Desigualdad isoperimétrica "versus" desigualdad de Sobolev

Jesús Bastero*

1. Notaciones y resultados previos

En lo que sigue B representará el interior de la bola euclídea en $\mathbb{R}^n$, es decir $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, $S^{n-1} = \partial B$, su frontera, es $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ ($|\cdot|$ será tanto el valor absoluto ordinario como la norma euclídea de un vector). En general, con ∂A nos referiremos a la frontera topológica del conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y con m denotaremos la medida Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

La medida $(n-1)$-dimensional de un conjunto en $\mathbb{R}^n$ es habitualmente la correspondiente medida de Hausdorff normalizada, m_{n-1}. Así, por ejemplo, es bien conocido que

$$m(B) = m(\overline{B}) = \omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)^{1/n}} \qquad \text{y} \qquad m_{n-1}(S^{n-1}) = n\,\omega_n$$

La desigualdad isoperimétrica en $\mathbb{R}^n$ dice:

Entre todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ de la misma medida, el que tiene menor medida de la frontera es la correspodiente bola euclídea

que viene cuantificada por la siguiente desigualdad

$$\frac{m_{n-1}(A)}{m(A)^{1-1/n}} \geq \frac{m_{n-1}(S^{n-1})}{m(\overline{B})^{1-1/n}} = n\,\omega_n^{1/n}$$

Sin embargo, no es la medida de Hausdorff, en general, la que aparece en la desigualdad isoperimétrica sino lo que los geómetras denominan el *perímetro*.

Si A es un subconjunto acotado (boreliano) de $\mathbb{R}^n$, hay dos maneras de considerar este concepto, de forma que la desigualdad isoperimétrica sea cierta. La primera, de tipo geométrico, fue considerada por Minkowski (*área de Minkowski*); la otra, de tipo funcional, fue introducida por Di Giorgi y extiende a la anterior (*perímetro*)

- **Area de Minkowski de un conjunto,** m^+

  Sea A un boreliano acotado en $\mathbb{R}^n$. Dado $\varepsilon > 0$, definimos

  $$A^\varepsilon = A + \varepsilon B = \{x = a + \varepsilon y : x \in A, y \in B\} = \{x \in \mathbb{R} : \exists\, a \in A, |x-a| < \varepsilon\}$$

  entonces

  $$m^+(A) = \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{m(A^\varepsilon) - m(A)}{\varepsilon}$$

  Notemos que el conjunto A^ε es siempre un conjunto abierto, incluso aunque A no sea medible, que contiene a $\overline{A}$. También que para los conjuntos compactos con frontera "complicada" tales que $m(\overline{A}) > m(A)$, entonces $m^+(A) = \infty$ y la desigualdad isoperimétrica es trivial.

*Universidad de Zaragoza. Notas redactadas siguiendo la bibliografía citada

- **Perímetro a la "Di Giorgi", P**

  El perímetro viene definido por la norma de función la característica del conjunto en el espacio de las funciones de variación acotada, es decir,

$$P(A) = \|\chi_A\|_{BV} = \sup_{\xi} \int_A \operatorname{div} \xi \, dx$$

  donde ξ recorre todos los campos vectoriales de clase C^1 y soporte compacto tales que $|\xi| \leq 1$. En $\mathbb{R}^n$, una función f es de variación acotada si es localmente integrable y su norma

$$\|f\|_{BV} = \sup_{\xi} \int_{\mathbb{R}^n} f \operatorname{div} \xi \, dx < \infty$$

Cuando A es un convexo compacto con interior no vacío o un conjunto de $\mathbb{R}^n$ con frontera C^1, los dos conceptos coinciden con la medida de Hausdorff y, como ya se ha comentado, la desigualdad isoperimétrica es cierta con cualquiera de las dos definiciones.

Aquí consideraremos como *medida de la frontera* la de *área de Minkowski*, m^+. Esta notación aparece en [BH] en donde se tratan situaciones más generales como variedades riemanianas o espacios métricos con una probabilidad, y, según S. Bobkov, indica que se mide la frontera hacia afuera (dado que si $\partial A = \partial A^c$, $m^+(A)$ y $m^+(A^c)$ deberían coincidir, lo que no estaría claro en general).

Repasaremos a continuación los conceptos relacionados con el *gradiente* de una función, ∇f, que aparece en la otra parte del título trabajo, la desigualdad de Sobolev.

Es bien conocido que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en el punto x_0, posee gradiente o diferencial en ese punto

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \right)$$

y entonces

$$\lim_{y \to x_0} \frac{f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x_0), y - x_0 \rangle}{|y - x_0|} = 0$$

Es fácil comprobar que

$$|\nabla f(x_0)| = \limsup_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|}$$

Este hecho permite definir el módulo del gradiente para una clase más general de funciones. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es Lipschitz, entonces definimos $|\nabla f| : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ mediante

$$|\nabla f(x)| = \limsup_{y \to x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|}$$

y esta función $|\nabla f(\cdot)|$ es medible (ver el Apéndice). Un resultado profundo de H. Rademacher (ver [H]) asegura que las funciones Lipschitz son diferenciables en casi todo punto de $\mathbb{R}^n$, con lo que el concepto introducido coincide con la longitud del vector gradiente en casi todo punto (en dimensión uno, el teorema de Rademacher es consecuencia inmediata del hecho de que toda función Lipschitz es absolutamente continua y, por tanto, derivable en casi todo punto según el teorema de diferenciación de Lebesgue).

