Topología descriptiva en Análisis Funcional

Manuel López Pellicer

IUMPA
Universidad Politécnica de Valencia

11 de abril de 2011 / VII Encuentro NFAAS en Jaca

Outline

Outline

1. Talagrand-Thachuk $C_p(X)$ theorem.
   - Resoluciones
   - Talagrand-Thachuk $C_p(X)$ theorem.

Resoluciones

Resolución es un cubrimiento ordenado por inclusión $\{A_\alpha, \alpha \in \mathbb{N}^\mathbb{N}\}$ de un espacio topológico E (Drewnowski, 2007). También se dice que E está P-dominado por irracionales (Tkachuck en 2005).

Resoluciones

La resolución $\{A_\alpha, \alpha \in \mathbb{N}^\mathbb{N}\}$ es compacta (numerablemente compacta, ...) si cada A_i es compacto (numerablemente compacto, ...).

Talagrand-Thachuk $C_p(X)$ theorem.

Sea X es un espacio topológico compacto.
$C_p(X)$ es K-analítico si y sólo si admite una resolución compacta (Talagrand 1979).
El resultado anterior es válido si X es un espacio topológico completamente regular (Tkachuk 2005).

Talagrand-Thachuk $C_p(X)$ theorem.

(J. Orihuela 1987) Si Y tiene una resolución $\{A_\alpha, \alpha \in \mathbb{N}^\mathbb{N}\}$ tal que
$(\alpha_p)_p$ convergente $\Longrightarrow \cup \left\{A_{\alpha_p} : p \in \mathbb{N}\right\}$ rnc
e Y es denso en X
entonces $C_p(X)$ es angélico

Talagrand-Thachuk $C_p(X)$ theorem.

(B. Cascales, 1987) Si E angélico son equivalentes:

- E tiene resolución compacta.
- E es quasi-Suslin
- E es K-analítico.

De los teoremas de Orihuela y Cascales se sigue el teorema de Talagrand.

Talagrand-Thachuk $C_p(X)$ theorem.

(J.C. Ferrando y J. Kakol, 2008)
Para un espacio completamente regular X son equivalentes:

- $C_p(X)$ admite una resolución acotada.
- $C_p(X)$ es angélico y está contenido en un subespacio K-analítico de $\mathbb{R}^X$.

De este resultado y del teorema de Cascales se deduce el teorema de Tkachuk.

Outline

2 El teorema de De Wilde-Sunyach
- De Wilde - Sunyach (1969)
- La versión Tkachuk en $C_p(X)$
- Extensión Kakol - LP (2007)
- Resultados relacionados

El teorema de De Wilde-Sunyach

Un espacio localmente convexo E que sea

- Baire
- K-analítico

es Fréchet separable.

La versión Tkachuk en $C_p(X)$

De Wilde-Sunyach + Tkachuk:
$C_p(X)$

- Baire
- Con resolución compacta

es Fréchet separable

La versión Tkachuk en $C_p(X)$

De Wilde-Sunyach + Ferrando-Kakol:
$C_p(X)$

- Baire
- Con resolución acotada

es métrico separable

Extensión Kakol - LP (2007)

Un espacio vectorial topológico E

- Baire
- Con resolucion acotada $\{K_\alpha, \alpha \in \mathbb{N}^\mathbb{N}\}$

es metrizable.

Extensión Kakol - LP (2007)

Por la acotación, para cada $\alpha = (n_k)$
y cada entorno V de 0
existe k tal que
$W_k := C_{n_1 \dots n_k} \subset 2^k V$

Extensión Kakol - LP (2007)

Por la condición de Baire existe

- $\alpha = (n_k)$
- $x_k \in E$ y U_k 0-entorno, $k \in \mathbb{N}$

con $x_k + U_k \subset \overline{W_k}$
$(2^{-k} U_k)_k$ es sistema fundametal de 0-entornos.

Extensión Kakol - LP (2007)

- F denso en el espacio métrico E
- $\{K_\alpha, \alpha \in \mathbb{N}^\mathbb{N}\}$ resolución en F de subconjuntos cerrados en E

$E \backslash F$ es de primera categoría de Baire.

Extensión Kakol - LP (2007)

Kakol - LP (2007)

- F evt de Baire
- $\{K_\alpha, \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ resolución en F de subconjuntos rnc

F es separable, metrizable y completo.
Demostración.
F es metrizable, luego angélico con resolución compacta, por lo que es separable.
Si $x \in \widehat{F} \backslash F \Longrightarrow x + F \subset \widehat{F} \backslash F$, absurdo por categorías

Resultados relacionados

(Christensen 1974)
Un grupo topológico E que sea

- Baire
- y analítico

es un espacio Polaco.

Resultados relacionados

(Kakol - LP 2007)
Un espacio localmente convexo E que sea

- Unordered Baire-like
- y quasi (LB)

es un espacio de Fréchet.

