Desigualdades capacitarias y estimaciones de Sobolev

Pilar Silvestre

Departamento de Matemática Aplicada y Análisis,
Universidad de Barcelona

7 de Abril de 2011

Sea $K \subset \mathbb{R}^3$ un conductor. Tomemos una distribución de carga en K y dejemos que se mueva hasta llegar al equilibrio.

La capacidad de Wiener de K es

$$C(K) = \frac{\mu(K)}{V},$$

descrita por La Vallée Poussin como

$$C(K) = \inf \left\{ \|\nabla f\|_2^2;\ 0 \leq f \leq 1,\ f = 1 \text{ on } K \right\} \qquad (f \in \mathcal{D}).$$

Dado que una bola es de capacidad positiva y su frontera tiene la misma capacidad, la capacidad no es una medida.
Maz'ya la extiende sustituyendo $\|\cdot\|_2$ por $\|\cdot\|_p$.

Sea $K \subset \mathbb{R}^3$ un conductor. Tomemos una distribución de carga en K y dejemos que se mueva hasta llegar al equilibrio. Sea μ la distribución de equilibrio. El potencial Newtoniano de la medida μ, $U^\mu(x) = \int \frac{d\mu(y)}{|x-y|}$ toma valor constante V en K.
La capacidad de Wiener de K es

$$C(K) = \frac{\mu(K)}{V},$$

descrita por La Vallée Poussin como

$$C(K) = \inf \left\{ \|\nabla f\|_2^2;\ 0 \leq f \leq 1,\ f = 1 \text{ on } K \right\} \qquad (f \in \mathcal{D}).$$

Dado que una bola es de capacidad positiva y su frontera tiene la misma capacidad, la capacidad no es una medida.
Maz'ya la extiende sustituyendo $\|\cdot\|_2$ por $\|\cdot\|_p$.

Sea $K \subset \mathbb{R}^3$ un conductor. Tomemos una distribución de carga en K y dejemos que se mueva hasta llegar al equilibrio. Sea μ la distribución de equilibrio. El potencial Newtoniano de la medida μ, $U^\mu(x) = \int \frac{d\mu(y)}{|x-y|}$ toma valor constante V en K.
La capacidad de Wiener de K es

$$C(K) = \frac{\mu(K)}{V},$$

descrita por La Vallée Poussin como

$$C(K) = \inf \left\{ \|\nabla f\|_2^2;\ 0 \leq f \leq 1,\ f = 1 \text{ on } K \right\} \qquad (f \in \mathcal{D}).$$

Dado que una bola es de capacidad positiva y su frontera tiene la misma capacidad, la capacidad no es una medida.
Maz'ya la extiende sustituyendo $\|\cdot\|_2$ por $\|\cdot\|_p$.

Sea $K \subset \mathbb{R}^3$ un conductor. Tomemos una distribución de carga en K y dejemos que se mueva hasta llegar al equilibrio. Sea μ la distribución de equilibrio. El potencial Newtoniano de la medida μ, $U^\mu(x) = \int \frac{d\mu(y)}{|x-y|}$ toma valor constante V en K.
La capacidad de Wiener de K es

$$C(K) = \frac{\mu(K)}{V},$$

descrita por La Vallée Poussin como

$$C(K) = \inf\left\{\|\nabla f\|_2^2;\ 0 \leq f \leq 1,\ f = 1 \text{ on } K\right\} \qquad (f \in \mathcal{D}).$$

Dado que una bola es de capacidad positiva y su frontera tiene la misma capacidad, la capacidad no es una medida.
Maz'ya la extiende sustituyendo $\|\cdot\|_2$ por $\|\cdot\|_p$.

Sea Ω un dominio de $\mathbb{R}^n$ con la medida de Lebesgue, m_n, K un compacto de Ω y $\mathrm{Lip}_0(\Omega)$ la clase de funciones Lipschitz con soporte compacto en Ω, Costea y Maz'ya definen

$$\mathrm{cap}_{p,q}(K) := \inf\{\|\nabla f\|_{L^{p,q}}^p; f \in \mathrm{Lip}_0(\Omega),\ f \geq 1 \textit{ alrededor de } K\},$$

donde para $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ y (Ω, μ) un espacio de medida, $L^{p,q}(\Omega, \mu)$ viene definido por la condición

$$\|f\|_{L^{p,q}(\Omega,\mu)} \simeq \left(\int_0^\infty t^{q-1}\mu\{x; |f(x)| > t\}^{q/p} dt\right)^{1/q} < \infty.$$

Sea Ω un dominio de $\mathbb{R}^n$ con la medida de Lebesgue, m_n, K un compacto de Ω y $\mathrm{Lip}_0(\Omega)$ la clase de funciones Lipschitz con soporte compacto en Ω, Costea y Maz'ya definen

$$\mathrm{cap}_{p,q}(K) := \inf\{\|\nabla f\|^p_{L^{p,q}}; f \in \mathrm{Lip}_0(\Omega),\ f \geq 1 \textit{ alrededor de } K\},$$

donde para $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ y (Ω, μ) un espacio de medida, $L^{p,q}(\Omega, \mu)$ viene definido por la condición

$$\|f\|_{L^{p,q}(\Omega,\mu)} \simeq \left(\int_0^\infty t^{q-1}\mu\{x; |f(x)| > t\}^{q/p} dt\right)^{1/q} < \infty.$$

Sea Ω un dominio de $\mathbb{R}^n$ con la medida de Lebesgue, m_n, K un compacto de Ω y $\mathrm{Lip}_0(\Omega)$ la clase de funciones Lipschitz con soporte compacto en Ω, Costea y Maz'ya definen

$$\mathrm{cap}_{p,q}(K) := \inf\{\|\nabla f\|^p_{L^{p,q}}; f \in \mathrm{Lip}_0(\Omega),\ f \geq 1 \textit{ alrededor de } K\},$$

donde para $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ y (Ω, μ) un espacio de medida, $L^{p,q}(\Omega,\mu)$ viene definido por la condición

$$\|f\|_{L^{p,q}(\Omega,\mu)} \simeq \left(\int_0^\infty t^{q-1}\mu\{x; |f(x)| > t\}^{q/p} dt\right)^{1/q} < \infty.$$

De una función real de conjunto C definida sobre todo compacto K de $\mathbb{R}^n$ se dice que es una capacidad si satisface que:

De una función real de conjunto C definida sobre todo compacto K de $\mathbb{R}^n$ se dice que es una capacidad si satisface que:

1. $C(\emptyset) = 0$, $0 \leq C(K) \leq \infty$,

De una función real de conjunto C definida sobre todo compacto K de $\mathbb{R}^n$ se dice que es una capacidad si satisface que:

1. $C(\emptyset) = 0$, $0 \leq C(K) \leq \infty$,
2. $C(K_1) \leq C(K_2)$ si $K_1 \subset K_2$, y

De una función real de conjunto C definida sobre todo compacto K de $\mathbb{R}^n$ se dice que es una capacidad si satisface que:

1. $C(\emptyset) = 0$, $0 \leq C(K) \leq \infty$,
2. $C(K_1) \leq C(K_2)$ si $K_1 \subset K_2$, y
3. $C(K_1 \cup K_2) \leq c(C(K_1) + C(K_2))$.

De una función real de conjunto C definida sobre todo compacto K de $\mathbb{R}^n$ se dice que es una capacidad si satisface que:

1. $C(\emptyset) = 0$, $0 \leq C(K) \leq \infty$,
2. $C(K_1) \leq C(K_2)$ si $K_1 \subset K_2$, y
3. $C(K_1 \cup K_2) \leq c(C(K_1) + C(K_2))$.

Definida sobre todos los compactos, ésta se extiende a todos los conjuntos considerando las capacidades interior y exterior.

De una función real de conjunto C definida sobre todo compacto K de $\mathbb{R}^n$ se dice que es una capacidad si satisface que:

1. $C(\emptyset) = 0$, $0 \leq C(K) \leq \infty$,
2. $C(K_1) \leq C(K_2)$ si $K_1 \subset K_2$, y
3. $C(K_1 \cup K_2) \leq c(C(K_1) + C(K_2))$.

Definida sobre todos los compactos, ésta se extiende a todos los conjuntos considerando las capacidades interior y exterior.

Maz'ya extiende la capacidad de Wiener para todo $p \geq 1$ como la p-capacidad

$$\mathrm{cap}_p(K, \Omega) = inf\left\{\|\nabla f\|_p^p;\ 0 \leq f \leq 1,\ f = 1 \text{ alrededor de } K\right\}$$

donde Ω es un dominio de $\mathbb{R}^n$ y K un compacto de Ω.
Demuestra la desigualdad de Sobolev

$$\int_0^\infty \mathrm{cap}_p(\overline{M}_{at}, M_t)\, d(t^p) \leq c(a,p)\|\nabla f\|_p^p, \tag{1}$$

donde M_t es $\{x \in \Omega : |f(x)| > t\}$.
Herramienta útil con aplicaciones a inclusiones de tipo Sobolev.

Maz'ya extiende la capacidad de Wiener para todo $p \geq 1$ como la p-capacidad

$$\mathrm{cap}_p(K, \Omega) = inf\left\{\|\nabla f\|_p^p;\ 0 \leq f \leq 1,\ f = 1 \text{ alrededor de } K\right\}$$

donde Ω es un dominio de $\mathbb{R}^n$ y K un compacto de Ω.
Demuestra la desigualdad de Sobolev

$$\int_0^\infty \mathrm{cap}_p(\overline{M}_{at}, M_t)d(t^p) \leq c(a,p)\|\nabla f\|_p^p, \tag{1}$$

donde M_t es $\{x \in \Omega : |f(x)| > t\}$.
Herramienta útil con aplicaciones a inclusiones de tipo Sobolev.

Maz'ya extiende la capacidad de Wiener para todo $p \geq 1$ como la p-capacidad

$$\mathrm{cap}_p(K,\Omega) = inf\left\{\|\nabla f\|_p^p;\ 0 \leq f \leq 1,\ f = 1 \text{ alrededor de } K\right\}$$

donde Ω es un dominio de $\mathbb{R}^n$ y K un compacto de Ω.
Demuestra la desigualdad de Sobolev

$$\int_0^\infty \mathrm{cap}_p(\overline{M}_{at}, M_t)d(t^p) \leq c(a,p)\|\nabla f\|_p^p, \tag{1}$$

donde M_t es $\{x \in \Omega : |f(x)| > t\}$.
Herramienta útil con aplicaciones a inclusiones de tipo Sobolev.

Un espacio cuasi-Banach X satisface una lower $p-$estimate si existe $M \geq 1$ tal que para $n \in \mathbb{N}$, $\{f_i\}_{i=1}^n \subset X$ con soportes disjuntos

$$\Big(\sum_{i=1}^n \|f_i\|^p\Big)^{1/p} \leq M\Big\|\Big(\sum_{i=1}^n |f_i|^p\Big)^{1/p}\Big\| = \Big\|\sum_{i=1}^n |f_i|\Big\|.$$

Un espacio cuasi-Banach X satisface una lower $p-$estimate si existe $M \geq 1$ tal que para $n \in \mathbb{N}$, $\{f_i\}_{i=1}^n \subset X$ con soportes disjuntos

$$\Big(\sum_{i=1}^n \|f_i\|^p\Big)^{1/p} \leq M \Big\| \Big(\sum_{i=1}^n |f_i|^p\Big)^{1/p} \Big\| = \Big\| \sum_{i=1}^n |f_i| \Big\|.$$

La menor M es la lower p-estimate constant, $M_{(p)}(X)$.

