Una caracterización de la propiedad URED en términos de la convergencia ruda

María del Carmen Listán-García

Universidad de Cádiz
Grupo FQM-257

Jaca, Abril 2011

INTRODUCCIÓN

El concepto de convergencia ruda fue introducido por H. X. Phu, en espacios normados finito-dimensionales y posteriormente el mismo autor también estudió el concepto en el caso infinito-dimensional.

Concretamente, consideramos un "índice de rudeza" $r \geq 0$ y una sucesión acotada $(x_n)_n$ en un espacio normado X. Entonces se dice que $(x_n)_n$ es r-convergente a $y \in X$ si

$$\limsup_n \|x_n - y\| \leq r.$$

En consecuencia, adoptamos la siguiente notación:

$$\lim^r x_n = \{y \in X : \limsup_n \|x_n - y\| \leq r\}.$$

El concepto de convergencia ruda fue introducido por H. X. Phu, en espacios normados finito-dimensionales y posteriormente el mismo autor también estudió el concepto en el caso infinito-dimensional. Concretamente, consideramos un "índice de rudeza" $r \geq 0$ y una sucesión acotada $(x_n)_n$ en un espacio normado X. Entonces se dice que $(x_n)_n$ es r-convergente a $y \in X$ si

$$\limsup_n \|x_n - y\| \leq r.$$

En consecuencia, adoptamos la siguiente notación:

$$\lim{}^r x_n = \{y \in X : \limsup_n \|x_n - y\| \leq r\}.$$

Introducción

El concepto de convergencia ruda fue introducido por H. X. Phu, en espacios normados finito-dimensionales y posteriormente el mismo autor también estudió el concepto en el caso infinito-dimensional.
Concretamente, consideramos un "índice de rudeza" $r \geq 0$ y una sucesión acotada $(x_n)_n$ en un espacio normado X. Entonces se dice que $(x_n)_n$ es r-convergente a $y \in X$ si

$$\limsup_n \|x_n - y\| \leq r.$$

En consecuencia, adoptamos la siguiente notación:

$$\lim{}^r x_n = \{y \in X : \limsup_n \|x_n - y\| \leq r\}.$$

También trabajaremos con la noción de convergencia estadística, introducida primero por Steinhaus e independientemente por Fast.

En primer lugar, sea $A \subset \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Denotamos al cardinal de A por $|A|$ y si $n \in \mathbb{N}$ escribimos $A(n) = \{i \in A : i \leq n\}$.

La densidad de A se define como $d(A) = \lim_n \frac{|A(n)|}{n}$, en el caso en el que este límite exista.

Una sucesión (x_n) en un espacio normado X es estadísticamente convergente a $x \in X$ si para cada $\varepsilon > 0$ el conjunto

$$\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - x\| < \varepsilon\}$$

tiene densidad 1.

También trabajaremos con la noción de convergencia estadística, introducida primero por Steinhaus e independientemente por Fast.

En primer lugar, sea $A \subset \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Denotamos al cardinal de A por $|A|$ y si $n \in \mathbb{N}$ escribimos $A(n) = \{i \in A : i \leq n\}$.

La densidad de A se define como $d(A) = \lim_n \frac{|A(n)|}{n}$, en el caso en el que este límite exista.

Una sucesión (x_n) en un espacio normado X es estadísticamente convergente a $x \in X$ si para cada $\varepsilon > 0$ el conjunto

$$\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - x\| < \varepsilon\}$$

tiene densidad 1.

También trabajaremos con la noción de convergencia estadística, introducida primero por Steinhaus e independientemente por Fast.

En primer lugar, sea $A \subset \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Denotamos al cardinal de A por $|A|$ y si $n \in \mathbb{N}$ escribimos $A(n) = \{i \in A : i \leq n\}$.

La densidad de A se define como $d(A) = \lim_n \frac{|A(n)|}{n}$, en el caso en el que este límite exista.

Una sucesión (x_n) en un espacio normado X es estadísticamente convergente a $x \in X$ si para cada $\varepsilon > 0$ el conjunto

$$\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - x\| < \varepsilon\}$$

tiene densidad 1.

También trabajaremos con la noción de convergencia estadística, introducida primero por Steinhaus e independientemente por Fast.
En primer lugar, sea $A \subset \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Denotamos al cardinal de A por $|A|$ y si $n \in \mathbb{N}$ escribimos $A(n) = \{i \in A : i \leq n\}$.
La densidad de A se define como $d(A) = \lim_n \frac{|A(n)|}{n}$, en el caso en el que este límite exista.
Una sucesión (x_n) en un espacio normado X es estadísticamente convergente a $x \in X$ si para cada $\varepsilon > 0$ el conjunto

$$\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - x\| < \varepsilon\}$$

tiene densidad 1.

Ahora veremos la versión estadística de la convergencia ruda, este concepto fue dado por S. Aytar, como sigue, dado $r \geq 0$ y una sucesión $(x_n)_n$ en un espacio normado X, tenemos el siguiente conjunto,

$$\mathrm{stlim}^r\, x_n = \{y \in X : \mathrm{stlim\,sup}_n \|x_n - y\| \leq r\}$$

donde,

$$\mathrm{stlim\,sup}_n\, \alpha_n = \inf\{\sup\{\alpha_n : n \in A\} : A \subseteq \mathbb{N}, d(A) = 1\}.$$

Tenemos un especial interés en el ínfimo de los índices de rudeza, en otras palabras,

$$\bar{r} = \inf\{r > 0 : \mathrm{stlim}^r\, x_n \neq \emptyset\}$$

La “versión no estadística” de $\bar{r}$ fue estudiado profundamente por T. C. Lim en un contexto más amplio, con diferentes aplicaciones en la Teoría del Punto Fijo. Sin embargo, la versión estadística de $\bar{r}$ no puede ser obtenida del trabajo de Lim como caso particular.

Ahora veremos la versión estadística de la convergencia ruda, este concepto fue dado por S. Aytar, como sigue, dado $r \geq 0$ y una sucesión $(x_n)_n$ en un espacio normado X, tenemos el siguiente conjunto,

$$\operatorname{stlim}^r x_n = \{y \in X : \operatorname{stlim\,sup}_n \|x_n - y\| \leq r\}$$

donde,

$$\operatorname{stlim\,sup}_n \alpha_n = \operatorname{ínf}\{\sup\{\alpha_n : n \in A\} : A \subseteq \mathbb{N}, d(A) = 1\}.$$

Tenemos un especial interés en el ínfimo de los índices de rudeza, en otras palabras,

$$\bar{r} = \operatorname{ínf}\{r > 0 : \operatorname{stlim}^r x_n \neq \varnothing\}$$

La "versión no estadística" de $\bar{r}$ fue estudiado profundamente por T. C. Lim en un contexto más amplio, con diferentes aplicaciones en la Teoría del Punto Fijo. Sin embargo, la versión estadística de $\bar{r}$ no puede ser obtenida del trabajo de Lim como caso particular.