Outline

3. Aplicaciones en $C_p(X)$
   - El caso X metrizable y localmente compacto.
   - El caso X grupo topológico localmente compacto

El caso X metrizable y localmente compacto.

- De los resultados anteriores
- y de que $C_p(X)$ sea denso en $\mathbb{R}^X$, que es Baire,

se deduce (Kakol - LP 2007):
Para X metrizable y loc. compacto son equivalentes:

- $C_p(X)$ tiene resolución acotada.
- $C_p(X)$ es analítico
- X es σ-compacto ($\Longleftrightarrow$ $C_p(X)$ Fréchet).

El caso X grupo topológico localmente compacto

(Kakol, L-P, Martín-Peinador y Tarieladze, 2008)
Para un grupo topológico locamente compacto X son equivalentes:

- X es metrizable y σ-compacto ($\iff$ X es analítico())
- $C_p(X)$ es analítico ($\iff$Lindelöf)
- $C_c(X)$ es Fréchet ($\iff$resolución compacta$\iff$ su topología débil es Lindelöf).

Outline

4. Tightness y metrizabilidad.
   - Metrizabilidad en grupos topológicos l.c.
   - Compacidad en grupos topológicos l.c.

Metrizabilidad en grupos topológicos l.c.

Un espacio topológico M tiene tightness numerable (*tn*) si

- $\forall A \subset M$
- y $\forall x \in \overline{A}$,
- $\exists B \subset A$ con $|B| = \aleph_0$ y $x \in \overline{B}$.

Metrizabilidad en grupos topológicos l.c.

(Kakol, L-P, Martín-Peinador y Tarieladze, 2008)
Para un grupo topológico locamente compacto X son equivalentes:

- X es angélico.
- Cualquier subconjunto compacto de X tiene *tn*.
- X es metrizable.
- X tiene *tn*.

Compacidad en grupos topológicos l.c.

De la caracterización anterior se deduce que en un grupo topológico localmente compacto X son equivalentes:

- X es Eberlein compacto (X homeomorfo a un compacto débil de un espacio de Baanch).
- X es Corson compacto (X hom. a un compacto de un Σ-producto de rectas).
- X es Talagrand compacto ($C_p(X)$ es K-analítico).
- X es Gul'ko compacto ($C_p(X)$ es K-Lindelöf-Σ),

siendo X metrizable si verifica una de las cuatro condiciones anteriores.

Outline

5. Dual débil casi Suslin.
   - La clase $\mathfrak{G}$ de elc.
   - Los elc con dual débil casi Suslin.
   - Aplicaciones a espacios $C(X)$

La clase $\mathfrak{G}$ de elc.

Introducida por B. Cascales y J. Orihuela en 1987.
$E \in \mathfrak{G}$ si E' tiene una resolución $\{A_\alpha, \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ tal que:

- $\forall A_\alpha$
- y $\forall B \subset A_\alpha$ con $|B| = \aleph_0$

se tiene que B es equicontinuo.

La clase $\mathfrak{G}$ de elc.

La clase $\mathfrak{G}$ verifica las propiedades (B. Cascales, J. Kakol y S. A. Saxon, 2002):

- K (E *tn* $\Rightarrow (E, \sigma(E, E'))$ *tn*, K por Teorema de Kaplanski, en el caso metrizable).
- V ($(E, \sigma(E, E'))$ *tn* $\Leftrightarrow (E', \sigma(E', E))$ es K-analítico, V por Valdivia, en el caso *DF* sustituyendo *tn* por casitonelado).
- E casitonelado de la clase $\mathfrak{G} \Longrightarrow$ *tn*.

La clase $\mathfrak{G}$ de elc.

Las propiedades anteriores llevaron a Cascales, Kakol y Saxon a preguntar en 2002:

- ¿Existen clases más amplias que $\mathfrak{G}$ con la propiedad K?
- ¿Es casitonelado un espacio *DF* con *tn*? Resuelto afirmtivamente en 2006 por Ferrando, Kakol, L-P y Saxon, lo que probaba que en un espacio *DF* es casitonelado $\iff$ *tn*.

El resultado anterior sugirió el problema de obtener condiciones en $\mathfrak{G}$ para que casitonelado $\iff$ *tn*.

Los elc con dual débil casi Suslin.

La clase de elc con dual débil casi Suslin contiene a $\mathfrak{G}$.
Un elc con dual débil casi Suslin verifica K y V (Ferrando, Kakol, L-P y Saxon, 2008), pues en un elc E cuyo dual débil sea quasi-Suslin son equivalentes las propiedades siguientes:

- $(E, \sigma(E, E'))$ tiene tightness numerable.
- E tiene tightness numerable para alguna topología complatible con el par dual.
- $(E\prime, \sigma(E', E))$ es K-analítico.

Los elc con dual débil casi Suslin.