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función Lipschitz de soporte compacto, los siguientes hechos son fáciles de demostrar (ver Apéndice): existe una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones C^∞ y soporte compacto tales que

- $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, uniformemente en $x \in \mathbb{R}^n$
- $$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_n(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)| dx$$

Fórmula de Cavalieri (consecuencia fácil del teorema de Fubini)

Si $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ es una función medible, $p \geq 1$ y m es la medida Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p dx = \int_0^\infty p\, t^{p-1} m\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) > t\} dt = \int_0^\infty p\, t^{p-1} m\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \geq t\} dt$$

Fórmula de la co-área (una mezcla entre cambio de variable y teorema de Fubini)

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ y soporte compacto con $a = \inf f$ y $b = \sup f$. Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ medible, no negativa o integrable, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|\, g(x) dx = \int_a^b \left(\int_{\{x\in\mathbb{R}^n : f(x)=t\}} g(x) dm_{n-1}(x) \right) dt\,.$$

Además, para casi todo t, los conjuntos $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = t\}$ son variedades $(n-1)$-dimensionales, C^1, con vector normal no nulo (aplicación del teorema de Sard) y m_{n-1} su medida de Hausdorff natural. Para estos mismos t, esos conjuntos son la frontera de $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\}$ y de $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < t\}$.

En el caso particular de que $g = 1$, tenemos la formula a utilizar

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)| dx = \int_a^b m_{n-1}\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = t\} dt$$

En el Apéndice hay una demostración directa de la desigualdad

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)| dx \geq \int_0^\infty m^+\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\} dt$$

para funciones Lipschitz.

2. Desigualdad isoperimétrica versus desigualdad de Sobolev en el extremo

Las desigualdades clásicas de Sobolev dicen que si

$$0 < \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$$

y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función C^∞ y soporte compacto, entonces:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^p dx \right)^{1/p} \geq C_{n,p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q dx \right)^{1/q}$$

es decir,

$$\| \, |\nabla f| \, \|_p \geq C_{n,p} \|f\|_q$$

Parece que Sobolev fue el primero en notar la equivalencia entre la desigualdad extrema para $p = 1$

$$\| \, |\nabla f| \, \|_1 \geq C_n \|f\|_{n/(n-1)}$$

y la desigualdad isoperimétrica, sin tener en cuenta el valor de las constantes. El valor exacto de las mismas fue obtenido simultáneamente por V. Maz'ja y H.Federer-W.Fleming en dos trabajos diferentes.

Teorema 2.1. *(Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev) Son equivalentes, con la misma constante $C > 0$, dependiendo sólo de n, las tres afirmaciones siguientes:*

i) Para toda función C^∞ de soporte compacto $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)| dx \geq C \|f\|_{n/(n-1)}$$

ii) Para toda función Lipschitz de soporte compacto $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)| dx \geq C \|f\|_{n/(n-1)}$$

iii) Para todo conjunto A, boreliano acotado de $\mathbb{R}^n$,

$$m^+(\partial A) \geq C m(A)^{1-1/n}$$

Además

$$C = n\omega_n^{1/n} = \frac{n\sqrt{\pi}}{(\Gamma(1 + n/2))^{1/n}}$$

Demostración. La parte "Además" se obtiene al considerar el caso de igualdad en la desigualdad isoperimétrica.

i) $\Longleftrightarrow$ *ii)* es consecuencia de los resultados de aproximación para las funciones Lipschitz (véase el Apéndice)

iii) $\Longrightarrow$ *ii)* Se va a deducir de la fórmula de la co-área. En efecto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)| dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} m_{n-1}\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = t\} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left(m_{n-1}\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = t\} + m_{n-1}\{x \in \mathbb{R}^n : -f(x) = t\} \right) dt \end{aligned}$$

Si $t > 0$, para casi todo t

$$\partial\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = t\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : -f(x) = t\}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)| dx &\geq \int_0^\infty m^+ \left(\partial\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}\right) dt \\
&\geq (\text{ por } iii) \text{)} \\
&\geq C \int_0^\infty m(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\})^{1-1/n} dt
\end{aligned}$$

Definamos

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^s m(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\})^{1-1/n} dt \\
G(s) &= \left(\frac{n}{n-1} \int_0^s t^{1/(n-1)} m(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}) dt\right)^{1-1/n}
\end{aligned}$$

