M. Mazcuñán-Navarro, Stability of the fixed point property in Hilbert spaces, P. Amer. that. Soc., 134 (2006) 129-138*

(3) *J. Garcia-Falset, E. LLorens-Fuster, S. Prus, The fixed point property for mappings admitting a center, Nonlinear Analysis 66 (2007). 1257-1274.*

(4) *J. Garcia-Falset, L. Guran, E. LLorens-Fuster, Fixed points for multivalued contractions with respect to a w-distance, Scien. Math. Jap. e-2009 (2009) 611-619.*

(5) *González, C., Jiménez-Melado, E. LLorens-Fuster, Mönch type fixed point theorem under the interior condition, J. Math. Anal. Appl. 352 (2009) 816-821.*

(7) *J. Garcia-Falset, E. LLorens-Fuster, Fixed points for pseudocontractive mappings on unbounded domains, Fixed Point Theory and Applications , (2010) Doi:10.1155/j.2010/769858*

# Existencia de ceros de operadores

Esta problematica la hemos tratado en los siguientes artículos:

(8) J. Garcia-Falset, C.H. Morales, *Existence theorems for m-accretive operators in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl. 309 (2005) 453-561.*

(9) *J. Garcia-Falset, S. Reich, Zeroes of accretive operators and asymptotic behavior of nonlineal semigroups, Houston J. Math. 32(4) (2006) 1197-1225.*

(7) *J. Garcia-Falset, E. LLorens-Fuster, Fixed points for pseudocontractive mappings on unbounded domains, Fixed Point Theory and Applications , (2010) Doi:10.1155/j.2010/769858*

# Conceptos geométricos.

Cuando se estudian los problemas de existencia ya sea de punto fijo o de ceros de determinadas clases de operadores no lineales se observa que es esencial el conocimiento de la geometría de los espacios donde los operadores están definidos. Este hecho ha determinado que nuestro grupo dedique una atención especial al estudio de varias propiedades y conceptos geométricos de los espacios de Banach.

# Conceptos geométricos.

Cuando se estudian los problemas de existencia ya sea de punto fijo o de ceros de determinadas clases de operadores no lineales se observa que es esencial el conocimiento de la geometría de los espacios donde los operadores están definidos. Este hecho ha determinado que nuestro grupo dedique una atención especial al estudio de varias propiedades y conceptos geométricos de los espacios de Banach.

(10) A. Jiménez-Melado, E. LLorens-Fuster, E. Saejung, *The Von Neuman-Jordan constant, weak orthogonality and normal structure in Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 134 (2006) 355-364.*

(11) *E.M. Mazcuñán-Navarro, Banach space properties sufficient for normal structure, J. Math. Anal. Appl. 337 (2008) 197-218.*

(12) *E.M. Mazcuñán-Navarro, Three-dimensional convexity and the fixed property for nonexpansive mapping, Nonlinear Analysis (2008).*

(13) *Jiménez-Melado, E. LLorens-Fuster, E.M. Mazcuñán-Navarro, The Dunkl-Williams constant, convexity, smoothness and normal structure, J. Math. Anal. Appl. 342 (2008) 298-310.*

# Conceptos geométricos.

(14) Alonso J., LLorens-Fuster, *Geometric mean and triangles inscribed in a semicircle in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl. 340 (2008) 1271-1283.*

(15) *E. LLorens-Fuster, Zbaganu constant and normal structure, Fixed Point Theory (9)(1), (2008) 159-172.*

(16) *Domínguez Benavides T., Garcia Falset, E. LLorens-Fuster, Lorenzo Ramírez P, Fixed point properties and proximinality in Banach spaces, Nonlinear Analysis 71 (2009) 1562-1571.*

(17) *E. Llorens Fuster, E. Mazcuñán Navarro, S. Reich, The Ptolemy and Zbaganu constants of normed spaces, Nonlinear Analysis (2010).*

# Existencia de soluciones

Hemos observado que muchos de los resultados sobre existencia de punto fijo o sobre la existencia de ceros pueden utilizarse para resolver estos últimos problemas.