Equivalencias, válidas en $\mathfrak{G}$, casitonelado $\Longleftrightarrow$ *tn* (Ferrando, Kakol, L-P y Saxon, 2008)

Sea E un elc tal que E' : tiene una resolución quasi-Suslin de conjuntos absolutamente convexos y sus sucesiones fuertemente acotadas tienen puntos adherentes. Son equivalentes las propiedades siguientes:

- $(E, \sigma(E, E'))$ tiene tightness numerable.
- E tiene tightness numerable para alguna topología compatible con el par dual.
- $(E\prime, \sigma(E', E))$ es K-analítico.
- E con la topologia de Mackey tiene tightness numerable.
- E con la topología de Mackey es casitonelado.

Aplicaciones a espacios $C(X)$

(Ferrando, Kakol, L-P y Saxon, 2008)
— En el dual fuerte de un $C_p(X)$ son equivalentes las condiciones:
a) Ser quasi-LB (= tener una resolución formada por discos de Banach)
b) Ser quasi-Suslin.
c) Ser K-analítico.
— En un espacio $C_c(X)$ son equivalentes las condiciones:
a) $C_c(X)$ es un espacio df ($C_c(X)$ tiene sucesión fundamental de acotados y en el dual fuerte las sucesiones fuertemente convergentes a cero son equicontinuas).
b) $C_c(X)$ pertenece a la clase $\mathfrak{G}$ y su dual fuerte es Baire.

Outline

6 Analiticidad en topologías compatibles.

- Analiticidad en duales de $C_p(X)$.
- El caso metrizable localmente convexo.
- El caso metrizable no localmente convexo.
- El problema de los tres espacios.

Analiticidad en duales de $C_p(X)$.

(Kakol, L-P y Sliwa, 2010)

- El dual de Mackey de $C_p(X)$ es analítico sii X es numerable.

Unido al clásico resultado:

- X analítico implica que el dual débil de $C_p(X)$ es analítico

permite afirmar:

- Si X analítico no numerable entonces:

1. El dual débil de $C_p(X)$ es analítico
2. pero el dual de Mackey de $C_p(X)$ no es analítico.

El caso metrizable localmente convexo.

(Kakol, L-P y Sliwa, 2010)

- Un espacio localmente convexo es analítico si y sólo si es quasi-Suslin con la topología débil y es una imagen lineal continua de un espacio vectorial topológico metrizable y separable.
- En particular, cada espacio localmente convexo, metrizable y débilmente analítico es analítico.

El caso metrizable no localmente convexo.

(Kakol, L-P y Sliwa, 2010)

- Existe una clase amplia de espacios no localmente convexos y no analíticos, pero que son metrizables, separables, Baire y tienen topologías débiles que son analíticas.
- Este ejemplo ha permitido demostrar que la analiticidad no verifica en general el problema de los tres espacios.

El problema de los tres espacios.

(Kakol, L-P y Sliwa, 2010)
El ejemplo anterior ha planteado el problema de los tres espacios para analiticidad en evt, encontrando:

- El evt metrizable E es analítico si E contiene un subespacio F localmente convexo, metrizable y analítico tal que el cociente E/F sea analítico.

Para el problema de los tres espacios en resoluciones compactas hemos obtenido:

- Si E es un evt metrizable que contiene un subespacio F lc y completo tal que F y el espacio cociente E/F admiten una resolución compacta, entonces E admite una resolución compacta.

Outline

Referencias

[1] B. Cascales, J. Kakol y S.A Saxon, *Weight of precompact subsets and tightness*, J. Math. Anal. Appl. 269 (2002) 500-518

[2] J.C. Ferrando, J. Kakol, M. López Pellicer y S.A. Saxon, *Tightness and distinguished Fréchet spaces*, J. Math. anal. Appl. **324** (2006) 862–881.

[3] J. Kakol y M. López Pellicer, *Compact coverings for Baire locally convex spaces*. J. Math. Anal. Appl. **332** (2007), 965 – 974.

[4] J. Kakol, M. López Pellicer, E. Martín Peinador y V. Tarieladze, *Lindelöf spaces $C(X)$ over topological groups*, Forum Math. **20** / 2 (2008), 201 – 212.

Referencias

[5] J.C. Ferrando, J. Kakol, M. López Pellicer y S.A. Saxon, *Quasi-Suslin weak dual*, J. Math. anal. Appl. **339** (2008) 1253 – 1263.
[6] J. Kakol, M. López Pellicer y W. Sliwa, *Weakly K-analytic spaces and the three-space property for analyticity*, J. Math. Anal. Appl. **362** (2010) 90-99.
[7] J. Kakol y M. López Pellicer, *On realcompact topological vector spaces*. RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exactas, Fís. Nat. Ser. A Math. **105** (2011), 39 – 70. Survey con diez problemas abiertos.