Un espacio cuasi-Banach X satisface una lower $p-$estimate si existe $M \geq 1$ tal que para $n \in \mathbb{N}$, $\{f_i\}_{i=1}^n \subset X$ con soportes disjuntos

$$\Big(\sum_{i=1}^n \|f_i\|^p\Big)^{1/p} \leq M\Big\|\Big(\sum_{i=1}^n |f_i|^p\Big)^{1/p}\Big\| = \Big\|\sum_{i=1}^n |f_i|\Big\|.$$

La menor M es la lower p-estimate constant, $M_{(p)}(X)$.
Para f, g funciones en $L^{p,q}(\Omega,\mu)$ con soportes disjuntos,

$$\|f\|_{L^{p,q}(\Omega,\mu)}^{\max(p,q)} + \|g\|_{L^{p,q}(\Omega,\mu)}^{\max(p,q)} \leq \|f+g\|_{L^{p,q}(\Omega,\mu)}^{\max(p,q)}.$$

Un espacio cuasi-Banach X satisface una lower $p-$estimate si existe $M \geq 1$ tal que para $n \in \mathbb{N}$, $\{f_i\}_{i=1}^n \subset X$ con soportes disjuntos

$$\left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|^p\right)^{1/p} \leq M\left\|\left(\sum_{i=1}^n |f_i|^p\right)^{1/p}\right\| = \left\|\sum_{i=1}^n |f_i|\right\|.$$

La menor M es la lower p-estimate constant, $M_{(p)}(X)$.
Para f, g funciones en $L^{p,q}(\Omega, \mu)$ con soportes disjuntos,

$$\|f\|_{L^{p,q}(\Omega,\mu)}^{\max(p,q)} + \|g\|_{L^{p,q}(\Omega,\mu)}^{\max(p,q)} \leq \|f+g\|_{L^{p,q}(\Omega,\mu)}^{\max(p,q)}.$$

Así tenemos lower estimates con constante uno.

Gracias a estas desigualdades, Costea y Maz'ya para $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ y $K \subset G \subset \Omega$, definen

$$\mathrm{cap}_{p,q}(K,G) := \mathit{inf}\{\|\nabla f\|^p_{L^{p,q}}; f \in \mathrm{Lip}_0(G),\ f \geq 1 \textit{ alrededor de } K\}$$

y prueban que

$$\int_0^\infty \mathrm{cap}_{p,q}(\overline{M}_{at}, M_t) d(t^p) \lesssim \|\nabla f\|^p_{L^{p,q}(\Omega, m_n; \mathbb{R}^n)} \ (1 \leq q \leq p), \tag{2}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{cap}_{p,q}(\overline{M}_{at}, M_t)^{q/p} d(t^q) \lesssim \|\nabla f\|^q_{L^{p,q}(\Omega)} \ (p < q < \infty). \tag{3}$$

Gracias a estas desigualdades, Costea y Maz'ya para $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ y $K \subset G \subset \Omega$, definen

$$\mathrm{cap}_{p,q}(K, G) := \mathit{inf}\{\|\nabla f\|^p_{L^{p,q}}; f \in \mathrm{Lip}_0(G),\ f \geq 1 \text{ alrededor de } K\}$$

y prueban que

$$\int_0^\infty \mathrm{cap}_{p,q}(\overline{M}_{at}, M_t) d(t^p) \lesssim \|\nabla f\|^p_{L^{p,q}(\Omega, m_n; \mathbb{R}^n)}\ (1 \leq q \leq p), \tag{2}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{cap}_{p,q}(\overline{M}_{at}, M_t)^{q/p} d(t^q) \lesssim \|\nabla f\|^q_{L^{p,q}(\Omega)}\ (p < q < \infty). \tag{3}$$

Gracias a estas desigualdades, Costea y Maz'ya para $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ y $K \subset G \subset \Omega$, definen

$$\mathrm{cap}_{p,q}(K, G) := \mathit{inf}\{\|\nabla f\|^p_{L^{p,q}};\, f \in \mathrm{Lip}_0(G),\ f \geq 1 \text{ \textit{alrededor de} } K\}$$

y prueban que

$$\int_0^\infty \mathrm{cap}_{p,q}(\overline{M}_{at}, M_t)d(t^p) \lesssim \|\nabla f\|^p_{L^{p,q}(\Omega,m_n;\mathbb{R}^n)}\ (1 \leq q \leq p), \tag{2}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{cap}_{p,q}(\overline{M}_{at}, M_t)^{q/p}d(t^q) \lesssim \|\nabla f\|^q_{L^{p,q}(\Omega)}\ (p < q < \infty). \tag{3}$$

Como aplicación, para $1 < s \leq max(p, q) \leq r < \infty$, $q \geq 1$ caracterizan la siguiente desigualdad

Como aplicación, para $1 < s \leq max(p, q) \leq r < \infty$, $q \geq 1$ caracterizan la siguiente desigualdad

$$\|f\|_{L^{r,p}(\Omega,\mu)} \lesssim \|\nabla f\|_{L^{p,q}(\Omega,m_n)} + \|f\|_{L^{s,p}(\Omega,\nu)}(1 \leq q \leq p), \tag{4}$$

$$\|f\|_{L^{r,q}(\Omega,\mu)} \lesssim \|\nabla f\|_{L^{p,q}(\Omega,m_n)} + \|f\|_{L^{s,q}(\Omega,\nu)}(p < q < \infty), \tag{5}$$

esto es,

Como aplicación, para $1 < s \leq max(p,q) \leq r < \infty$, $q \geq 1$ caracterizan la siguiente desigualdad

$$\|f\|_{L^{r,p}(\Omega,\mu)} \lesssim \|\nabla f\|_{L^{p,q}(\Omega,m_n)} + \|f\|_{L^{s,p}(\Omega,\nu)} (1 \leq q \leq p), \tag{4}$$

$$\|f\|_{L^{r,q}(\Omega,\mu)} \lesssim \|\nabla f\|_{L^{p,q}(\Omega,m_n)} + \|f\|_{L^{s,q}(\Omega,\nu)} (p < q < \infty), \tag{5}$$

esto es,

$$\|f\|_{L^{r,max(p,q)}(\Omega,\mu)} \lesssim \|\nabla f\|_{L^{p,q}(\Omega,m_n)} + \|f\|_{L^{s,max(p,q)}(\Omega,\nu)}$$

Como aplicación, para $1 < s \leq max(p,q) \leq r < \infty$, $q \geq 1$ caracterizan la siguiente desigualdad

$$\|f\|_{L^{r,p}(\Omega,\mu)} \lesssim \|\nabla f\|_{L^{p,q}(\Omega,m_n)} + \|f\|_{L^{s,p}(\Omega,\nu)}(1 \leq q \leq p), \tag{4}$$

$$\|f\|_{L^{r,q}(\Omega,\mu)} \lesssim \|\nabla f\|_{L^{p,q}(\Omega,m_n)} + \|f\|_{L^{s,q}(\Omega,\nu)}(p < q < \infty), \tag{5}$$

esto es,

$$\|f\|_{L^{r,max(p,q)}(\Omega,\mu)} \lesssim \|\nabla f\|_{L^{p,q}(\Omega,m_n)} + \|f\|_{L^{s,max(p,q)}(\Omega,\nu)}$$

requiriendo que para abiertos acotados g y G tales que $\overline{g} \subset G, \overline{G} \subset \Omega$ se cumpla la desigualdad

$$\mu(g)^{1/r} \lesssim \mathrm{cap}_{p,q}(\overline{g}, G)^{1/p} + \nu(G)^{1/s}.$$

Sea $X = X(\Omega)$ un espacio de funciones cuasi-Banach en Ω.
Para $t > 0$, sea M_t la superficie de nivel

$$M_t := \{x \in \Omega : |f(x)| > t\}.$$

Para $K \subset G \subset \Omega$, denotamos

$$W(K,G) := \{u \in \mathrm{Lip}_0(G);\ u = 1 \text{ en un entorno de } K,\ 0 \leq u \leq 1\}.$$

Definimos la X-capacidad del conductor (K,G) como:

$$\mathrm{Cap}_X(K,G) := inf\{\|\nabla u\|_X;\ u \in W(K,G)\},$$

que para $X = L^{p,q}$ y $\mathrm{Cap}_X = \mathrm{cap}_{p,q}^{1/p}$ resulta la de Costea y Maz'ya.
Denotamos $\mathrm{Cap}_X(\cdot) = \mathrm{Cap}_X(\cdot,\Omega)$ donde Ω es fijo.

Sea $X = X(\Omega)$ un espacio de funciones cuasi-Banach en Ω.
Para $t > 0$, sea M_t la superficie de nivel

$$M_t := \{x \in \Omega : |f(x)| > t\}.$$

Para $K \subset G \subset \Omega$, denotamos

$$W(K,G) := \{u \in \mathrm{Lip}_0(G);\ u = 1 \text{ en un entorno de } K,\ 0 \leq u \leq 1\}.$$

Definimos la X-capacidad del conductor (K,G) como:

$$\mathrm{Cap}_X(K,G) := inf\{\|\nabla u\|_X;\ u \in W(K,G)\},$$

que para $X = L^{p,q}$ y $\mathrm{Cap}_X = \mathrm{cap}_{p,q}^{1/p}$ resulta la de Costea y Maz'ya.
Denotamos $\mathrm{Cap}_X(\cdot) = \mathrm{Cap}_X(\cdot,\Omega)$ donde Ω es fijo.

Sea $X = X(\Omega)$ un espacio de funciones cuasi-Banach en Ω.
Para $t > 0$, sea M_t la superficie de nivel

$$M_t := \{x \in \Omega : |f(x)| > t\}.$$

Para $K \subset G \subset \Omega$, denotamos

$$W(K,G) := \{u \in \mathrm{Lip}_0(G);\ u = 1 \text{ en un entorno de } K,\ 0 \le u \le 1\}.$$

Definimos la X-capacidad del conductor (K,G) como:

$$\mathrm{Cap}_X(K,G) := inf\{\|\nabla u\|_X;\ u \in W(K,G)\},$$

que para $X = L^{p,q}$ y $\mathrm{Cap}_X = \mathrm{cap}_{p,q}^{1/p}$ resulta la de Costea y Maz'ya.
Denotamos $\mathrm{Cap}_X(\cdot) = \mathrm{Cap}_X(\cdot,\Omega)$ donde Ω es fijo.

Sea $X = X(\Omega)$ un espacio de funciones cuasi-Banach en Ω.
Para $t > 0$, sea M_t la superficie de nivel

$$M_t := \{x \in \Omega : |f(x)| > t\}.$$

Para $K \subset G \subset \Omega$, denotamos

$$W(K, G) := \{u \in \mathrm{Lip}_0(G);\ u = 1 \text{ en un entorno de } K,\ 0 \leq u \leq 1\}.$$

Definimos la X-capacidad del conductor (K, G) como:

$$\mathrm{Cap}_X(K, G) := inf\{\|\nabla u\|_X;\ u \in W(K, G)\},$$

que para $X = L^{p,q}$ y $\mathrm{Cap}_X = \mathrm{cap}_{p,q}^{1/p}$ resulta la de Costea y Maz'ya.
Denotamos $\mathrm{Cap}_X(\cdot) = \mathrm{Cap}_X(\cdot, \Omega)$ donde Ω es fijo.