Ahora veremos la versión estadística de la convergencia ruda, este concepto fue dado por S. Aytar, como sigue, dado $r \geq 0$ y una sucesión $(x_n)_n$ en un espacio normado X, tenemos el siguiente conjunto,

$$\operatorname{stlim}^r x_n = \{y \in X : \operatorname{stlim\,sup}_n \|x_n - y\| \leq r\}$$

donde,

$$\operatorname{stlim\,sup}_n \alpha_n = \operatorname{ínf}\{\sup\{\alpha_n : n \in A\} : A \subseteq \mathbb{N}, d(A) = 1\}.$$

Tenemos un especial interés en el ínfimo de los índices de rudeza, en otras palabras,

$$\bar{r} = \operatorname{ínf}\{r > 0 : \operatorname{stlim}^r x_n \neq \varnothing\}$$

La "versión no estadística" de $\bar{r}$ fue estudiado profundamente por T. C. Lim en un contexto más amplio, con diferentes aplicaciones en la Teoría del Punto Fijo. Sin embargo, la versión estadística de $\bar{r}$ no puede ser obtenida del trabajo de Lim como caso particular.

Ahora veremos la versión estadística de la convergencia ruda, este concepto fue dado por S. Aytar, como sigue, dado $r \geq 0$ y una sucesión $(x_n)_n$ en un espacio normado X, tenemos el siguiente conjunto,

$$\text{stlim}^r\, x_n = \{y \in X : \text{stlim}\sup_n \|x_n - y\| \leq r\}$$

donde,

$$\text{stlim}\sup_n \alpha_n = \text{ínf}\{\sup\{\alpha_n : n \in A\} : A \subseteq \mathbb{N}, d(A) = 1\}.$$

Tenemos un especial interés en el ínfimo de los índices de rudeza, en otras palabras,

$$\bar{r} = \text{ínf}\{r > 0 : \text{stlim}^r\, x_n \neq \varnothing\}$$

La “versión no estadística” de $\bar{r}$ fue estudiado profundamente por T. C. Lim en un contexto más amplio, con diferentes aplicaciones en la Teoría del Punto Fijo. Sin embargo, la versión estadística de $\bar{r}$ no puede ser obtenida del trabajo de Lim como caso particular.

Contenido

Contenido

Definición

Sea X un espacio normado.

- Dado $z \in S_X$, se dice que X es **uniformemente redondo en la dirección de** z (UR_z) si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in S_X$, $x - y \in \text{span}(\{z\})$ y $\|x - y\| \geq \varepsilon$ entonces $\frac{1}{2}\|x + y\| < 1 - \delta$.
- X es **uniformemente redondo en cada dirección** ($URED$) si es UR_z para cada $z \in S_X$.

Definición

Sea X un espacio normado y $A \subseteq X$. Se dice que A es **estrictamente convexo** si para cada $x, y \in A$ con $x \neq y$ tenemos

$$\frac{x + y}{2} \in \text{int}(A).$$

Definición

Sea X un espacio normado.

- Dado $z \in S_X$, se dice que X es **uniformemente redondo en la dirección de** z (UR_z) si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in S_X$, $x - y \in \operatorname{span}(\{z\})$ y $\|x - y\| \geq \varepsilon$ entonces $\frac{1}{2}\|x + y\| < 1 - \delta$.
- X es **uniformemente redondo en cada dirección** ($URED$) si es UR_z para cada $z \in S_X$.

Definición

Sea X un espacio normado y $A \subseteq X$. Se dice que A es **estrictamente convexo** si para cada $x, y \in A$ con $x \neq y$ tenemos

$$\frac{x + y}{2} \in \operatorname{int}(A).$$

Definición

Sea X un espacio normado.

- Dado $z \in S_X$, se dice que X es **uniformemente redondo en la dirección de** z (UR_z) si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in S_X$, $x - y \in \operatorname{span}(\{z\})$ y $\|x - y\| \geq \varepsilon$ entonces $\frac{1}{2}\|x + y\| < 1 - \delta$.
- X es **uniformemente redondo en cada dirección** ($URED$) si es UR_z para cada $z \in S_X$.

Definición

Sea X un espacio normado y $A \subseteq X$. Se dice que A es **estrictamente convexo** si para cada $x, y \in A$ con $x \neq y$ tenemos

$$\frac{x + y}{2} \in \operatorname{int}(A).$$

Contenido

Proposición

Si X es UR en alguna dirección z e $y \in \operatorname{int}(\operatorname{stlim}^r x_n)$ entonces existe $r' \in [0, r)$ tal que $y \in \operatorname{stlim}^{r'} x_n$.

Proposición

Si $(x_n)_n$ está contenido en un conjunto precompacto e $y + \sigma B_X \subset \operatorname{stlim}^r x_n$ entonces $r \geq \sigma$ e $y \in \operatorname{stlim}^{r-\sigma} x_n$.

Proposición

Sea $(x_n)_n$ una sucesión acotada en X. Entonces:

1. *Si X es reflexivo entonces $\operatorname{stlim}^{\bar{r}} x_n$ tiene al menos un punto.*
2. *Si X es URED entonces $\operatorname{stlim}^{\bar{r}} x_n$ tiene a lo sumo un punto.*
3. *Si $\operatorname{stlim}^r x_n$ es un conjunto unitario entonces $r = \bar{r}$. El recíproco es cierto si X es URED y reflexivo.*

Proposición

Si X es UR en alguna dirección z e $y \in \operatorname{int}(\operatorname{stlim}^r x_n)$ entonces existe $r' \in [0, r)$ tal que $y \in \operatorname{stlim}^{r'} x_n$.

Proposición

Si $(x_n)_n$ está contenido en un conjunto precompacto e $y + \sigma B_X \subset \operatorname{stlim}^r x_n$ entonces $r \geq \sigma$ e $y \in \operatorname{stlim}^{r-\sigma} x_n$.