El estudio de soluciones para tipos de ecuaciones integrales ha sido tratado en las siguientes publicaciones:

(3) J. Garcia-Falset, E. LLorens-Fuster, S. Prus, *The fixed point property for mappings admitting a center, Nonlinear Analysis 66 (2007). 1257-1274.*

(7) J. Garcia-Falset, E. LLorens-Fuster, *Fixed points for pseudocontractive mappings on unbounded domains, Fixed Point Theory and Applications , (2010) Doi:10.1155/j.2010/769858*

(18) J. Garcia Falset, *Existence of Fixed points and measures of weak noncompactness, Nonlinear Analysis 71 (2009) 2625-2633.*

(19) *J. Garcia Falset, Existence of Fixed points for the sum of two operators, Math. Nachr. (Aceptado)*

# Problema abstracto de Cauchy

Hemos dedicado una atención especial al estudio de los problemas abstractos de Cauchy los cuales están gobernados por operadores acretivos, ya que éstos nos permiten interpretar algunos tipos de ecuaciones en derivadas parciales y de este modo podemos estudiar la existencia, unicidad y comportamiento asintótico de sus soluciones.

# Problema abstracto de Cauchy

(20) J. Garcia-Falset, *The asymptotic behavior of the solutions of the Cauchy problem generated by $\phi$-accretive operators,J. Math. Anal. Appl. 310 (2005) 594-608.*

(9) *J. Garcia-Falset, S. Reich, Zeroes of accretive operators and asymptotic behavior of nonlineal semigroups, Houston J. Math. 32(4) (2006) 1197-1225.*

(21) *J. Garcia-Falset, Existence results and asymptotic behavior for nonlocal abstract Cauchy problems, J. Math. Anal. Appl. 338 (2008) 638-652.*

(19) *J. Garcia Falset, Existence of Fixed points for the sum of two operators, Math. Nachr. (Aceptado)*

(22) *J. Garcia-Falset, S. Reich, Integral solutions to a class of nonlocal evolution equations, Communications in Contemporary Math. (Aceptado)*

# Introducción

Sea $C$ un subconjunto no vacío de un espacio de Banach $X$ con norma $\|\cdot\|$. Recordemos que una aplicación $T : C \to X$ se llama no-expansiva si cumple que $\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|$ para todo $x, y \in C$. $X$ se dice que tiene la propiedad del punto fijo ((FPP) para abreviar) si toda aplicación no expansiva que deja invariante algún subconjunto cerrado acotado y convexo de $X$ tiene un punto fijo.

# Introducción

Sea $C$ un subconjunto no vacío de un espacio de Banach $X$ con norma $\|\cdot\|$. Recordemos que una aplicación $T : C \to X$ se llama no-expansiva si cumple que $\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|$ para todo $x, y \in C$. $X$ se dice que tiene la propiedad del punto fijo ((FPP) para abreviar) si toda aplicación no expansiva que deja invariante algún subconjunto cerrado acotado y convexo de $X$ tiene un punto fijo.

Es bien conocido que la propiedad (FPP) depende fuertemente de las buenas propiedades geométricas del espacio donde se está trabajando.

# Introducción

Sea $C$ un subconjunto no vacío de un espacio de Banach $X$ con norma $\|\cdot\|$. Recordemos que una aplicación $T : C \to X$ se llama no-expansiva si cumple que $\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|$ para todo $x, y \in C$. $X$ se dice que tiene la propiedad del punto fijo ((FPP) para abreviar) si toda aplicación no expansiva que deja invariante algún subconjunto cerrado acotado y convexo de $X$ tiene un punto fijo.

Es bien conocido que la propiedad (FPP) depende fuertemente de las buenas propiedades geométricas del espacio donde se está trabajando.

Por ejemplo, un resultado paradigmático es el probado por W.A. Kirk ( 1965), el cual establece que los espacios reflexivos que tienen estructura normal (NS), cumplen la (FPP).

Si $C$ es un subconjunto cerrado y convexo de un espacio de Banach $X$ verificando la (FPP), en general no es cierto que toda aplicación no expansiva $T : C \to C$ tenga algún punto fijo debido a la posible no acotación del conjunto $C$.

Si $C$ es un subconjunto cerrado y convexo de un espacio de Banach $X$ verificando la (FPP), en general no es cierto que toda aplicación no expansiva $T : C \rightarrow C$ tenga algún punto fijo debido a la posible no acotación del conjunto $C$.