Para extender estos resultados con la misma técnica,

Para extender estos resultados con la misma técnica, la clave va a ser que el espacio que define la capacidad satisface una lower p-estimate con constante uno y $1 \leq p < \infty$.

Para extender estos resultados con la misma técnica, la clave va a ser que el espacio que define la capacidad satisface una lower p-estimate con constante uno y $1 \leq p < \infty$.

Teorema

Sea $a > 1$ constante y $1 \leq p < \infty$. Supongamos que X es un espacio de funciones Banach que satisface una lower $p-$estimate con $M_{(p)}(X) = 1$. Entonces para toda $f \in \mathrm{Lip}_0(\Omega)$

$$\int_0^\infty t^p \mathrm{Cap}_X\left(\overline{\{|f| > at\}}, \{|f| > t\}\right)^p \frac{dt}{t} \leq \|\nabla f\|_X^p \frac{\log a}{(a-1)^p}.$$

Para extender estos resultados con la misma técnica, la clave va a ser que el espacio que define la capacidad satisface una lower p-estimate con constante uno y $1 \leq p < \infty$.

Teorema

Sea $a > 1$ constante y $1 \leq p < \infty$. Supongamos que X es un espacio de funciones Banach que satisface una lower $p-$estimate con $M_{(p)}(X) = 1$. Entonces para toda $f \in \mathrm{Lip}_0(\Omega)$

$$\int_0^\infty t^p \mathrm{Cap}_X\left(\overline{\{|f| > at\}}, \{|f| > t\}\right)^p \frac{dt}{t} \leq \|\nabla f\|_X^p \frac{\log a}{(a-1)^p}.$$

Para extender estos resultados con la misma técnica, la clave va a ser que el espacio que define la capacidad satisface una lower p-estimate con constante uno y $1 \leq p < \infty$.

Teorema

Sea $a > 1$ constante y $1 \leq p < \infty$. Supongamos que X es un espacio de funciones Banach que satisface una lower $p-$estimate con $M_{(p)}(X) = 1$. Entonces para toda $f \in \mathrm{Lip}_0(\Omega)$

$$\int_0^\infty t^p \mathrm{Cap}_X\left(\overline{\{|f| > at\}}, \{|f| > t\}\right)^p \frac{dt}{t} \leq \|\nabla f\|_X^p \frac{\log a}{(a-1)^p}.$$

Si γ es una función real decreciente tal que existen los límites $\gamma(0)$ y $\gamma(\infty)$ entonces $\int_0^\infty [\gamma(t) - \gamma(at)] \frac{dt}{t} = (\gamma(0) - \gamma(\infty)) \log a$.

Prueba: Definimos $\Lambda_t(f) := min\left\{\frac{(|f|-t)_+}{at-t}, 1\right\}$. $\Lambda_t(f) \in W(\overline{M}_{at}, M_t)$

$$\mathrm{Cap}_X(\overline{M}_{at}, M_t) \leq \left\| \frac{1}{(a-1)t} \chi_{M_t \setminus M_{at}} |\nabla f| \right\|_X.$$

De la lower $p-$estimate de X con $M_{(p)}(X) = 1$, tenemos que

$$\|\chi_{M_t \setminus M_{at}} |\nabla f|\|_X^p + \|\chi_{M_{at}} |\nabla f|\|_X^p \leq \|\chi_{M_t} |\nabla f|\|_X^p$$

y así

$$\int_0^\infty t^p \mathrm{Cap}_X(\overline{M}_{at}, M_t)^p \frac{dt}{t} \leq \int_0^\infty \frac{1}{(a-1)^p} \|\chi_{M_t \setminus M_{at}} |\nabla f|\|_X^p \frac{dt}{t}$$

$$\leq \int_0^\infty \frac{1}{(a-1)^p} \|\chi_{M_t} |\nabla f|\|_X^p \frac{dt}{t} - \int_0^\infty \frac{1}{(a-1)^p} \|\chi_{M_{at}} |\nabla f|\|_X^p \frac{dt}{t}.$$

Denotando $\gamma(t) := \frac{1}{(a-1)^p} \|\chi_{M_t} |\nabla f|\|_X^p$, por la observación resulta que

$$\int_0^\infty t^p \mathrm{Cap}_X(\overline{M}_{at}, M_t)^p \frac{dt}{t} \quad \leq \quad \frac{1}{(a-1)^p} \|\nabla f\|_X^p \log a.$$

Prueba: Definimos $\Lambda_t(f) := min\left\{\frac{(|f|-t)_+}{at-t}, 1\right\}$. $\Lambda_t(f) \in W(\overline{M}_{at}, M_t)$

$$\mathrm{Cap}_X(\overline{M}_{at}, M_t) \leq \left\| \frac{1}{(a-1)t} \chi_{M_t \setminus M_{at}} |\nabla f| \right\|_X.$$

De la lower $p-$estimate de X con $M_{(p)}(X) = 1$, tenemos que

$$\|\chi_{M_t \setminus M_{at}} |\nabla f|\|_X^p + \|\chi_{M_{at}} |\nabla f|\|_X^p \leq \|\chi_{M_t} |\nabla f|\|_X^p$$

y así

$$\int_0^\infty t^p \mathrm{Cap}_X(\overline{M}_{at}, M_t)^p \frac{dt}{t} \leq \int_0^\infty \frac{1}{(a-1)^p} \|\chi_{M_t \setminus M_{at}} |\nabla f|\|_X^p \frac{dt}{t}$$

$$\leq \int_0^\infty \frac{1}{(a-1)^p} \|\chi_{M_t} |\nabla f|\|_X^p \frac{dt}{t} - \int_0^\infty \frac{1}{(a-1)^p} \|\chi_{M_{at}} |\nabla f|\|_X^p \frac{dt}{t}.$$

Denotando $\gamma(t) := \frac{1}{(a-1)^p} \|\chi_{M_t} |\nabla f|\|_X^p$, por la observación resulta que

$$\int_0^\infty t^p \mathrm{Cap}_X(\overline{M}_{at}, M_t)^p \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{(a-1)^p} \|\nabla f\|_X^p \log a.$$

Prueba: Definimos $\Lambda_t(f) := min\left\{\frac{(|f|-t)_+}{at-t}, 1\right\}$. $\Lambda_t(f) \in W(\overline{M}_{at}, M_t)$

$$\mathrm{Cap}_X(\overline{M}_{at}, M_t) \leq \left\| \frac{1}{(a-1)t} \chi_{M_t \setminus M_{at}} |\nabla f| \right\|_X.$$

De la lower $p-$estimate de X con $M_{(p)}(X) = 1$, tenemos que

$$\|\chi_{M_t \setminus M_{at}} |\nabla f|\|_X^p + \|\chi_{M_{at}} |\nabla f|\|_X^p \leq \|\chi_{M_t} |\nabla f|\|_X^p$$

y así

$$\int_0^\infty t^p \mathrm{Cap}_X(\overline{M}_{at}, M_t)^p \frac{dt}{t} \leq \int_0^\infty \frac{1}{(a-1)^p} \|\chi_{M_t \setminus M_{at}} |\nabla f|\|_X^p \frac{dt}{t}$$
$$\leq \int_0^\infty \frac{1}{(a-1)^p} \|\chi_{M_t} |\nabla f|\|_X^p \frac{dt}{t} - \int_0^\infty \frac{1}{(a-1)^p} \|\chi_{M_{at}} |\nabla f|\|_X^p \frac{dt}{t}.$$

Denotando $\gamma(t) := \frac{1}{(a-1)^p} \|\chi_{M_t} |\nabla f|\|_X^p$, por la observación resulta que

$$\int_0^\infty t^p \mathrm{Cap}_X(\overline{M}_{at}, M_t)^p \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{(a-1)^p} \|\nabla f\|_X^p \log a.$$

Prueba: Definimos $\Lambda_t(f) := min\left\{\frac{(|f|-t)_+}{at-t}, 1\right\}$. $\Lambda_t(f) \in W(\overline{M}_{at}, M_t)$

$$\mathrm{Cap}_X(\overline{M}_{at}, M_t) \leq \left\| \frac{1}{(a-1)t} \chi_{M_t \setminus M_{at}} |\nabla f| \right\|_X.$$

De la lower $p-$estimate de X con $M_{(p)}(X) = 1$, tenemos que

$$\|\chi_{M_t \setminus M_{at}} |\nabla f|\|_X^p + \|\chi_{M_{at}} |\nabla f|\|_X^p \leq \|\chi_{M_t} |\nabla f|\|_X^p$$

y así

$$\int_0^\infty t^p \mathrm{Cap}_X(\overline{M}_{at}, M_t)^p \frac{dt}{t} \leq \int_0^\infty \frac{1}{(a-1)^p} \|\chi_{M_t \setminus M_{at}} |\nabla f|\|_X^p \frac{dt}{t}$$
$$\leq \int_0^\infty \frac{1}{(a-1)^p} \|\chi_{M_t} |\nabla f|\|_X^p \frac{dt}{t} - \int_0^\infty \frac{1}{(a-1)^p} \|\chi_{M_{at}} |\nabla f|\|_X^p \frac{dt}{t}.$$

Denotando $\gamma(t) := \frac{1}{(a-1)^p} \|\chi_{M_t} |\nabla f|\|_X^p$, por la observación resulta que

$$\int_0^\infty t^p \mathrm{Cap}_X(\overline{M}_{at}, M_t)^p \frac{dt}{t} \quad \leq \quad \frac{1}{(a-1)^p} \|\nabla f\|_X^p \log a.$$

¿Qué pasa si el espacio ya no cumple que la constante es uno?

El método anterior falla porque con el mismo argumento obtenemos que

$$\|\chi_{M_t \setminus M_{at}} |\nabla f|\|_X^p \leq M_{(p)}(X)^p \|\chi_{M_t} |\nabla f|\|_X^p - \|\chi_{M_{at}} |\nabla f|\|_X^p,$$

pero no es posible encontrar g a la cual aplicarle la observación.

Nuestro resultado es aplicable a gran número de espacios conocidos; además, es válido para todo p positivo sin ninguna condición más. Éste permite obtener mejoras en la integrabilidad de funciones Lipschitz.

¿Qué pasa si el espacio ya no cumple que la constante es uno?
El método anterior falla porque con el mismo argumento obtenemos que

$$\|\chi_{M_t \setminus M_{at}} |\nabla f|\|_X^p \leq M_{(p)}(X)^p \|\chi_{M_t} |\nabla f|\|_X^p - \|\chi_{M_{at}} |\nabla f|\|_X^p,$$

pero no es posible encontrar g a la cual aplicarle la observación.
Nuestro resultado es aplicable a gran número de espacios conocidos; además, es válido para todo p positivo sin ninguna condición más. Éste permite obtener mejoras en la integrabilidad de funciones Lipschitz.

¿Qué pasa si el espacio ya no cumple que la constante es uno?
El método anterior falla porque con el mismo argumento obtenemos que

$$\|\chi_{M_t \setminus M_{at}} |\nabla f|\|_X^p \leq M_{(p)}(X)^p \|\chi_{M_t} |\nabla f|\|_X^p - \|\chi_{M_{at}} |\nabla f|\|_X^p,$$

pero no es posible encontrar g a la cual aplicarle la observación.
Nuestro resultado es aplicable a gran número de espacios conocidos; además, es válido para todo p positivo sin ninguna condición más.
Éste permite obtener mejoras en la integrabilidad de funciones Lipschitz.