Proposición

Sea $(x_n)_n$ una sucesión acotada en X. Entonces:

1. *Si X es reflexivo entonces $\operatorname{stlim}^{\bar{r}} x_n$ tiene al menos un punto.*
2. *Si X es URED entonces $\operatorname{stlim}^{\bar{r}} x_n$ tiene a lo sumo un punto.*
3. *Si $\operatorname{stlim}^r x_n$ es un conjunto unitario entonces $r = \bar{r}$. El recíproco es cierto si X es URED y reflexivo.*

Proposición

Si X es UR en alguna dirección z e $y \in \operatorname{int}(\operatorname{stlim}^r x_n)$ entonces existe $r' \in [0, r)$ tal que $y \in \operatorname{stlim}^{r'} x_n$.

Proposición

Si $(x_n)_n$ está contenido en un conjunto precompacto e $y + \sigma B_X \subset \operatorname{stlim}^r x_n$ entonces $r \geq \sigma$ e $y \in \operatorname{stlim}^{r-\sigma} x_n$.

Proposición

Sea $(x_n)_n$ una sucesión acotada en X. Entonces:

1. *Si X es reflexivo entonces $\operatorname{stlim}^{\bar{r}} x_n$ tiene al menos un punto.*
2. *Si X es URED entonces $\operatorname{stlim}^{\bar{r}} x_n$ tiene a lo sumo un punto.*
3. *Si $\operatorname{stlim}^r x_n$ es un conjunto unitario entonces $r = \bar{r}$. El recíproco es cierto si X es URED y reflexivo.*

Proposición

Si X es UR en alguna dirección z e $y \in \operatorname{int}(\operatorname{stlim}^r x_n)$ entonces existe $r' \in [0, r)$ tal que $y \in \operatorname{stlim}^{r'} x_n$.

Proposición

Si $(x_n)_n$ está contenido en un conjunto precompacto e $y + \sigma B_X \subset \operatorname{stlim}^r x_n$ entonces $r \geq \sigma$ e $y \in \operatorname{stlim}^{r-\sigma} x_n$.

Proposición

Sea $(x_n)_n$ una sucesión acotada en X. Entonces:

1. *Si X es reflexivo entonces $\operatorname{stlim}^{\bar{r}} x_n$ tiene al menos un punto.*
2. *Si X es URED entonces $\operatorname{stlim}^{\bar{r}} x_n$ tiene a lo sumo un punto.*
3. *Si $\operatorname{stlim}^r x_n$ es un conjunto unitario entonces $r = \bar{r}$. El recíproco es cierto si X es URED y reflexivo.*

Proposición

Si X es UR en alguna dirección z e $y \in \operatorname{int}(\operatorname{stlim}^r x_n)$ entonces existe $r' \in [0, r)$ tal que $y \in \operatorname{stlim}^{r'} x_n$.

Proposición

Si $(x_n)_n$ está contenido en un conjunto precompacto e $y + \sigma B_X \subset \operatorname{stlim}^r x_n$ entonces $r \geq \sigma$ e $y \in \operatorname{stlim}^{r-\sigma} x_n$.

Proposición

Sea $(x_n)_n$ una sucesión acotada en X. Entonces:

1. *Si X es reflexivo entonces $\operatorname{stlim}^{\bar{r}} x_n$ tiene al menos un punto.*
2. *Si X es URED entonces $\operatorname{stlim}^{\bar{r}} x_n$ tiene a lo sumo un punto.*
3. *Si $\operatorname{stlim}^r x_n$ es un conjunto unitario entonces $r = \bar{r}$. El recíproco es cierto si X es URED y reflexivo.*

PROPOSICIÓN

Si X es UR en alguna dirección z e $y \in \operatorname{int}(\operatorname{stlim}^r x_n)$ entonces existe $r' \in [0, r)$ tal que $y \in \operatorname{stlim}^{r'} x_n$.

PROPOSICIÓN

Si $(x_n)_n$ está contenido en un conjunto precompacto e $y + \sigma B_X \subset \operatorname{stlim}^r x_n$ entonces $r \geq \sigma$ e $y \in \operatorname{stlim}^{r-\sigma} x_n$.

PROPOSICIÓN

Sea $(x_n)_n$ una sucesión acotada en X. Entonces:

1. *Si X es reflexivo entonces $\operatorname{stlim}^{\bar{r}} x_n$ tiene al menos un punto.*
2. *Si X es URED entonces $\operatorname{stlim}^{\bar{r}} x_n$ tiene a lo sumo un punto.*
3. *Si $\operatorname{stlim}^r x_n$ es un conjunto unitario entonces $r = \bar{r}$. El recíproco es cierto si X es URED y reflexivo.*

Contenido

Garkavi dio la siguiente caracterización de la propiedad *URED*,

Lema

Sea X un espacio de Banach, X es URED si y sólo si para cualquier $z \in S_X$, y $(x_n)_n, (y_n)_n \subseteq X$ satisfaciendo

$$\|x_n\| \to 1, \|y_n\| \to 1, x_n - y_n \in span\{z\} \text{ y}$$

$$\left\|\frac{1}{2}(x_n + y_n)\right\| \to 1$$

entonces $x_n - y_n \to 0$.

Lema

Sea X un espacio normado, $r > 0$, $x \in X$ y $(x_n)_n$ una sucesión acotada en X.

- *Si* $\limsup_n \|x_n - x\| < r$ *entonces* $x \in \operatorname{int}(\lim^r x_n)$.
- *Si* $\operatorname{stlim}\sup_n \|x_n - x\| < r$ *entonces* $x \in \operatorname{int}(\operatorname{stlim}^r x_n)$.

Garkavi dio la siguiente caracterización de la propiedad *URED*,

LEMA

Sea X un espacio de Banach, X es URED si y sólo si para cualquier $z \in S_X$, y $(x_n)_n, (y_n)_n \subseteq X$ satisfaciendo

$$\|x_n\| \to 1, \|y_n\| \to 1, x_n - y_n \in span\{z\} \text{ y}$$

$$\left\|\frac{1}{2}(x_n + y_n)\right\| \to 1$$

entonces $x_n - y_n \to 0$.

LEMA

Sea X un espacio normado, $r > 0$, $x \in X$ y $(x_n)_n$ una sucesión acotada en X.