Es suficiente pensar en una traslación de vector no nulo.

Si $C$ es un subconjunto cerrado y convexo de un espacio de Banach $X$ verificando la (FPP), en general no es cierto que toda aplicación no expansiva $T : C \to C$ tenga algún punto fijo debido a la posible no acotación del conjunto $C$.

Es suficiente pensar en una traslación de vector no nulo.

$$T : [1, +\infty[ \to [1, +\infty[: \quad T(x) = x + \frac{1}{x}$$

# Notación

Supondremos que $X$ es un espacio de Banach real y que $X^*$ es su dual topológico. Denotamos por $B_r$ a la bola cerrada centrada en $0_X \in X$ y con radio $r > 0$. También usaremos la notación $|B| := \inf\{\|y\| : \ y \in B\}$, $B \subset X$.

# Notación

Supondremos que $X$ es un espacio de Banach real y que $X^*$ es su dual topológico. Denotamos por $B_r$ a la bola cerrada centrada en $0_X \in X$ y con radio $r > 0$. También usaremos la notación $|B| := \inf\{\|y\| : \ y \in B\}$, $B \subset X$.

Si $x \in X$, $J(x)$ es el valor de la aplicación dualidad normalizada sobre el punto $x$. Dicha aplicación viene definida como

$$J(x) := \{j \in X^* : j(x) = \|x\|^2, \|j\| = \|x\|\}.$$

Usaremos que $\langle y, x\rangle_+ := \max\{j(y) : j \in J(x)\}$.

# Notación

Supondremos que $X$ es un espacio de Banach real y que $X^*$ es su dual topológico. Denotamos por $B_r$ a la bola cerrada centrada en $0_X \in X$ y con radio $r > 0$. También usaremos la notación $|B| := \inf\{\|y\| : \ y \in B\}$, $B \subset X$.

Si $x \in X$, $J(x)$ es el valor de la aplicación dualidad normalizada sobre el punto $x$. Dicha aplicación viene definida como

$$J(x) := \{j \in X^* : j(x) = \|x\|^2, \ \|j\| = \|x\|\}.$$

Usaremos que $\langle y, x\rangle_+ := \max\{j(y) : j \in J(x)\}$.

Una aplicación $A : D(A) \to 2^X$ se llamará operador sobre $X$. El dominio efectivo de $A$ se denota por $D(A)$, y su rango por $R(A)$. Un operador $A : D(A) \subset X \to 2^X$ se denomina acretivo si, y sólo si,

$$\langle u - v, x - y\rangle_+ \geq 0 \text{ for all } \ (x, u), (y, v) \in A.$$

Una aplicación $A : D(A) \to 2^X$ se llamará operador sobre $X$. El dominio efectivo de $A$ se denota por $D(A)$, y su rango por $R(A)$. Un operador $A : D(A) \subset X \to 2^X$ se denomina acretivo si, y sólo si,

$$\langle u - v, x - y\rangle_+ \geq 0 \text{ for all } (x, u), (y, v) \in A.$$

Si, además, $R(I + \lambda A)$ es para uno, entonces para todos, $\lambda > 0$, precisamente $X$, entonces $A$ se llama $m$-acretivo.

Una aplicación $A : D(A) \to 2^X$ se llamará operador sobre $X$. El dominio efectivo de $A$ se denota por $D(A)$, y su rango por $R(A)$. Un operador $A : D(A) \subset X \to 2^X$ se denomina acretivo si, y sólo si,

$$\langle u - v, x - y \rangle_+ \geq 0 \text{ for all } (x, u), (y, v) \in A.$$

Si, además, $R(I + \lambda A)$ es para uno, entonces para todos, $\lambda > 0$, precisamente $X$, entonces $A$ se llama *m*-acretivo.

Se dice que $A$ verifica la condición rango si $\overline{D(A)} \subset R(I + \lambda A)$ para todo $\lambda > 0$.

Una aplicación $T : C \to X$ se llama pseudo-contractiva si para todo $x, y \in C$, y para todo número positivo $r$,

$$\|x - y\| \leq \|(1 + r)(x - y) - r(T(x) - T(y))\|.$$

Las aplicaciones no expansivas son siempre Pseudo-contractivas.