¿Qué pasa si el espacio ya no cumple que la constante es uno?
El método anterior falla porque con el mismo argumento obtenemos que

$$\|\chi_{M_t \setminus M_{at}} |\nabla f|\|_X^p \leq M_{(p)}(X)^p \|\chi_{M_t} |\nabla f|\|_X^p - \|\chi_{M_{at}} |\nabla f|\|_X^p,$$

pero no es posible encontrar g a la cual aplicarle la observación.
Nuestro resultado es aplicable a gran número de espacios conocidos; además, es válido para todo p positivo sin ninguna condición más.
Éste permite obtener mejoras en la integrabilidad de funciones Lipschitz.

Un espacio cuasi-Banach X es $p-$convexo o $p-$cóncavo si existe $M \geq 1$ tal que para $n \in \mathbb{N}$ y $\{f_i\}_{i=1}^n \subset X$ se cumple

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^p \right)^{1/p} \right\| \leq M \left(\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^p \right)^{1/p}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^p \right)^{1/p} \leq M \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^p \right)^{1/p} \right\|,$$

respectivamente.

Un espacio cuasi-Banach X es $p-$convexo o $p-$cóncavo si existe $M \geq 1$ tal que para $n \in \mathbb{N}$ y $\{f_i\}_{i=1}^n \subset X$ se cumple

$$\Big\|\Big(\sum_{i=1}^n |f_i|^p\Big)^{1/p}\Big\| \leq M\Big(\sum_{i=1}^n \|f_i\|^p\Big)^{1/p}$$

$$\Big(\sum_{i=1}^n \|f_i\|^p\Big)^{1/p} \leq M\Big\|\Big(\sum_{i=1}^n |f_i|^p\Big)^{1/p}\Big\|,$$

respectivamente.
Como ejemplo, $L^p(\mu)$ es p-convexo y p-cóncavo con constante uno.

Un espacio cuasi-Banach X es $p-$convexo o $p-$cóncavo si existe $M \geq 1$ tal que para $n \in \mathbb{N}$ y $\{f_i\}_{i=1}^n \subset X$ se cumple

$$\Big\|\Big(\sum_{i=1}^n |f_i|^p\Big)^{1/p}\Big\| \leq M\Big(\sum_{i=1}^n \|f_i\|^p\Big)^{1/p}$$

$$\Big(\sum_{i=1}^n \|f_i\|^p\Big)^{1/p} \leq M\Big\|\Big(\sum_{i=1}^n |f_i|^p\Big)^{1/p}\Big\|,$$

respectivamente.

Como ejemplo, $L^p(\mu)$ es p-convexo y p-cóncavo con constante uno. El espacio de Lorentz clásico, $\Lambda_{p,w}$, es p-convexo con constante uno cuando w es decreciente, y es p-cóncavo con constante uno cuando w es creciente.

Dada $\mathcal{A}$ una álgebra de subconjuntos de Ω,

Dada $\mathcal{A}$ una álgebra de subconjuntos de Ω, una función $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ es monótona si satisface $\phi(\varnothing) = 0$ y $\phi(A) \leq \phi(B)$ cuando $A \subset B$.

Dada $\mathcal{A}$ una álgebra de subconjuntos de Ω, una función $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ es monótona si satisface $\phi(\varnothing) = 0$ y $\phi(A) \leq \phi(B)$ cuando $A \subset B$.
Decimos que ϕ es una sub-medida si para $A, B \in \mathcal{A}$ conjuntos disjuntos

$$\phi(A \cup B) \leq \phi(A) + \phi(B)$$

Dada $\mathcal{A}$ una álgebra de subconjuntos de Ω, una función $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ es monótona si satisface $\phi(\varnothing) = 0$ y $\phi(A) \leq \phi(B)$ cuando $A \subset B$.
Decimos que ϕ es una sub-medida si para $A, B \in \mathcal{A}$ conjuntos disjuntos

$$\phi(A \cup B) \leq \phi(A) + \phi(B)$$

y una super-medida si $\phi(A \cup B) \geq \phi(A) + \phi(B)$.

Dada $\mathcal{A}$ una álgebra de subconjuntos de Ω, una función $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ es monótona si satisface $\phi(\varnothing) = 0$ y $\phi(A) \leq \phi(B)$ cuando $A \subset B$.
Decimos que ϕ es una sub-medida si para $A, B \in \mathcal{A}$ conjuntos disjuntos

$$\phi(A \cup B) \leq \phi(A) + \phi(B)$$

y una super-medida si $\phi(A \cup B) \geq \phi(A) + \phi(B)$.
Diremos que ϕ está normalizada si $\phi(\Omega) = 1$,

Dada $\mathcal{A}$ una álgebra de subconjuntos de Ω, una función $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ es monótona si satisface $\phi(\varnothing) = 0$ y $\phi(A) \leq \phi(B)$ cuando $A \subset B$.
Decimos que ϕ es una sub-medida si para $A, B \in \mathcal{A}$ conjuntos disjuntos

$$\phi(A \cup B) \leq \phi(A) + \phi(B)$$

y una super-medida si $\phi(A \cup B) \geq \phi(A) + \phi(B)$.
Diremos que ϕ está normalizada si $\phi(\Omega) = 1$, y que ϕ satisface una upper p-estimate si ϕ^p es una sub-medida.

Dada $\mathcal{A}$ una álgebra de subconjuntos de Ω, una función $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ es monótona si satisface $\phi(\varnothing) = 0$ y $\phi(A) \leq \phi(B)$ cuando $A \subset B$.
Decimos que ϕ es una sub-medida si para $A, B \in \mathcal{A}$ conjuntos disjuntos

$$\phi(A \cup B) \leq \phi(A) + \phi(B)$$

y una super-medida si $\phi(A \cup B) \geq \phi(A) + \phi(B)$.
Diremos que ϕ está normalizada si $\phi(\Omega) = 1$, y que ϕ satisface una upper p-estimate si ϕ^p es una sub-medida.

Teorema

Supongamos que $0 < p < 1$ y que ϕ es una super-medida normalizada en Ω con una upper $p-$estimate. Entonces, existe una medida μ en $\mathcal{A}$ tal que $\mu \geq \phi$, $\mu(\Omega) \leq K_p$, donde

$$K_p = \frac{2}{(2^p - 1)^{1/p}} - 1.$$

Teorema

Sea $a > 1$ constante. Tomemos $0 < p < \infty$. Supongamos que X es un espacio de funciones Banach con una lower $p-$estimate. Tenemos

$$\int_0^\infty t^p Cap_X(\{|f| \geq t\})^p \frac{dt}{t} \leq 2^p c \, \|\nabla f\|_X^p \, ,$$

para $c = c(p, M_{(p)}(X))$.
Además se cumple:

$$\int_0^\infty t^p Cap_X(\overline{\{|f| > at\}}, \{|f| > t\})^p \frac{dt}{t} \leq c \, \| |\nabla f| \|_X^p \, , \tag{6}$$

donde $c = c(a, p, M_{(p)}(X))$.

Teorema

Sea $a > 1$ constante. Tomemos $0 < p < \infty$. Supongamos que X es un espacio de funciones Banach con una lower $p-$estimate. Tenemos

$$\int_0^\infty t^p Cap_X(\{|f| \geq t\})^p \frac{dt}{t} \leq 2^p c \, \|\nabla f\|_X^p ,$$

para $c = c(p, M_{(p)}(X))$.
Además se cumple:

$$\int_0^\infty t^p Cap_X(\overline{\{|f| > at\}}, \{|f| > t\})^p \frac{dt}{t} \leq c \, \||\nabla f|\|_X^p , \tag{6}$$

donde $c = c(a, p, M_{(p)}(X))$.

Teorema

Sea $a > 1$ constante. Tomemos $0 < p < \infty$. Supongamos que X es un espacio de funciones Banach con una lower $p-$estimate. Tenemos

$$\int_0^\infty t^p Cap_X(\{|f| \geq t\})^p \frac{dt}{t} \leq 2^p c \, \|\nabla f\|_X^p \, ,$$

para $c = c(p, M_{(p)}(X))$.
Además se cumple:

$$\int_0^\infty t^p Cap_X(\overline{\{|f| > at\}}, \{|f| > t\})^p \frac{dt}{t} \leq c \, \||\nabla f|\|_X^p \, , \qquad (6)$$

donde $c = c(a, p, M_{(p)}(X))$.

Caso $p \neq 1$:

Caso $p \neq 1$: Sea $f \in Lip_0(\Omega)$ y asumamos s.p.g que $\|\nabla f\|_X < \infty$, y que ésta es positiva.

Caso $p \neq 1$: Sea $f \in Lip_0(\Omega)$ y asumamos s.p.g que $\|\nabla f\|_X < \infty$, y que ésta es positiva. Definimos la sub-medida

$$\phi(A) = \frac{\| |\nabla f| \, \chi_A \|_X}{\|\nabla f\|_X} \ (A \in \mathcal{B}(\Omega)).$$

Caso $p \neq 1$: Sea $f \in Lip_0(\Omega)$ y asumamos s.p.g que $\|\nabla f\|_X < \infty$, y que ésta es positiva. Definimos la sub-medida

$$\phi(A) = \frac{\| |\nabla f| \, \chi_A \|_X}{\|\nabla f\|_X} \ (A \in \mathcal{B}(\Omega)).$$

De la lower $p-$estimate de X, resulta que para $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{B}(\Omega)$ disjuntos se tiene:

$$\phi(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \geq \frac{1}{M_{(p)}(X)} \left(\phi^p(A_1) + \cdots + \phi^p(A_n)\right)^{1/p}.$$

Caso $p \neq 1$: Sea $f \in Lip_0(\Omega)$ y asumamos s.p.g que $\|\nabla f\|_X < \infty$, y que ésta es positiva. Definimos la sub-medida

$$\phi(A) = \frac{\| |\nabla f| \, \chi_A \|_X}{\|\nabla f\|_X} \ (A \in \mathcal{B}(\Omega)).$$

De la lower $p-$estimate de X, resulta que para $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{B}(\Omega)$ disjuntos se tiene:

$$\phi(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \geq \frac{1}{M_{(p)}(X)} \left(\phi^p(A_1) + \cdots + \phi^p(A_n)\right)^{1/p}.$$

Definimos $\psi(A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \phi^p(A_i) \right\}$ donde el supremo recorre todas las particiones $(A_1, \cdots, A_n)$ tales que $A = \bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i$.

Caso $p \neq 1$: Sea $f \in Lip_0(\Omega)$ y asumamos s.p.g que $\|\nabla f\|_X < \infty$, y que ésta es positiva. Definimos la sub-medida

$$\phi(A) = \frac{\| |\nabla f| \, \chi_A \|_X}{\|\nabla f\|_X} \ (A \in \mathcal{B}(\Omega)).$$

De la lower $p-$estimate de X, resulta que para $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{B}(\Omega)$ disjuntos se tiene:

$$\phi(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \geq \frac{1}{M_{(p)}(X)} \left(\phi^p(A_1) + \cdots + \phi^p(A_n) \right)^{1/p}.$$

Definimos $\psi(A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \phi^p(A_i) \right\}$ donde el supremo recorre todas las particiones $(A_1, \cdots, A_n)$ tales que $A = \bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i$. Entonces, ψ es una super-medida con una upper $r-$estimate donde $r := min(p, 1/p)$ y

$$\frac{\psi}{\left(M_{(p)}(X)\right)^p} \leq \phi^p \leq \psi. \tag{7}$$

Definiendo $\varphi(A) := \frac{\psi(A)}{\psi(\Omega)}$ $(A \in \mathcal{B}(\Omega))$ obtenemos una super-medida normalizada que satisface una upper $r-$estimate.