- *Si* $\limsup_n \|x_n - x\| < r$ *entonces* $x \in \operatorname{int}(\lim^r x_n)$.
- *Si* $\operatorname{stlim}\sup_n \|x_n - x\| < r$ *entonces* $x \in \operatorname{int}(\operatorname{stlim}^r x_n)$.

Garkavi dio la siguiente caracterización de la propiedad *URED*,

Lema

Sea X un espacio de Banach, X es URED si y sólo si para cualquier $z \in S_X$, y $(x_n)_n, (y_n)_n \subseteq X$ satisfaciendo

$$\|x_n\| \to 1, \|y_n\| \to 1, x_n - y_n \in span\{z\} \text{ y}$$

$$\left\|\frac{1}{2}(x_n + y_n)\right\| \to 1$$

entonces $x_n - y_n \to 0$.

Lema

Sea X un espacio normado, $r > 0$, $x \in X$ y $(x_n)_n$ una sucesión acotada en X.

- *Si* $\limsup_n \|x_n - x\| < r$ *entonces* $x \in \operatorname{int}(\lim^r x_n)$.
- *Si* $\operatorname{stlim}\sup_n \|x_n - x\| < r$ *entonces* $x \in \operatorname{int}(\operatorname{stlim}^r x_n)$.

Garkavi dio la siguiente caracterización de la propiedad *URED*,

Lema

Sea X un espacio de Banach, X es URED si y sólo si para cualquier $z \in S_X$, y $(x_n)_n, (y_n)_n \subseteq X$ satisfaciendo

$$\|x_n\| \to 1, \|y_n\| \to 1, x_n - y_n \in span\{z\} \text{ y}$$

$$\left\|\frac{1}{2}(x_n + y_n)\right\| \to 1$$

entonces $x_n - y_n \to 0$.

Lema

Sea X un espacio normado, $r > 0$, $x \in X$ y $(x_n)_n$ una sucesión acotada en X.

- *Si* $\limsup_n \|x_n - x\| < r$ *entonces* $x \in \operatorname{int}(\lim^r x_n)$.
- *Si* $\operatorname{stlim}\sup_n \|x_n - x\| < r$ *entonces* $x \in \operatorname{int}(\operatorname{stlim}^r x_n)$.

Garkavi dio la siguiente caracterización de la propiedad *URED*,

Lema

Sea X un espacio de Banach, X es URED si y sólo si para cualquier $z \in S_X$, y $(x_n)_n, (y_n)_n \subseteq X$ satisfaciendo

$$\|x_n\| \to 1, \|y_n\| \to 1, x_n - y_n \in span\{z\} \text{ y}$$

$$\left\|\frac{1}{2}(x_n + y_n)\right\| \to 1$$

entonces $x_n - y_n \to 0$.

Lema

Sea X un espacio normado, $r > 0$, $x \in X$ y $(x_n)_n$ una sucesión acotada en X.

- *Si* $\limsup_n \|x_n - x\| < r$ *entonces* $x \in \mathrm{int}(\lim^r x_n)$.
- *Si* $\mathrm{stlim\,sup}_n \|x_n - x\| < r$ *entonces* $x \in \mathrm{int}(\mathrm{stlim}^r x_n)$.

La caracterización

Teorema

Sea X un espacio normado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *X es URED.*
2. *Para cada sucesión acotada $(x_n)_n \subseteq X$ y cada $r \geq 0$ el conjunto $\lim^r x_n$ es estrictamente convexo.*
3. *Para cada sucesión acotada $(x_n)_n \subseteq X$ y cada $r \geq 0$ el conjunto $\operatorname{stlim}^r x_n$ es estrictamente convexo.*
4. *Para cada sucesión acotada $(x_n)_n \subseteq X$ existe $r_0 > 0$ tal que el conjunto $\lim^{r_0} x_n$ es estrictamente convexo.*
5. *Para cada sucesión acotada $(x_n)_n \subseteq X$ existe $r_0 > 0$ tal que el conjunto $\operatorname{stlim}^{r_0} x_n$ es estrictamente convexo.*

LA CARACTERIZACIÓN

TEOREMA

Sea X un espacio normado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *X es URED.*
2. *Para cada sucesión acotada $(x_n)_n \subseteq X$ y cada $r \geq 0$ el conjunto $\lim^r x_n$ es estrictamente convexo.*
3. *Para cada sucesión acotada $(x_n)_n \subseteq X$ y cada $r \geq 0$ el conjunto $\operatorname{stlim}^r x_n$ es estrictamente convexo.*
4. *Para cada sucesión acotada $(x_n)_n \subseteq X$ existe $r_0 > 0$ tal que el conjunto $\lim^{r_0} x_n$ es estrictamente convexo.*
5. *Para cada sucesión acotada $(x_n)_n \subseteq X$ existe $r_0 > 0$ tal que el conjunto $\operatorname{stlim}^{r_0} x_n$ es estrictamente convexo.*

La caracterización

Teorema

Sea X un espacio normado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *X es URED.*
2. *Para cada sucesión acotada $(x_n)_n \subseteq X$ y cada $r \geq 0$ el conjunto $\lim^r x_n$ es estrictamente convexo.*
3. *Para cada sucesión acotada $(x_n)_n \subseteq X$ y cada $r \geq 0$ el conjunto $\operatorname{stlim}^r x_n$ es estrictamente convexo.*
4. *Para cada sucesión acotada $(x_n)_n \subseteq X$ existe $r_0 > 0$ tal que el conjunto $\lim^{r_0} x_n$ es estrictamente convexo.*
5. *Para cada sucesión acotada $(x_n)_n \subseteq X$ existe $r_0 > 0$ tal que el conjunto $\operatorname{stlim}^{r_0} x_n$ es estrictamente convexo.*

La caracterización

Teorema

Sea X un espacio normado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *X es URED.*
2. *Para cada sucesión acotada $(x_n)_n \subseteq X$ y cada $r \geq 0$ el conjunto $\lim^r x_n$ es estrictamente convexo.*
3. *Para cada sucesión acotada $(x_n)_n \subseteq X$ y cada $r \geq 0$ el conjunto $\operatorname{stlim}^r x_n$ es estrictamente convexo.*
4. *Para cada sucesión acotada $(x_n)_n \subseteq X$ existe $r_0 > 0$ tal que el conjunto $\lim^{r_0} x_n$ es estrictamente convexo.*
5. *Para cada sucesión acotada $(x_n)_n \subseteq X$ existe $r_0 > 0$ tal que el conjunto $\operatorname{stlim}^{r_0} x_n$ es estrictamente convexo.*