Una aplicación $T : C \to X$ se llama pseudo-contractiva si para todo $x, y \in C$, y para todo número positivo $r$,

$$\|x - y\| \leq \|(1 + r)(x - y) - r(T(x) - T(y))\|.$$

Las aplicaciones no expansivas son siempre Pseudo-contractivas.

El interés en estas aplicaciones, aparte de ser una generalización de las no expansivas, viene de su fuerte conexión con los operadores acretivos: Especificamente,

$T$ es pseudo-contractiva si, y sólo si, $I - T$ es acretiva.

## Teorema

*Sea $X$ un espacio de Banach real con la propiedad (FPP). Definimos $G : X \times X \to \mathbb{R}$ como*

$$G(x,y) = \begin{cases} \lambda, & \text{if } x = \lambda y,\ \lambda > 0,\ x \neq 0 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

*Si $A : D(A) \to 2^X$ es un operador m-acretivo, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Existe $R > 0$ tal que $\sup_{y \in Ax} G(x-y, x) \leq G(x,x)$ siempre que $x \in D(A)$ and $\|x\| \geq R$.*
2. $0_X \in R(A)$.

## Corolario

*Sea $X$ un espacio de Banach real con la (FPP). Supongamos que $A : D(A) \subseteq X \to 2^X$ es un operador m-acretivo para el cual existen $x_0 \in D(A)$ y $R > 0$ tal que*

$$|A(x_0)| < |A(x)|$$

*para todo $x \in D(A)$ con $\|x\| \geq R$. Entonces $0_X \in R(A)$.*

## Corolario

*Si $H$ es un espacio de Hilbert real . $\varphi : H \to (-\infty, \infty]$ es una función convexa semicontinua inferiormente con dominio efectivo $D(\varphi)$. Supongamos que para algún $z_0 \in D(\varphi)$ existe $r > 0$ cumpliendo que $\varphi(z_0) < \varphi(x)$ para todo $x \in H$ con $\|x\| \geq r$.*
*Entonces $\varphi$ tiene un mínimo absoluto sobre $H$.*

## Proposición

*Sea $X$ un espacio de Banach real con la (FPP). Sea $C$ un subconjunto cerrado y convexo de $X$ tal que $0_X \in C$. Sea $T : C \to C$ es una aplicación continua y pseudocontractive. Si $T$ cumple:*
*(a) Existe $R > 0$ tal que para cada $x \in C \backslash B_R$ y para cada $\lambda > 1$ $T(x) \neq \lambda x$.*
*Entonces $T$ tiene un punto fijo en $C$.*

## Proposición

*Sea $X$ un espacio de Banach real con la (FPP). Sea $C$ un subconjunto cerrado y convexo de $X$. Si $T : C \to C$ es una aplicación pseudocontractiva y continua y que para cada $x \in C$ con $\|x\|$ suficientemente grande*

$$\|T(x) - x_0\| \leq \|x - x_0\|, \tag{1}$$

*para algun $x_0 \in X$, entonces $T$ tiene un punto fijo en $C$.*

## Ejemplo

Ec. Integral de tipo Hammerstein

$$u(t) = w(t) + \int_{\Omega} \zeta(t,s) f(s,u(s)) ds, \tag{2}$$

en $L^p(\Omega)$. Aquí $1 < p < \infty$, $\Omega$ e un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ cuya medida de Lebesgue $\mu(\Omega) = 1$, y $w \in L^p(\Omega)$. Supongamos que $\zeta$ y $f$ cumplen las siguientes condiciones:

1. $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de Carathéodory,
2. $|f(s,x)| \leq a(s) + b|x|$, donde $a \in L^p(\Omega)$ y $b \geq 0$,
3. $|f(s,x) - f(s,y)| \leq k|x-y|$,
4. la función $\zeta : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ es fuertemente medible y $\int_{\Omega} \zeta(.,s)u(s)ds \in L^p(\Omega)$ siempre que $u \in L^p(\Omega)$,
5. existe una función $\tau : \Omega \to \mathbb{R}$, perteneciente a $L^p(\Omega)$ tal que $|\zeta(t,s)| \leq \tau(t)$ for all $(t,s) \in \Omega \times \Omega$,
6. $k\|\tau\|_p \leq 1$ y $b\|\tau\|_p < 1$.