Definiendo $\varphi(A) := \frac{\psi(A)}{\psi(\Omega)}$ $(A \in \mathcal{B}(\Omega))$ obtenemos una super-medida normalizada que satisface una upper $r-$estimate. Por el Teorema de Kalton-Montgomery-Smith, existe una medida μ en Ω tal que

$$\varphi \leq \mu, \ \ \mu(\Omega) \leq K_r.$$

Definiendo $\varphi(A) := \frac{\psi(A)}{\psi(\Omega)}$ $(A \in \mathcal{B}(\Omega))$ obtenemos una super-medida normalizada que satisface una upper $r-$estimate. Por el Teorema de Kalton-Montgomery-Smith, existe una medida μ en Ω tal que

$$\varphi \leq \mu, \ \ \mu(\Omega) \leq K_r.$$

Tenemos que $\mu(M_t \setminus M_{at}) = \mu(M_t) - \mu(M_{at})$ siendo esta función decreciente.

Definiendo $\varphi(A) := \frac{\psi(A)}{\psi(\Omega)}$ $(A \in \mathcal{B}(\Omega))$ obtenemos una super-medida normalizada que satisface una upper $r-$estimate. Por el Teorema de Kalton-Montgomery-Smith, existe una medida μ en Ω tal que

$$\varphi \leq \mu, \ \ \mu(\Omega) \leq K_r.$$

Tenemos que $\mu(M_t \diagdown M_{at}) = \mu(M_t) - \mu(M_{at})$ siendo esta función decreciente. Obtenemos pues que

$$\mu(M_0)\log(a) = \int_0^\infty \mu(M_t \diagdown M_{at})\frac{dt}{t} \geq \int_0^\infty \frac{\psi(M_t \diagdown M_{at})}{\psi(\Omega)}\frac{dt}{t} \geq$$

$$\frac{1}{\psi(\Omega)}\int_0^\infty \phi^p(M_t \diagdown M_{at})\frac{dt}{t} = \frac{1}{\psi(\Omega)}\int_0^\infty \frac{\left\| |\nabla f| \chi_{M_t \diagdown M_{at}} \right\|_X^p}{\|\nabla f\|_X^p}\frac{dt}{t}.$$

Definiendo $\varphi(A) := \frac{\psi(A)}{\psi(\Omega)}$ $(A \in \mathcal{B}(\Omega))$ obtenemos una super-medida normalizada que satisface una upper $r-$estimate. Por el Teorema de Kalton-Montgomery-Smith, existe una medida μ en Ω tal que

$$\varphi \leq \mu, \;\; \mu(\Omega) \leq K_r.$$

Tenemos que $\mu(M_t \diagdown M_{at}) = \mu(M_t) - \mu(M_{at})$ siendo esta función decreciente. Obtenemos pues que

$$\mu(M_0) \log(a) = \int_0^\infty \mu(M_t \diagdown M_{at}) \frac{dt}{t} \geq \int_0^\infty \frac{\psi(M_t \diagdown M_{at})}{\psi(\Omega)} \frac{dt}{t} \geq$$

$$\frac{1}{\psi(\Omega)} \int_0^\infty \phi^p(M_t \diagdown M_{at}) \frac{dt}{t} = \frac{1}{\psi(\Omega)} \int_0^\infty \frac{\left\| |\nabla f| \chi_{M_t \diagdown M_{at}} \right\|_X^p}{\|\nabla f\|_X^p} \frac{dt}{t}.$$

Por tanto, $\int_0^\infty \left\| |\nabla f| \, \chi_{M_t \diagdown M_{at}} \right\|_X^p \frac{dt}{t} \leq K_r \left(M_{(p)}(X) \right)^p \log a \, \|\nabla f\|_X^p$.

Consideremos ahora $\Lambda_t(f) = min\left\{\frac{(|f|-t)_+}{(a-1)t}, 1\right\}$.

Consideremos ahora $\Lambda_t(f) = min\left\{\frac{(|f|-t)_+}{(a-1)t}, 1\right\}$. Como $\Lambda_t(f) \in W(\bar{M}_{at}, M_t)$ y $|\nabla\Lambda_t(f)| = \frac{1}{(a-1)t}|\nabla f|\,\chi_{M_t \setminus M_{at}}$, resulta que:

Consideremos ahora $\Lambda_t(f) = min\left\{\frac{(|f|-t)_+}{(a-1)t}, 1\right\}$. Como $\Lambda_t(f) \in W(\bar{M}_{at}, M_t)$ y $|\nabla\Lambda_t(f)| = \frac{1}{(a-1)t}\,|\nabla f|\,\chi_{M_t \setminus M_{at}}$, resulta que:

$$\left\|\,|\nabla f|\,\chi_{M_t \setminus M_{at}}\right\|_X^p \geq (a-1)^p\, t^p Cap_X(\bar{M}_{at}, M_t)^p.$$

Se termina insertando esta estimación en la parte izquierda de la desigualdad integral anterior.

Consideremos ahora $\Lambda_t(f) = min\left\{\frac{(|f|-t)_+}{(a-1)t}, 1\right\}$. Como $\Lambda_t(f) \in W(\bar{M}_{at}, M_t)$ y $|\nabla\Lambda_t(f)| = \frac{1}{(a-1)t}\,|\nabla f|\,\chi_{M_t\setminus M_{at}}$, resulta que:

$$\left\||\nabla f|\,\chi_{M_t\setminus M_{at}}\right\|_X^p \geq (a-1)^p\, t^p Cap_X(\bar{M}_{at}, M_t)^p.$$

Se termina insertando esta estimación en la parte izquierda de la desigualdad integral anterior. Tenemos que $c = \frac{M_{(p)}(X)^p K_r \log a}{(a-1)^p}$.

Consideremos ahora $\Lambda_t(f) = min\left\{\frac{(|f|-t)_+}{(a-1)t}, 1\right\}$. Como $\Lambda_t(f) \in W(\bar{M}_{at}, M_t)$ y $|\nabla\Lambda_t(f)| = \frac{1}{(a-1)t}\,|\nabla f|\,\chi_{M_t \setminus M_{at}}$, resulta que:

$$\left\| |\nabla f|\,\chi_{M_t \setminus M_{at}} \right\|_X^p \geq (a-1)^p\, t^p Cap_X(\bar{M}_{at}, M_t)^p.$$

Se termina insertando esta estimación en la parte izquierda de la desigualdad integral anterior. Tenemos que $c = \frac{M_{(p)}(X)^p K_r \log a}{(a-1)^p}$.

Finalmente, si $p = 1$, resulta que X es q-cóncavo para todo $q > 1$.

Consideremos ahora $\Lambda_t(f) = min\left\{\frac{(|f|-t)_+}{(a-1)t}, 1\right\}$. Como $\Lambda_t(f) \in W(\bar{M}_{at}, M_t)$ y $|\nabla \Lambda_t(f)| = \frac{1}{(a-1)t} |\nabla f| \chi_{M_t \setminus M_{at}}$, resulta que:

$$\left\| |\nabla f| \chi_{M_t \setminus M_{at}} \right\|_X^p \geq (a-1)^p \, t^p Cap_X(\bar{M}_{at}, M_t)^p.$$

Se termina insertando esta estimación en la parte izquierda de la desigualdad integral anterior. Tenemos que $c = \frac{M_{(p)}(X)^p K_r \log a}{(a-1)^p}$.

Finalmente, si $p = 1$, resulta que X es q-cóncavo para todo $q > 1$. Por ello puede ser renormado de manera equivalente de modo que el espacio X con la nueva norma satisface una lower q-estimate con constante uno

Consideremos ahora $\Lambda_t(f) = min\left\{\frac{(|f|-t)_+}{(a-1)t}, 1\right\}$. Como $\Lambda_t(f) \in W(\bar{M}_{at}, M_t)$ y $|\nabla\Lambda_t(f)| = \frac{1}{(a-1)t}\,|\nabla f|\,\chi_{M_t \setminus M_{at}}$, resulta que:

$$\left\| |\nabla f|\,\chi_{M_t \setminus M_{at}} \right\|_X^p \geq (a-1)^p\, t^p Cap_X(\bar{M}_{at}, M_t)^p.$$

Se termina insertando esta estimación en la parte izquierda de la desigualdad integral anterior. Tenemos que $c = \frac{M_{(p)}(X)^p K_r \log a}{(a-1)^p}$.

Finalmente, si $p = 1$, resulta que X es q-cóncavo para todo $q > 1$. Por ello puede ser renormado de manera equivalente de modo que el espacio X con la nueva norma satisface una lower q-estimate con constante uno y así podemos aplicar el primer resultado. $\square$

El Teorema puede ser extendido al caso cuasi-Banach usando el Teorema de Aoki.

El Teorema puede ser extendido al caso cuasi-Banach usando el Teorema de Aoki.

Teorema

Sea $a > 1$ una constante. Tomemos $0 < p < \infty$. Supongamos que X es un espacio de funciones que satisface una lower $p-$estimate. Entonces para cada $f \in Lip_0(\Omega)$ tenemos que

$$\int_0^\infty t^p Cap_X(\{|u| \geq t\})^p \frac{dt}{t} \leq 2^p c_1 \|\nabla u\|_X^p$$

con $c_1 = c(p, c, M_{(p)}(X))$ y c la constante asociada a la cuasi-norma de X.

Como es usual, si $f \in L_0(\Omega)$, f^* denotará la reordenada decreciente de f, esto es

$$f^*(t) = inf \ \{\lambda > 0;\ \mu\,\{x \in \Omega; |f(x)| > \lambda\} \leq t\}\,,$$

y $f^{**}(t) := t^{-1} \int_0^t f^*(s)\,ds$ la función media.

Como es usual, si $f \in L_0(\Omega)$, f^* denotará la reordenada decreciente de f, esto es

$$f^*(t) = inf \ \{\lambda > 0; \ \mu \{x \in \Omega; |f(x)| > \lambda\} \leq t\},$$

y $f^{**}(t) := t^{-1} \int_0^t f^*(s)\, ds$ la función media. Recordemos que X se dice invariante por reordenamiento (r.i.) si $\|f\| = \|g\|$ cuando $f^* = g^*$.

Como es usual, si $f \in L_0(\Omega)$, f^* denotará la reordenada decreciente de f, esto es

$$f^*(t) = inf\ \{\lambda > 0;\ \mu\{x \in \Omega; |f(x)| > \lambda\} \leq t\},$$

y $f^{**}(t) := t^{-1} \int_0^t f^*(s)\,ds$ la función media.

Ejemplo (Espacios de Lorentz clásicos)

Supongamos que $0 < p < \infty$ y sea w un peso en $(0, \infty)$ que satisface la condición $\int_0^{2t} w(s)ds \lesssim \int_0^t w(s)ds$, de modo que el espacio de Lorentz

$$\Lambda_p(w) = \left\{f;\ \|f\|_{\Lambda_p(w)} := \left(\int_0^\infty f^*(x)^p w(x)\,dx\right)^{1/p} < \infty\right\},$$ es cuasi-Banach.