La caracterización

Teorema

Sea X un espacio normado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *X es URED.*
2. *Para cada sucesión acotada $(x_n)_n \subseteq X$ y cada $r \geq 0$ el conjunto $\lim^r x_n$ es estrictamente convexo.*
3. *Para cada sucesión acotada $(x_n)_n \subseteq X$ y cada $r \geq 0$ el conjunto $\operatorname{stlim}^r x_n$ es estrictamente convexo.*
4. *Para cada sucesión acotada $(x_n)_n \subseteq X$ existe $r_0 > 0$ tal que el conjunto $\lim^{r_0} x_n$ es estrictamente convexo.*
5. *Para cada sucesión acotada $(x_n)_n \subseteq X$ existe $r_0 > 0$ tal que el conjunto $\operatorname{stlim}^{r_0} x_n$ es estrictamente convexo.*

La caracterización

Teorema

Sea X un espacio normado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *X es URED.*
2. *Para cada sucesión acotada $(x_n)_n \subseteq X$ y cada $r \geq 0$ el conjunto $\lim^r x_n$ es estrictamente convexo.*
3. *Para cada sucesión acotada $(x_n)_n \subseteq X$ y cada $r \geq 0$ el conjunto $\operatorname{stlim}^r x_n$ es estrictamente convexo.*
4. *Para cada sucesión acotada $(x_n)_n \subseteq X$ existe $r_0 > 0$ tal que el conjunto $\lim^{r_0} x_n$ es estrictamente convexo.*
5. *Para cada sucesión acotada $(x_n)_n \subseteq X$ existe $r_0 > 0$ tal que el conjunto $\operatorname{stlim}^{r_0} x_n$ es estrictamente convexo.*

DEMOSTRACIÓN

(1) $\Rightarrow$ (3).

Asumimos que existe $r \geq 0$ y una sucesión $(x_n)_n \subseteq X$ tal que $\lim^r x_n$ no es estrictamente convexo. Entonces debe ser $r > 0$ y usando el lema 2, existe $x, y \in X$ con $x \neq y$ y

$$\operatorname{stlim\,sup}_n \|x_n - x\| \leq r,$$

$$\operatorname{stlim\,sup}_n \|x_n - y\| \leq r,$$

$$\operatorname{stlim\,sup}_n \left\| x_n - \frac{x+y}{2} \right\| = r,$$

así, existe A_1, A_2 and $A_3 \subseteq \mathbb{N}$, con densidad 1, tal que

$$\limsup_{n \in A_1} \|x_n - x\| \leq r,$$

$$\limsup_{n \in A_2} \|x_n - y\| \leq r,$$

$$\limsup_{n \in A_3} \left\| x_n - \frac{x+y}{2} \right\| = r.$$

DEMOSTRACIÓN

(1) $\Rightarrow$ (3).
Asumimos que existe $r \geq 0$ y una sucesión $(x_n)_n \subseteq X$ tal que $\lim^r x_n$ no es estrictamente convexo. Entonces debe ser $r > 0$ y usando el lema 2, existe $x, y \in X$ con $x \neq y$ y

$$\operatorname{stlim}\sup_n \|x_n - x\| \leq r,$$

$$\operatorname{stlim}\sup_n \|x_n - y\| \leq r,$$

$$\operatorname{stlim}\sup_n \left\| x_n - \frac{x+y}{2} \right\| = r,$$

así, existe A_1, A_2 and $A_3 \subseteq \mathbb{N}$, con densidad 1, tal que

$$\limsup_{n \in A_1} \|x_n - x\| \leq r,$$

$$\limsup_{n \in A_2} \|x_n - y\| \leq r,$$

$$\limsup_{n \in A_3} \left\| x_n - \frac{x+y}{2} \right\| = r.$$

DEMOSTRACIÓN

$(1) \Rightarrow (3)$.
Asumimos que existe $r \geq 0$ y una sucesión $(x_n)_n \subseteq X$ tal que $\lim^r x_n$ no es estrictamente convexo. Entonces debe ser $r > 0$ y usando el lema 2, existe $x, y \in X$ con $x \neq y$ y

$$\operatorname{stlim\,sup}_n \|x_n - x\| \leq r,$$

$$\operatorname{stlim\,sup}_n \|x_n - y\| \leq r,$$

$$\operatorname{stlim\,sup}_n \left\|x_n - \frac{x+y}{2}\right\| = r,$$

así, existe A_1, A_2 and $A_3 \subseteq \mathbb{N}$, con densidad 1, tal que

$$\limsup_{n \in A_1} \|x_n - x\| \leq r,$$

$$\limsup_{n \in A_2} \|x_n - y\| \leq r,$$

$$\limsup_{n \in A_3} \left\|x_n - \frac{x+y}{2}\right\| = r.$$

DEMOSTRACIÓN

$(1) \Rightarrow (3)$.
Asumimos que existe $r \geq 0$ y una sucesión $(x_n)_n \subseteq X$ tal que $\lim^r x_n$ no es estrictamente convexo. Entonces debe ser $r > 0$ y usando el lema 2, existe $x, y \in X$ con $x \neq y$ y

$$\operatorname{stlim\,sup}_n \|x_n - x\| \leq r,$$

$$\operatorname{stlim\,sup}_n \|x_n - y\| \leq r,$$

$$\operatorname{stlim\,sup}_n \left\| x_n - \frac{x+y}{2} \right\| = r,$$

así, existe A_1, A_2 and $A_3 \subseteq \mathbb{N}$, con densidad 1, tal que

$$\limsup_{n \in A_1} \|x_n - x\| \leq r,$$

$$\limsup_{n \in A_2} \|x_n - y\| \leq r,$$

$$\limsup_{n \in A_3} \left\| x_n - \frac{x+y}{2} \right\| = r.$$

Consideramos $A = A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3$ y usando la desigualdad triangular deducimos que,

$$\limsup_{n\in A}\|x_n - x\| = \limsup_{n\in A}\|x_n - y\| =$$

$$= \limsup_{n\in A}\left\|x_n - \frac{x+y}{2}\right\| = r.$$

De este modo, dividiendo por r y tomando las subsucesiones apropiadas, podemos asumir que

$$\lim_n \|x_n - x\| = 1, \lim_n \|x_n - y\| = 1 \text{ y}$$

$$\lim_n \left\|x_n - \frac{x+y}{2}\right\| = 1,$$

con $n \in A$.

Tomamos $z = \frac{x-y}{\|x-y\|} \in S_X$, sean $x'_n = x_n - x$ y $y'_n = x_n - y$, tenemos $\|x'_n\| \to 1$, $\|y'_n\| \to 1$ y $\|\frac{1}{2}(x'_n + y'_n)\| = \|\frac{1}{2}(x_n - x) + (x_n - y))\| = \|x_n - \frac{x+y}{2}\| \to 1$ y $x'_n - y'_n = y - x \in \text{span}(\{z\})$, el cual no es convergente a 0.

Consideramos $A = A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3$ y usando la desigualdad triangular deducimos que,

$$\limsup_{n\in A}\|x_n - x\| = \limsup_{n\in A}\|x_n - y\| =$$

$$= \limsup_{n\in A}\left\|x_n - \frac{x+y}{2}\right\| = r.$$

De este modo, dividiendo por r y tomando las subsucesiones apropiadas, podemos asumir que

$$\lim_n \|x_n - x\| = 1, \lim_n \|x_n - y\| = 1 \text{ y}$$

$$\lim_n \left\|x_n - \frac{x+y}{2}\right\| = 1,$$

con $n \in A$.
Tomamos $z = \frac{x-y}{\|x-y\|} \in S_X$, sean $x'_n = x_n - x$ y $y'_n = x_n - y$, tenemos $\|x'_n\| \to 1$, $\|y'_n\| \to 1$ y $\|\frac{1}{2}(x'_n + y'_n)\| = \|\frac{1}{2}(x_n - x) + (x_n - y))\| = \|x_n - \frac{x+y}{2}\| \to 1$ y $x'_n - y'_n = y - x \in \text{span}(\{z\})$, el cual no es convergente a 0.

Consideramos $A = A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3$ y usando la desigualdad triangular deducimos que,

$$\limsup_{n\in A}\|x_n - x\| = \limsup_{n\in A}\|x_n - y\| =$$

$$= \limsup_{n\in A}\left\|x_n - \frac{x+y}{2}\right\| = r.$$

De este modo, dividiendo por r y tomando las subsucesiones apropiadas, podemos asumir que

$$\lim_n \|x_n - x\| = 1, \lim_n \|x_n - y\| = 1 \text{ y}$$

$$\lim_n \left\|x_n - \frac{x+y}{2}\right\| = 1,$$

con $n \in A$.
Tomamos $z = \frac{x-y}{\|x-y\|} \in S_X$, sean $x_n' = x_n - x$ y $y_n' = x_n - y$, tenemos $\|x_n'\| \to 1$, $\|y_n'\| \to 1$ y $\|\frac{1}{2}(x_n' + y_n')\| = \|\frac{1}{2}(x_n - x) + (x_n - y))\| = \|x_n - \frac{x+y}{2}\| \to 1$ y $x_n' - y_n' = y - x \in \text{span}(\{z\})$, el cual no es convergente a 0.

Consideramos $A = A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3$ y usando la desigualdad triangular deducimos que,

$$\limsup_{n\in A}\|x_n - x\| = \limsup_{n\in A}\|x_n - y\| =$$

$$= \limsup_{n\in A}\left\|x_n - \frac{x+y}{2}\right\| = r.$$

De este modo, dividiendo por r y tomando las subsucesiones apropiadas, podemos asumir que

$$\lim_n \|x_n - x\| = 1, \lim_n \|x_n - y\| = 1 \text{ y}$$

$$\lim_n \left\|x_n - \frac{x+y}{2}\right\| = 1,$$

con $n \in A$.

Tomamos $z = \frac{x-y}{\|x-y\|} \in S_X$, sean $x'_n = x_n - x$ y $y'_n = x_n - y$, tenemos $\|x'_n\| \to 1$, $\|y'_n\| \to 1$ y $\|\frac{1}{2}(x'_n + y'_n)\| = \|\frac{1}{2}(x_n - x) + (x_n - y))\| = \|x_n - \frac{x+y}{2}\| \to 1$ y $x'_n - y'_n = y - x \in \mathrm{span}(\{z\})$, el cual no es convergente a 0.

Consideramos $A = A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3$ y usando la desigualdad triangular deducimos que,

$$\limsup_{n\in A}\|x_n - x\| = \limsup_{n\in A}\|x_n - y\| =$$

$$= \limsup_{n\in A}\left\|x_n - \frac{x+y}{2}\right\| = r.$$

De este modo, dividiendo por r y tomando las subsucesiones apropiadas, podemos asumir que

$$\lim_n \|x_n - x\| = 1, \lim_n \|x_n - y\| = 1 \text{ y}$$

$$\lim_n \left\|x_n - \frac{x+y}{2}\right\| = 1,$$

con $n \in A$.
Tomamos $z = \frac{x-y}{\|x-y\|} \in S_X$, sean $x'_n = x_n - x$ y $y'_n = x_n - y$, tenemos $\|x'_n\| \to 1$, $\|y'_n\| \to 1$ y $\|\frac{1}{2}(x'_n + y'_n)\| = \|\frac{1}{2}(x_n - x) + (x_n - y))\| = \|x_n - \frac{x+y}{2}\| \to 1$ y $x'_n - y'_n = y - x \in \text{span}(\{z\})$, el cual no es convergente a 0.

Consideramos $A = A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3$ y usando la desigualdad triangular deducimos que,

$$\limsup_{n\in A}\|x_n - x\| = \limsup_{n\in A}\|x_n - y\| =$$

$$= \limsup_{n\in A}\left\|x_n - \frac{x+y}{2}\right\| = r.$$

De este modo, dividiendo por r y tomando las subsucesiones apropiadas, podemos asumir que

$$\lim_n \|x_n - x\| = 1, \lim_n \|x_n - y\| = 1 \text{ y}$$

$$\lim_n \left\|x_n - \frac{x+y}{2}\right\| = 1,$$

con $n \in A$.
Tomamos $z = \frac{x-y}{\|x-y\|} \in S_X$, sean $x_n' = x_n - x$ y $y_n' = x_n - y$, tenemos $\|x_n'\| \to 1$, $\|y_n'\| \to 1$ y $\|\frac{1}{2}(x_n' + y_n')\| = \|\frac{1}{2}(x_n - x) + (x_n - y))\| = \|x_n - \frac{x+y}{2}\| \to 1$ y $x_n' - y_n' = y - x \in \text{span}(\{z\})$, el cual no es convergente a 0.