Como es usual, si $f \in L_0(\Omega)$, f^* denotará la reordenada decreciente de f, esto es

$$f^*(t) = inf \ \{\lambda > 0; \ \mu\{x \in \Omega; |f(x)| > \lambda\} \leq t\},$$

y $f^{**}(t) := t^{-1} \int_0^t f^*(s)\, ds$ la función media.

Ejemplo (Espacios de Lorentz clásicos)

Supongamos que $0 < p < \infty$ y sea w un peso en $(0, \infty)$ que satisface la condición $\int_0^{2t} w(s)ds \lesssim \int_0^t w(s)ds$, de modo que el espacio de Lorentz

$$\Lambda_p(w) = \left\{ f; \ \|f\|_{\Lambda_p(w)} := \left(\int_0^\infty f^*(x)^p w(x)\, dx \right)^{1/p} < \infty \right\}, \text{ es cuasi-Banach.}$$

Si w es creciente, entonces $\Lambda_p(w)$ es p-cóncavo con constante uno.

Como es usual, si $f \in L_0(\Omega)$, f^* denotará la reordenada decreciente de f, esto es

$$f^*(t) = inf \ \{\lambda > 0; \ \mu \{x \in \Omega; |f(x)| > \lambda\} \leq t\},$$

y $f^{**}(t) := t^{-1} \int_0^t f^*(s)\, ds$ la función media.

Ejemplo (Espacios de Lorentz clásicos)

Supongamos que $0 < p < \infty$ y sea w un peso en $(0, \infty)$ que satisface la condición $\int_0^{2t} w(s)ds \lesssim \int_0^t w(s)ds$, de modo que el espacio de Lorentz

$$\Lambda_p(w) = \left\{ f; \ \|f\|_{\Lambda_p(w)} := \left(\int_0^\infty f^*(x)^p w(x)\, dx \right)^{1/p} < \infty \right\}, \text{ es cuasi-Banach.}$$

Si w es creciente, entonces $\Lambda_p(w)$ es p-cóncavo con constante uno. Si $0 < \int_0^x w(t)dt < \infty$ y $\int_x^\infty t^{-p} w(t)dt < \infty$, entonces para $p \leq r < \infty$,

Como es usual, si $f \in L_0(\Omega)$, f^* denotará la reordenada decreciente de f, esto es

$$f^*(t) = inf \ \{\lambda > 0; \ \mu \{x \in \Omega; |f(x)| > \lambda\} \leq t\},$$

y $f^{**}(t) := t^{-1} \int_0^t f^*(s)\, ds$ la función media.

Ejemplo (Espacios de Lorentz clásicos)

Supongamos que $0 < p < \infty$ y sea w un peso en $(0, \infty)$ que satisface la condición $\int_0^{2t} w(s)ds \lesssim \int_0^t w(s)ds$, de modo que el espacio de Lorentz

$$\Lambda_p(w) = \left\{ f; \ \|f\|_{\Lambda_p(w)} := \left(\int_0^\infty f^*(x)^p w(x) \ dx \right)^{1/p} < \infty \right\}, \text{ es cuasi-Banach.}$$

Si w es creciente, entonces $\Lambda_p(w)$ es p-cóncavo con constante uno. Si $0 < \int_0^x w(t)dt < \infty$ y $\int_x^\infty t^{-p} w(t)dt < \infty$, entonces para $p \leq r < \infty$,

$$\Lambda_p(w) \text{ satisface una } lower\ r - estimate \text{ si, y solo si,}$$

$$t^{-p/r} \int_0^t w(s)ds \ es\ cuasi - creciente.$$

Ejemplo (Espacios de Orlicz)

Sea $\mu(\Omega) < \infty$, $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$ y ϕ una función de Young. Consideremos la norma de Luxemburg.

Ejemplo (Espacios de Orlicz)

Sea $\mu(\Omega) < \infty$, $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$ y ϕ una función de Young. Consideremos la norma de Luxemburg.

$L_\phi(\Omega)$ satisface una *lower $q -$ estimate* si, y solo si,

$\phi(\lambda u) \lesssim \lambda^q \phi(u)$ *para* $\lambda \geq 1$, $0 < q < \infty$ y todo u.

Ejemplo (Espacios de Orlicz)

Sea $\mu(\Omega) < \infty$, $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$ y ϕ una función de Young. Consideremos la norma de Luxemburg.

$L_\phi(\Omega)$ satisface una *lower q − estimate* si, y solo si,

$$\phi(\lambda u) \lesssim \lambda^q \phi(u) \text{ para } \lambda \geq 1,\ 0 < q < \infty \text{ y todo } u.$$

Si $\phi(\lambda u) \lesssim \lambda^q \phi(u)$ para todo $\lambda \geq 1$ y $u \geq u_0$,

Ejemplo (Espacios de Orlicz)

Sea $\mu(\Omega) < \infty$, $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$ y ϕ una función de Young. Consideremos la norma de Luxemburg.

$L_\phi(\Omega)$ satisface una *lower q − estimate* si, y solo si,

$$\phi(\lambda u) \lesssim \lambda^q \phi(u) \text{ para } \lambda \geq 1,\ 0 < q < \infty \text{ y todo } u.$$

Si $\phi(\lambda u) \lesssim \lambda^q \phi(u)$ para todo $\lambda \geq 1$ y $u \geq u_0$, entonces el espacio de Orlicz $L_\phi(\Omega)$ es r-cóncavo para todo $r > q$.

Ejemplo (Espacios de Orlicz)

Sea $\mu(\Omega) < \infty$, $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$ y ϕ una función de Young. Consideremos la norma de Luxemburg.

$L_\phi(\Omega)$ satisface una *lower q − estimate* si, y solo si,

$$\phi(\lambda u) \lesssim \lambda^q \phi(u) \; para \; \lambda \geq 1, \; 0 < q < \infty \text{ y todo } u.$$

Si $\phi(\lambda u) \lesssim \lambda^q \phi(u)$ para todo $\lambda \geq 1$ y $u \geq u_0$, entonces el espacio de Orlicz $L_\phi(\Omega)$ es r-cóncavo para todo $r > q$.

Si $\mu(\Omega) = \infty$, las anteriores condiciones necesitan ser satisfechas para todo $u \geq 0$.

Ejemplo (Espacios L^p de norma mixta)

El espacio $L^q(\Omega_2)[L^p(\Omega_1)]$ para $1 \leq p, q \leq \infty$, definido por la condición

$$\|f\| := \left(\int \left(\int |f(x,y)|^p \, d\mu_1(x) \right)^{q/p} d\mu_2(y) \right)^{1/q} < \infty,$$

satisface una lower $pq-$estimate con constante uno.

Si f y g son disjuntas, se sigue que $\|f+g\|^{pq} \geq \|f\|^{pq} + \|g\|^{pq}$.
$L^{p_n}(\mu_n)[\ldots[L^{p_1}(\mu_1)]]$ tiene una lower $p_1 \cdots p_n-$estimate con constante uno.

Ejemplo (Espacios L^p de norma mixta)

El espacio $L^q(\Omega_2)[L^p(\Omega_1)]$ para $1 \leq p, q \leq \infty$, definido por la condición

$$\|f\| := \left(\int \left(\int |f(x,y)|^p \, d\mu_1(x) \right)^{q/p} d\mu_2(y) \right)^{1/q} < \infty,$$

satisface una lower $pq-$estimate con constante uno.

Si f y g son disjuntas, se sigue que $\|f+g\|^{pq} \geq \|f\|^{pq} + \|g\|^{pq}$.

$L^{p_n}(\mu_n)[\ldots[L^{p_1}(\mu_1)]]$ tiene una lower $p_1 \cdots p_n-$estimate con constante uno.

Ejemplo (Espacios L^p de norma mixta)

El espacio $L^q(\Omega_2)[L^p(\Omega_1)]$ para $1 \leq p, q \leq \infty$, definido por la condición

$$\|f\| := \left(\int \left(\int |f(x,y)|^p \, d\mu_1(x) \right)^{q/p} d\mu_2(y) \right)^{1/q} < \infty,$$

satisface una lower $pq-$estimate con constante uno.

Si f y g son disjuntas, se sigue que $\|f+g\|^{pq} \geq \|f\|^{pq} + \|g\|^{pq}$.

$L^{p_n}(\mu_n)[\ldots[L^{p_1}(\mu_1)]]$ tiene una lower $p_1 \cdots p_n-$estimate con constante uno.

Ejemplo (Espacios L^p de norma mixta)

El espacio $L^q(\Omega_2)[L^p(\Omega_1)]$ para $1 \leq p, q \leq \infty$, definido por la condición

$$\|f\| := \left(\int \left(\int |f(x,y)|^p \, d\mu_1(x) \right)^{q/p} d\mu_2(y) \right)^{1/q} < \infty,$$

satisface una lower $pq-$estimate con constante uno.

Si f y g son disjuntas, se sigue que $\|f+g\|^{pq} \geq \|f\|^{pq} + \|g\|^{pq}$.
$L^{p_n}(\mu_n)[\dots[L^{p_1}(\mu_1)]]$ tiene una lower $p_1 \cdots p_n-$estimate con constante uno.

Ejemplo (Espacios de Lorentz clásicos de norma mixta)

Sea $1 \leq p, q < \infty$ y, para cada función medible f en $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$,

Ejemplo (Espacios de Lorentz clásicos de norma mixta)

Sea $1 \leq p, q < \infty$ y, para cada función medible f en $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, denotamos por $f_y^*(x, t)$ la reordenada decreciente de f con respecto a la segunda variable cuando la primera variable x es fijada.

Ejemplo (Espacios de Lorentz clásicos de norma mixta)

Sea $1 \leq p, q < \infty$ y, para cada función medible f en $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, denotamos por $f_y^*(x, t)$ la reordenada decreciente de f con respecto a la segunda variable cuando la primera variable x es fijada. Sean u y v pesos en Ω_1 y Ω_2, respectivamente.

Ejemplo (Espacios de Lorentz clásicos de norma mixta)

Sea $1 \leq p, q < \infty$ y, para cada función medible f en $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, denotamos por $f_y^*(x,t)$ la reordenada decreciente de f con respecto a la segunda variable cuando la primera variable x es fijada. Sean u y v pesos en Ω_1 y Ω_2, respectivamente.

El espacio $\Lambda^q(v)[\Lambda^p(u)]$ definido por la condición

$$\|f\|_{\Lambda^q(v)[\Lambda^p(u)]} := \left(\int_0^\infty \left[\left(\int_0^\infty (f_y^*(\cdot,t))^p u(t)dt \right)^*(s) \right]^{q/p} v(s)ds \right)^{1/q} < \infty$$

satisface una lower $pq-$estimate

Ejemplo (Espacios de Lorentz clásicos de norma mixta)

Sea $1 \leq p, q < \infty$ y, para cada función medible f en $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, denotamos por $f_y^*(x,t)$ la reordenada decreciente de f con respecto a la segunda variable cuando la primera variable x es fijada. Sean u y v pesos en Ω_1 y Ω_2, respectivamente.

El espacio $\Lambda^q(v)[\Lambda^p(u)]$ definido por la condición

$$\|f\|_{\Lambda^q(v)[\Lambda^p(u)]} := \left(\int_0^\infty \left[\left(\int_0^\infty (f_y^*(\cdot,t))^p u(t) dt \right)^* (s) \right]^{q/p} v(s) ds \right)^{1/q} < \infty$$

satisface una lower $pq-$estimate si u es tal que $U(x) := \int_0^x u(t)\, dt$ es cuasi-superaditiva.

Sea Ω un dominio, μ una medida de Borel en Ω y f medible.
Recordemos que la función de distribución de f es definida como

$$\mu_f(\lambda) := \mu\{x \in \Omega; |f(x)| > \lambda\}, \ (\lambda \geq 0).$$

Sea X cuasi-Banach con función fundamental

$$\varphi_X(t) := \|\chi_A\| \qquad (\mu(A) = t).$$

Para un peso w y $0 < p, q < \infty$, $\Lambda^{p,q}(w)$ viene definido por la condición

$$\|f\|_{\Lambda^{p,q}(w)} \simeq \left(\int_0^\infty p t^{q-1} W^{q/p}(\mu_f(t))dt\right)^{1/q} < \infty,$$

donde $W(x) := \int_0^x w(s)ds$.

Sea Ω un dominio, μ una medida de Borel en Ω y f medible. Recordemos que la función de distribución de f es definida como

$$\mu_f(\lambda) := \mu\{x \in \Omega; |f(x)| > \lambda\}, \ (\lambda \geq 0).$$

Sea X cuasi-Banach con función fundamental

$$\varphi_X(t) := \|\chi_A\| \qquad (\mu(A) = t).$$

Para un peso w y $0 < p, q < \infty$, $\Lambda^{p,q}(w)$ viene definido por la condición

$$\|f\|_{\Lambda^{p,q}(w)} \simeq \Big(\int_0^\infty pt^{q-1} W^{q/p}(\mu_f(t))dt\Big)^{1/q} < \infty,$$

donde $W(x) := \int_0^x w(s)ds$.

Sea Ω un dominio, μ una medida de Borel en Ω y f medible. Recordemos que la función de distribución de f es definida como

$$\mu_f(\lambda) := \mu\{x \in \Omega; |f(x)| > \lambda\}, \ (\lambda \geq 0).$$

Sea X cuasi-Banach con función fundamental

$$\varphi_X(t) := \|\chi_A\| \qquad (\mu(A) = t).$$

Para un peso w y $0 < p, q < \infty$, $\Lambda^{p,q}(w)$ viene definido por la condición

$$\|f\|_{\Lambda^{p,q}(w)} \simeq \left(\int_0^\infty p t^{q-1} W^{q/p}(\mu_f(t)) dt \right)^{1/q} < \infty,$$

donde $W(x) := \int_0^x w(s) ds$.

Sea Ω un dominio, μ una medida de Borel en Ω y f medible. Recordemos que la función de distribución de f es definida como

$$\mu_f(\lambda) := \mu\{x \in \Omega; |f(x)| > \lambda\}, \ (\lambda \geq 0).$$

Sea X cuasi-Banach con función fundamental

$$\varphi_X(t) := \|\chi_A\| \qquad (\mu(A) = t).$$

Para un peso w y $0 < p, q < \infty$, $\Lambda^{p,q}(w)$ viene definido por la condición

$$\|f\|_{\Lambda^{p,q}(w)} \simeq \left(\int_0^\infty p t^{q-1} W^{q/p}(\mu_f(t)) dt \right)^{1/q} < \infty,$$

donde $W(x) := \int_0^x w(s) ds$.

Sean μ y ν dos medidas localmente finitas en Ω y $0 < p < \infty$.

Sean μ y ν dos medidas localmente finitas en Ω y $0 < p < \infty$. Sea X un espacio de funciones cuasi-Banach en Ω, Sean μ y ν dos medidas localmente finitas en Ω y $0 < p < \infty$. Sea X un espacio de funciones cuasi-Banach en Ω, Y r.i. en (Ω, μ), Sean μ y ν dos medidas localmente finitas en Ω y $0 < p < \infty$. Sea X un espacio de funciones cuasi-Banach en Ω, Y r.i. en (Ω, μ), y sea Z r.i. en (Ω, ν).

Sean μ y ν dos medidas localmente finitas en Ω y $0 < p < \infty$. Sea X un espacio de funciones cuasi-Banach en Ω, Y r.i. en (Ω, μ), y sea Z r.i. en (Ω, ν). Pueden renormarse de manera equivalente para tener función fundamental derivable.

Sean μ y ν dos medidas localmente finitas en Ω y $0 < p < \infty$. Sea X un espacio de funciones cuasi-Banach en Ω, Y r.i. en (Ω, μ), y sea Z r.i. en (Ω, ν).

Teorema

Si X satisface una lower $p-$estimate, son equivalentes:

(i) *Existe una constante $A > 0$ tal que*

$$\|f\|_{\Lambda^{1,p}(\varphi'_Y)} \leq A(\|\nabla f\|_X + \|f\|_{\Lambda^{1,p}(\varphi'_Z)}) \qquad (f \in \mathrm{Lip}_0(\Omega)).$$

(ii) *Existe una constante $B > 0$ tal que*

$$\varphi_Y(\mu(g)) \leq B(\mathrm{Cap}_X(\bar{g}, G) + \varphi_Z(\nu(G))) \qquad (g \subset\subset G \subset\subset \Omega).$$

Teorema

Si X satisface una lower p−estimate, son equivalentes:

(i) $\|f\|_{\Lambda^{1,p}(\varphi_Y')} \lesssim \|\nabla f\|_X$ *para cada* $f \in \mathrm{Lip}_0(\Omega)$.

(ii) *Para todo par de conjuntos g y G tales que* $g \subset\subset G \subset\subset \Omega$, $\varphi_Y(\mu(g)) \lesssim \mathrm{Cap}_X(\overline{g}, G)$.

Teorema

Si X satisface una lower $p-$estimate, son equivalentes:

(i) $\|f\|_{\Lambda^{1,p}(\varphi'_Y)} \lesssim \|\nabla f\|_X$ *para cada* $f \in \mathrm{Lip}_0(\Omega)$.

(ii) *Para todo par de conjuntos g y G tales que $g \subset\subset G \subset\subset \Omega$,* $\varphi_Y(\mu(g)) \lesssim \mathrm{Cap}_X(\overline{g}, G)$.

Teorema

Si X satisface una lower $p-$estimate, son equivalentes:

(i) $\|f\|_{\Lambda^{1,p}(\varphi'_Y)} \lesssim \|\nabla f\|_X$ *para cada* $f \in \mathrm{Lip}_0(\Omega)$.

(ii) *Para todo par de conjuntos g y G tales que* $g \subset\subset G \subset\subset \Omega$, $\varphi_Y(\mu(g)) \lesssim \mathrm{Cap}_X(\overline{g}, G)$.

Teorema

Si X satisface una lower $p-$estimate, son equivalentes:

(i) $\|f\|_{\Lambda^{1,p}(\varphi'_Y)} \lesssim \|\nabla f\|_X$ *para cada* $f \in \mathrm{Lip}_0(\Omega)$.

(ii) *Para todo par de conjuntos g y G tales que* $g \subset\subset G \subset\subset \Omega$, $\varphi_Y(\mu(g)) \lesssim \mathrm{Cap}_X(\overline{g}, G)$.

Sea X r.i. con una lower p-estimate.

Teorema

Si X satisface una lower $p-$estimate, son equivalentes:

(i) $\|f\|_{\Lambda^{1,p}(\varphi'_Y)} \lesssim \|\nabla f\|_X$ *para cada* $f \in \mathrm{Lip}_0(\Omega)$.

(ii) *Para todo par de conjuntos g y G tales que $g \subset\subset G \subset\subset \Omega$,* $\varphi_Y(\mu(g)) \lesssim \mathrm{Cap}_X(\overline{g}, G)$.

Sea X r.i. con una lower p-estimate. Entonces para $f \in \mathrm{Lip}_0(\Omega)$

$$\|f\|_{L^{1,p}(\mathrm{Cap}_X)} \lesssim \|\nabla f\|_X.$$

Teorema

Si X satisface una lower $p-$estimate, son equivalentes:

(i) $\|f\|_{\Lambda^{1,p}(\varphi'_Y)} \lesssim \|\nabla f\|_X$ *para cada* $f \in \mathrm{Lip}_0(\Omega)$.

(ii) *Para todo par de conjuntos g y G tales que* $g \subset\subset G \subset\subset \Omega$, $\varphi_Y(\mu(g)) \lesssim \mathrm{Cap}_X(\overline{g}, G)$.

Sea X r.i. con una lower p-estimate. Entonces para $f \in \mathrm{Lip}_0(\Omega)$

$$\|f\|_{L^{1,p}(\mathrm{Cap}_X)} \lesssim \|\nabla f\|_X.$$

Además, si $M(X)$ denota al mayor espacio r.i. con la misma función fundamental que X, se tiene que para $f \in \mathrm{Lip}_0(\Omega)$

$$\|f\|_{M(X)} \lesssim \|\nabla f\|_X \iff \|f\|_{\Lambda_{1,p}(\varphi'_X)} \lesssim \|\nabla f\|_X.$$

Referencias

- Carro, M. and Soria, J. *Weighted Lorentz Spaces and the Hardy Operator*, J. Funct. Anal. **112** (1993), no. 2, 480-494.
- Cerdà, J. *Lorentz capacity spaces*, Contemporary Mathematics of the AMS **445** (2007), 49-55.
- Cerdà, J., Martín, J. and Silvestre, P. *Capacitary function spaces*, Collectanea Mathematica **62**, no.1, 95-118.
- Cerdà, J., Martín, J. and Silvestre, P. *Interpolation of quasicontinuous functions*, to appear in Józef Marcinkiewicz Centenary Volume, Banach Center Publications.
- Costea, S. and Maz'ya, V. *Conductor inequalities and criteria for Sobolev-Lorentz two-weight inequalities* , Int. Math. Ser. (N. Y.), **9** (2009), Springer, New York, 103-121.
- Kalton, N. J. and Montgomery-Smith, S. J. *Set-functions and factorization*, Arch. Math. (Basel) **61** (1993), no. 2, 183-200.
- Kamínska, A. and Maligranda, L. *Order convexity and concavity of Lorentz spaces* $\Lambda_{p,w}$, $0 < p < \infty$, Stud. Math. **160** (2004), v. 3.
- Maz'ya, V. G. *Conductor inequalities and criteria for Sobolev type two-weight embeddings*. J. Comput. Appl. Math. **194** (2006), no. 11, 94-114.
- Maz'ya, V. G. *Sobolev Spaces, with applications to elliptic partial differential equations*, Springer-Verlag, 2011.

Referencias

- Carro, M. and Soria, J. *Weighted Lorentz Spaces and the Hardy Operator*, J. Funct. Anal. **112** (1993), no. 2, 480-494.
- Cerdà, J. *Lorentz capacity spaces*, Contemporary Mathematics of the AMS **445** (2007), 49-55.
- Cerdà, J., Martín, J. and Silvestre, P. *Capacitary function spaces*, Collectanea Mathematica **62**, no.1, 95-118.
- Cerdà, J., Martín, J. and Silvestre, P. *Interpolation of quasicontinuous functions*, to appear in Józef Marcinkiewicz Centenary Volume, Banach Center Publications.
- Costea, S. and Maz'ya, V. *Conductor inequalities and criteria for Sobolev-Lorentz two-weight inequalities* , Int. Math. Ser. (N. Y.), **9** (2009), Springer, New York, 103-121.
- Kalton, N. J. and Montgomery-Smith, S. J. *Set-functions and factorization*, Arch. Math. (Basel) **61** (1993), no. 2, 183-200.
- Kamínska, A. and Maligranda, L. *Order convexity and concavity of Lorentz spaces* $\Lambda_{p,w}$, $0 < p < \infty$, Stud. Math. **160** (2004), v. 3.
- Maz'ya, V. G. *Conductor inequalities and criteria for Sobolev type two-weight embeddings*. J. Comput. Appl. Math. **194** (2006), no. 11, 94-114.
- Maz'ya, V. G. *Sobolev Spaces, with applications to elliptic partial differential equations*, Springer-Verlag, 2011.