$(2) \Rightarrow (1)$.
Si X no es *URED* entonces existe $z \in S_X$ and $(x_n)_n, (y_n)_n \subseteq X$ con $\|x_n\| \to 1$, $\|y_n\| \to 1$, $\|x_n + y_n\| \to 2$ y $x_n - y_n = s_n z$, con $s_n \to s > 0$.
Sea $x = 0$ e $y = -sz$, tenemos

$$\lim_n \|y_n - 0\| = 1$$

$$\lim_n \|y_n - (-sz)\| = 1$$

y

$$\lim_n \left\|y_n + \frac{sz}{2}\right\| = \lim_n \left\|y_n + \frac{s_n z}{2}\right\| = \lim_n \left\|\frac{x_n + y_n}{2}\right\| = 1.$$

Así el conjunto $\lim^1 y_n$ no es estrictamente convexo.

$(2) \Rightarrow (1)$.
Si X no es *URED* entonces existe $z \in S_X$ and $(x_n)_n, (y_n)_n \subseteq X$ con $\|x_n\| \to 1$, $\|y_n\| \to 1$, $\|x_n + y_n\| \to 2$ y $x_n - y_n = s_n z$, con $s_n \to s > 0$.
Sea $x = 0$ e $y = -sz$, tenemos

$$\lim_n \|y_n - 0\| = 1$$

$$\lim_n \|y_n - (-sz)\| = 1$$

y

$$\lim_n \left\| y_n + \frac{sz}{2} \right\| = \lim_n \left\| y_n + \frac{s_n z}{2} \right\| = \lim_n \left\| \frac{x_n + y_n}{2} \right\| = 1.$$

Así el conjunto $\lim^1 y_n$ no es estrictamente convexo.

$(2) \Rightarrow (1)$.
Si X no es *URED* entonces existe $z \in S_X$ and $(x_n)_n, (y_n)_n \subseteq X$ con $\|x_n\| \to 1$, $\|y_n\| \to 1$, $\|x_n + y_n\| \to 2$ y $x_n - y_n = s_n z$, con $s_n \to s > 0$.
Sea $x = 0$ e $y = -sz$, tenemos

$$\lim_n \|y_n - 0\| = 1$$

$$\lim_n \|y_n - (-sz)\| = 1$$

y

$$\lim_n \left\|y_n + \frac{sz}{2}\right\| = \lim_n \left\|y_n + \frac{s_n z}{2}\right\| = \lim_n \left\|\frac{x_n + y_n}{2}\right\| = 1.$$

Así el conjunto $\lim^1 y_n$ no es estrictamente convexo.

(2) $\Rightarrow$ (1).
Si X no es *URED* entonces existe $z \in S_X$ and $(x_n)_n,\ (y_n)_n \subseteq X$ con $\|x_n\| \to 1$, $\|y_n\| \to 1$, $\|x_n + y_n\| \to 2$ y $x_n - y_n = s_n z$, con $s_n \to s > 0$.
Sea $x = 0$ e $y = -sz$, tenemos

$$\lim_n \|y_n - 0\| = 1$$

$$\lim_n \|y_n - (-sz)\| = 1$$

y

$$\lim_n \left\| y_n + \frac{sz}{2} \right\| = \lim_n \left\| y_n + \frac{s_n z}{2} \right\| = \lim_n \left\| \frac{x_n + y_n}{2} \right\| = 1.$$

Así el conjunto $\lim^1 y_n$ no es estrictamente convexo.

(2) $\Rightarrow$ (1).
Si X no es *URED* entonces existe $z \in S_X$ and $(x_n)_n, (y_n)_n \subseteq X$ con $\|x_n\| \to 1$, $\|y_n\| \to 1$, $\|x_n + y_n\| \to 2$ y $x_n - y_n = s_n z$, con $s_n \to s > 0$.
Sea $x = 0$ e $y = -sz$, tenemos

$$\lim_n \|y_n - 0\| = 1$$

$$\lim_n \|y_n - (-sz)\| = 1$$

y

$$\lim_n \left\| y_n + \frac{sz}{2} \right\| = \lim_n \left\| y_n + \frac{s_n z}{2} \right\| = \lim_n \left\| \frac{x_n + y_n}{2} \right\| = 1.$$

Así el conjunto $\lim^1 y_n$ no es estrictamente convexo.

(4) $\Rightarrow$ (2).

Consideramos $(x_n)_n \subseteq X$ y tomamos $r_0 > 0$ como en el enunciado. Sea $r > 0$ y supongamos $x, y \in X$ con $x \neq y$ satisfaciendo

$$\limsup_n \|x_n - x\| \leq r,$$

$$\limsup_n \|x_n - y\| \leq r$$

y

$$\limsup_n \left\| x_n - \frac{x+y}{2} \right\| < r.$$

Entonces, si $x_n' = \frac{r_0}{r} x_n$, $x' = \frac{r_0}{r} x$ e $y' = \frac{r_0}{r} y$, tenemos que $x', y' \in \lim^{r_0} x_n'$ pero $\frac{x'+y'}{2} \notin \lim^{r_0} x_n'$, así llegamos a contradicción.

(4) $\Rightarrow$ (2).
Consideramos $(x_n)_n \subseteq X$ y tomamos $r_0 > 0$ como en el enunciado. Sea $r > 0$ y supongamos $x, y \in X$ con $x \neq y$ satisfaciendo

$$\limsup_n \|x_n - x\| \leq r,$$

$$\limsup_n \|x_n - y\| \leq r$$

y

$$\limsup_n \left\| x_n - \frac{x+y}{2} \right\| < r.$$

Entonces, si $x_n' = \frac{r_0}{r} x_n$, $x' = \frac{r_0}{r} x$ e $y' = \frac{r_0}{r} y$, tenemos que $x', y' \in \lim^{r_0} x_n'$ pero $\frac{x'+y'}{2} \notin \lim^{r_0} x_n'$, así llegamos a contradicción.