Referencias

Carro, M. and Soria, J. *Weighted Lorentz Spaces and the Hardy Operator*, J. Funct. Anal. **112** (1993), no. 2, 480-494.

Cerdà, J. *Lorentz capacity spaces*, Contemporary Mathematics of the AMS **445** (2007), 49-55.

Cerdà, J., Martín, J. and Silvestre, P. *Capacitary function spaces*, Collectanea Mathematica **62**, no.1, 95-118.

Cerdà, J., Martín, J. and Silvestre, P. *Interpolation of quasicontinuous functions*, to appear in Józef Marcinkiewicz Centenary Volume, Banach Center Publications.

Costea, S. and Maz'ya, V. *Conductor inequalities and criteria for Sobolev-Lorentz two-weight inequalities* , Int. Math. Ser. (N. Y.), **9** (2009), Springer, New York, 103-121.

Kalton, N. J. and Montgomery-Smith, S. J. *Set-functions and factorization*, Arch. Math. (Basel) **61** (1993), no. 2, 183-200.

Kamínska, A. and Maligranda, L. *Order convexity and concavity of Lorentz spaces* $\Lambda_{p,w}$, $0 < p < \infty$, Stud. Math. **160** (2004), v. 3.

Maz'ya, V. G. *Conductor inequalities and criteria for Sobolev type two-weight embeddings*. J. Comput. Appl. Math. **194** (2006), no. 11, 94-114.

Maz'ya, V. G. *Sobolev Spaces, with applications to elliptic partial differential equations*, Springer-Verlag, 2011.

Referencias

- Carro, M. and Soria, J. *Weighted Lorentz Spaces and the Hardy Operator*, J. Funct. Anal. **112** (1993), no. 2, 480-494.
- Cerdà, J. *Lorentz capacity spaces*, Contemporary Mathematics of the AMS **445** (2007), 49-55.
- Cerdà, J., Martín, J. and Silvestre, P. *Capacitary function spaces*, Collectanea Mathematica **62**, no.1, 95-118.
- Cerdà, J., Martín, J. and Silvestre, P. *Interpolation of quasicontinuous functions*, to appear in Józef Marcinkiewicz Centenary Volume, Banach Center Publications.
- Costea, S. and Maz'ya, V. *Conductor inequalities and criteria for Sobolev-Lorentz two-weight inequalities* , Int. Math. Ser. (N. Y.), **9** (2009), Springer, New York, 103-121.
- Kalton, N. J. and Montgomery-Smith, S. J. *Set-functions and factorization*, Arch. Math. (Basel) **61** (1993), no. 2, 183-200.
- Kamínska, A. and Maligranda, L. *Order convexity and concavity of Lorentz spaces* $\Lambda_{p,w}$, $0 < p < \infty$, Stud. Math. **160** (2004), v. 3.
- Maz'ya, V. G. *Conductor inequalities and criteria for Sobolev type two-weight embeddings*. J. Comput. Appl. Math. **194** (2006), no. 11, 94-114.
- Maz'ya, V. G. *Sobolev Spaces, with applications to elliptic partial differential equations*, Springer-Verlag, 2011.

Referencias

Carro, M. and Soria, J. *Weighted Lorentz Spaces and the Hardy Operator*, J. Funct. Anal. **112** (1993), no. 2, 480-494.

Cerdà, J. *Lorentz capacity spaces*, Contemporary Mathematics of the AMS **445** (2007), 49-55.

Cerdà, J., Martín, J. and Silvestre, P. *Capacitary function spaces*, Collectanea Mathematica **62**, no.1, 95-118.

Cerdà, J., Martín, J. and Silvestre, P. *Interpolation of quasicontinuous functions*, to appear in Józef Marcinkiewicz Centenary Volume, Banach Center Publications.

Costea, S. and Maz'ya, V. *Conductor inequalities and criteria for Sobolev-Lorentz two-weight inequalities* , Int. Math. Ser. (N. Y.), **9** (2009), Springer, New York, 103-121.

Kalton, N. J. and Montgomery-Smith, S. J. *Set-functions and factorization*, Arch. Math. (Basel) **61** (1993), no. 2, 183-200.

Kamínska, A. and Maligranda, L. *Order convexity and concavity of Lorentz spaces* $\Lambda_{p,w}$, $0 < p < \infty$, Stud. Math. **160** (2004), v. 3.

Maz'ya, V. G. *Conductor inequalities and criteria for Sobolev type two-weight embeddings*. J. Comput. Appl. Math. **194** (2006), no. 11, 94-114.

Maz'ya, V. G. *Sobolev Spaces, with applications to elliptic partial differential equations*, Springer-Verlag, 2011.

Referencias

Carro, M. and Soria, J. *Weighted Lorentz Spaces and the Hardy Operator*, J. Funct. Anal. **112** (1993), no. 2, 480-494.

Cerdà, J. *Lorentz capacity spaces*, Contemporary Mathematics of the AMS **445** (2007), 49-55.

Cerdà, J., Martín, J. and Silvestre, P. *Capacitary function spaces*, Collectanea Mathematica **62**, no.1, 95-118.

Cerdà, J., Martín, J. and Silvestre, P. *Interpolation of quasicontinuous functions*, to appear in Józef Marcinkiewicz Centenary Volume, Banach Center Publications.

Costea, S. and Maz'ya, V. *Conductor inequalities and criteria for Sobolev-Lorentz two-weight inequalities* , Int. Math. Ser. (N. Y.), **9** (2009), Springer, New York, 103-121.

Kalton, N. J. and Montgomery-Smith, S. J. *Set-functions and factorization*, Arch. Math. (Basel) **61** (1993), no. 2, 183-200.

Kamínska, A. and Maligranda, L. *Order convexity and concavity of Lorentz spaces* $\Lambda_{p,w}$, $0 < p < \infty$, Stud. Math. **160** (2004), v. 3.

Maz'ya, V. G. *Conductor inequalities and criteria for Sobolev type two-weight embeddings*. J. Comput. Appl. Math. **194** (2006), no. 11, 94-114.

Maz'ya, V. G. *Sobolev Spaces, with applications to elliptic partial differential equations*, Springer-Verlag, 2011.

Referencias

- Carro, M. and Soria, J. *Weighted Lorentz Spaces and the Hardy Operator*, J. Funct. Anal. **112** (1993), no. 2, 480-494.
- Cerdà, J. *Lorentz capacity spaces*, Contemporary Mathematics of the AMS **445** (2007), 49-55.
- Cerdà, J., Martín, J. and Silvestre, P. *Capacitary function spaces*, Collectanea Mathematica **62**, no.1, 95-118.
- Cerdà, J., Martín, J. and Silvestre, P. *Interpolation of quasicontinuous functions*, to appear in Józef Marcinkiewicz Centenary Volume, Banach Center Publications.
- Costea, S. and Maz'ya, V. *Conductor inequalities and criteria for Sobolev-Lorentz two-weight inequalities* , Int. Math. Ser. (N. Y.), **9** (2009), Springer, New York, 103-121.
- Kalton, N. J. and Montgomery-Smith, S. J. *Set-functions and factorization*, Arch. Math. (Basel) **61** (1993), no. 2, 183-200.
- Kamínska, A. and Maligranda, L. *Order convexity and concavity of Lorentz spaces* $\Lambda_{p,w}$, $0 < p < \infty$, Stud. Math. **160** (2004), v. 3.
- Maz'ya, V. G. *Conductor inequalities and criteria for Sobolev type two-weight embeddings*. J. Comput. Appl. Math. **194** (2006), no. 11, 94-114.
- Maz'ya, V. G. *Sobolev Spaces, with applications to elliptic partial differential equations*, Springer-Verlag, 2011.

Referencias

Carro, M. and Soria, J. *Weighted Lorentz Spaces and the Hardy Operator*, J. Funct. Anal. **112** (1993), no. 2, 480-494.

Cerdà, J. *Lorentz capacity spaces*, Contemporary Mathematics of the AMS **445** (2007), 49-55.

Cerdà, J., Martín, J. and Silvestre, P. *Capacitary function spaces*, Collectanea Mathematica **62**, no.1, 95-118.

Cerdà, J., Martín, J. and Silvestre, P. *Interpolation of quasicontinuous functions*, to appear in Józef Marcinkiewicz Centenary Volume, Banach Center Publications.

Costea, S. and Maz'ya, V. *Conductor inequalities and criteria for Sobolev-Lorentz two-weight inequalities* , Int. Math. Ser. (N. Y.), **9** (2009), Springer, New York, 103-121.

Kalton, N. J. and Montgomery-Smith, S. J. *Set-functions and factorization*, Arch. Math. (Basel) **61** (1993), no. 2, 183-200.

Kamínska, A. and Maligranda, L. *Order convexity and concavity of Lorentz spaces* $\Lambda_{p,w}$, $0 < p < \infty$, Stud. Math. **160** (2004), v. 3.

Maz'ya, V. G. *Conductor inequalities and criteria for Sobolev type two-weight embeddings*. J. Comput. Appl. Math. **194** (2006), no. 11, 94-114.

Maz'ya, V. G. *Sobolev Spaces, with applications to elliptic partial differential equations*, Springer-Verlag, 2011.

Referencias

- Carro, M. and Soria, J. *Weighted Lorentz Spaces and the Hardy Operator*, J. Funct. Anal. **112** (1993), no. 2, 480-494.
- Cerdà, J. *Lorentz capacity spaces*, Contemporary Mathematics of the AMS **445** (2007), 49-55.
- Cerdà, J., Martín, J. and Silvestre, P. *Capacitary function spaces*, Collectanea Mathematica **62**, no.1, 95-118.
- Cerdà, J., Martín, J. and Silvestre, P. *Interpolation of quasicontinuous functions*, to appear in Józef Marcinkiewicz Centenary Volume, Banach Center Publications.
- Costea, S. and Maz'ya, V. *Conductor inequalities and criteria for Sobolev-Lorentz two-weight inequalities* , Int. Math. Ser. (N. Y.), **9** (2009), Springer, New York, 103-121.
- Kalton, N. J. and Montgomery-Smith, S. J. *Set-functions and factorization*, Arch. Math. (Basel) **61** (1993), no. 2, 183-200.
- Kamínska, A. and Maligranda, L. *Order convexity and concavity of Lorentz spaces* $\Lambda_{p,w}$, $0 < p < \infty$, Stud. Math. **160** (2004), v. 3.
- Maz'ya, V. G. *Conductor inequalities and criteria for Sobolev type two-weight embeddings*. J. Comput. Appl. Math. **194** (2006), no. 11, 94-114.
- Maz'ya, V. G. *Sobolev Spaces, with applications to elliptic partial differential equations*, Springer-Verlag, 2011.