CONTENIDO

Definición

Sea X un espacio normado y $(x_n)_n \subseteq X$ una sucesión. Dado $\rho > 0$, se dice que $(x_n)_n$ es ρ-estadísticamente de Cauchy, denotado por ρ-st-Cauchy, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $i_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(\{i \in \mathbb{N} : \|x_i - x_{i_\varepsilon}\| < \rho + \varepsilon\}) = 1$$

Definición

Dada una sucesión $(x_n)_n$ en un espacio normado X, definimos $\bar{\rho}$ como sigue,

$$\bar{\rho} = \inf\{\rho > 0 : (x_n)_n \text{ es } \rho\text{-st-Cauchy}\}$$

Definición

Sea X un espacio normado y $(x_n)_n \subseteq X$ una sucesión. Dado $\rho > 0$, se dice que $(x_n)_n$ es ρ-estadísticamente de Cauchy, denotado por ρ-st-Cauchy, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $i_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(\{i \in \mathbb{N} : \|x_i - x_{i_\varepsilon}\| < \rho + \varepsilon\}) = 1$$

Definición

Dada una sucesión $(x_n)_n$ en un espacio normado X, definimos $\bar{\rho}$ como sigue,

$$\bar{\rho} = \operatorname{ínf}\{\rho > 0 : (x_n)_n \text{ es } \rho\text{-st-Cauchy}\}$$

Definición

Una sucesión $(x_n)_n$ en un espacio normado se dice que es estadísticamente acotada si existe $A \subseteq \mathbb{N}$ con $d(A) = 1$ tal que $\{x_n : n \in A\}$ es acotado.

Es claro que una sucesión estadísticamente convergente debe ser estadísticamente acotada.

Proposición

Sea X un espacio normado y $(x_n)_n \subseteq X$ una sucesión. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *$(x_n)_n$ es estadisticamente acotada.*
2. *$(x_n)_n$ es ρ-st-Cauchy para algún $\rho > 0$.*
3. *$(x_n)_n$ es r-st-convergente para algún $r > 0$.*

Más aún, en esta situación tenemos $\bar{r} \leq \bar{\rho} \leq 2\bar{r}$.

Definición

Una sucesión $(x_n)_n$ en un espacio normado se dice que es estadísticamente acotada si existe $A \subseteq \mathbb{N}$ con $d(A) = 1$ tal que $\{x_n : n \in A\}$ es acotado.
Es claro que una sucesión estadísticamente convergente debe ser estadísticamente acotada.

Proposición

Sea X un espacio normado y $(x_n)_n \subseteq X$ una sucesión. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *$(x_n)_n$ es estadisticamente acotada.*
2. *$(x_n)_n$ es ρ-st-Cauchy para algún $\rho > 0$.*
3. *$(x_n)_n$ es r-st-convergente para algún $r > 0$.*

Más aún, en esta situación tenemos $\bar{r} \leq \bar{\rho} \leq 2\bar{r}$.

Definición

Una sucesión $(x_n)_n$ en un espacio normado se dice que es estadísticamente acotada si existe $A \subseteq \mathbb{N}$ con $d(A) = 1$ tal que $\{x_n : n \in A\}$ es acotado.
Es claro que una sucesión estadísticamente convergente debe ser estadísticamente acotada.

Proposición

Sea X un espacio normado y $(x_n)_n \subseteq X$ una sucesión. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *$(x_n)_n$ es estadisticamente acotada.*
2. *$(x_n)_n$ es ρ-st-Cauchy para algún $\rho > 0$.*
3. *$(x_n)_n$ es r-st-convergente para algún $r > 0$.*

Más aún, en esta situación tenemos $\bar{r} \leq \bar{\rho} \leq 2\bar{r}$.

Definición

Una sucesión $(x_n)_n$ en un espacio normado se dice que es estadísticamente acotada si existe $A \subseteq \mathbb{N}$ con $d(A) = 1$ tal que $\{x_n : n \in A\}$ es acotado.

Es claro que una sucesión estadísticamente convergente debe ser estadísticamente acotada.

Proposición

Sea X un espacio normado y $(x_n)_n \subseteq X$ una sucesión. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *$(x_n)_n$ es estadisticamente acotada.*
2. *$(x_n)_n$ es ρ-st-Cauchy para algún $\rho > 0$.*
3. *$(x_n)_n$ es r-st-convergente para algún $r > 0$.*

Más aún, en esta situación tenemos $\bar{r} \leq \bar{\rho} \leq 2\bar{r}$.

Definición

Una sucesión $(x_n)_n$ en un espacio normado se dice que es estadísticamente acotada si existe $A \subseteq \mathbb{N}$ con $d(A) = 1$ tal que $\{x_n : n \in A\}$ es acotado.
Es claro que una sucesión estadísticamente convergente debe ser estadísticamente acotada.

Proposición

Sea X un espacio normado y $(x_n)_n \subseteq X$ una sucesión. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *$(x_n)_n$ es estadisticamente acotada.*
2. *$(x_n)_n$ es ρ-st-Cauchy para algún $\rho > 0$.*
3. *$(x_n)_n$ es r-st-convergente para algún $r > 0$.*

Más aún, en esta situación tenemos $\bar{r} \leq \bar{\rho} \leq 2\bar{r}$.

Definición

Una sucesión $(x_n)_n$ en un espacio normado se dice que es estadísticamente acotada si existe $A \subseteq \mathbb{N}$ con $d(A) = 1$ tal que $\{x_n : n \in A\}$ es acotado.
Es claro que una sucesión estadísticamente convergente debe ser estadísticamente acotada.

Proposición

Sea X un espacio normado y $(x_n)_n \subseteq X$ una sucesión. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *$(x_n)_n$ es estadisticamente acotada.*
2. *$(x_n)_n$ es ρ-st-Cauchy para algún $\rho > 0$.*
3. *$(x_n)_n$ es r-st-convergente para algún $r > 0$.*

Más aún, en esta situación tenemos $\bar{r} \leq \bar{\rho} \leq 2\bar{r}$.

DEFINICIÓN

Una sucesión $(x_n)_n$ en un espacio normado se dice que es estadísticamente acotada si existe $A \subseteq \mathbb{N}$ con $d(A) = 1$ tal que $\{x_n : n \in A\}$ es acotado.
Es claro que una sucesión estadísticamente convergente debe ser estadísticamente acotada.

PROPOSICIÓN

Sea X un espacio normado y $(x_n)_n \subseteq X$ una sucesión. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *$(x_n)_n$ es estadisticamente acotada.*
2. *$(x_n)_n$ es ρ-st-Cauchy para algún $\rho > 0$.*
3. *$(x_n)_n$ es r-st-convergente para algún $r > 0$.*

Más aún, en esta situación tenemos $\bar{r} \leq \bar{\rho} \leq 2\bar{r}$.

Gracias por vuestra atención.