Es fácil comprobar que $F(0) = G(0) = 0$ y que $F'(s) \geq G'(s)$. Entonces $F(s) \geq G(s)$ para todo $s > 0$ y se deduce que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)| dx \geq C &\left(\frac{n}{n-1} \int_0^\infty t^{1/(n-1)} m(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}) dt\right)^{1-1/n} \\
&= (\text{por la fórmula de Cavalieri}) \\
&= C\|f\|_{n/(n-1)}
\end{aligned}$$

ii) $\Longrightarrow$ *iii)*
Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un boreliano acotado. Dado $0 < \varepsilon < 1$, definimos

$$f_\varepsilon(x) = \text{máx}\left\{0, 1 - \frac{d(x, A^{\varepsilon^2})}{\varepsilon - \varepsilon^2}\right\}$$

Notemos que $0 \leq f_\varepsilon(x) \leq 1$, además es $= 1$ en un abierto, A^{ε^2}, que contiene a A y se anula si $d(x, A) > \varepsilon$. Esta función es de soporte compacto y además cumple que $\text{lím}_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon = \chi_{\overline{A}}$. Por otra parte

$$|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)| \leq \frac{1}{\varepsilon(1-\varepsilon)} \left| d(x, A^{\varepsilon^2}) - d(y, A^{\varepsilon^2}) \right| \leq \frac{|x-y|}{\varepsilon(1-\varepsilon)}$$

luego es de Lipschtiz y se tiene

$$|\nabla f_\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon^2}$$

Como $|\nabla f_\varepsilon| = 0$ en $\{x \in \mathbb{R}^n ; d(x, A) > \varepsilon\} \cup A^{\varepsilon^2}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_\varepsilon(x)| dx \leq \int_{\{x \in \mathbb{R}^n ; d(x,A) \leq \varepsilon\} \setminus A} |\nabla f_\varepsilon(x)| dx \leq \frac{m(A^{\varepsilon + \varepsilon^2}) - m(A)}{\varepsilon - \varepsilon^2}$$

Y entonces el resultado se sigue fácilmente.

$\square$

.

3. Apéndice

Lema 3.1. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es Lipschtiz, la función $|\nabla f| : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ definida mediante*

$$|\nabla f(x)| = \limsup_{y\to x} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|}$$

es medible

Demostración. Sea $\{r_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de racionales decreciendo a cero e $\{y_m\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de vectores densa en $\mathbb{R}^n$ entonces

$$\begin{aligned}|\nabla f(x)| &= \lim_m F_m(x)\\ F_m(x) &= \sup_k \frac{|f(y_k)-f(x)|}{|y_k-x|}\chi_{y_k+r_mB}(x)\end{aligned}$$

□

Lema 3.2. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es Lipschtiz y de soporte compacto, existe una sucesión $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ de funciones C^∞ y soporte compacto tales que*

- $\lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x)$, *uniformemente en $x \in \mathbb{R}^n$*
- $$\lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_m(x)|dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|dx$$

Demostración. Sea $j_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función "test" (C^∞ y soporte compacto), $j_0(x) \geq 0, \forall\, x \in \mathbb{R}^n$ y tal que $\int_{\mathbb{R}^n} j_0(x)dx = 1$. Definamos $j_m(x) = m^n j_0(mx)$ y

$$f_m(x) = f * j_m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} j_m(x-y)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)j_m(y)dy$$

El primer hecho es facil de obtener. Para el segundo, nótese que la función $|\nabla f|$ es integrable por estar acotada, además, por el teorema de Rademacher en casi todo punto es el módulo de la diferencial de f y además

$$\nabla f_m = \nabla f * j_m$$

en casi todo punto. □

Como $\overline{A^\varepsilon} \subseteq A^{\varepsilon_1}$, si $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, entonces

$$m^+(A) = \liminf_{\varepsilon\to 0}\frac{m(A^\varepsilon)-m(A)}{\varepsilon} = \liminf_{\varepsilon\to 0}\frac{m(\overline{A^\varepsilon})-m(A)}{\varepsilon}$$

pues

$$\begin{aligned}&\liminf_{\varepsilon\to 0}\frac{m(A^\varepsilon)-m(A)}{\varepsilon} \leq \liminf_{\varepsilon\to 0}\frac{m(\overline{A^\varepsilon})-m(A)}{\varepsilon}\\ &\leq \liminf_{\varepsilon\to 0}\frac{m(A^{\varepsilon+\varepsilon^2})-m(A)}{\varepsilon} = \liminf_{\varepsilon_1\to 0}\frac{m(A^{\varepsilon_1})-m(A)}{\varepsilon_1}\end{aligned}$$

y las desigualdades anteriores son igualdades.

Lema 3.3. *(Fórmula de la coárea) Si $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es Lipschitz y de soporte compacto*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)| dx \geq \int_0^\infty m^+\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\} dt$$

Como $\overline{A^\varepsilon} \subseteq A^{\varepsilon_1}$, si $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, entonces

$$m^+(A) = \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{m(A^\varepsilon) - m(A)}{\varepsilon} = \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{m(\overline{A^\varepsilon}) - m(A)}{\varepsilon}$$

pues

$$\begin{aligned} &\liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{m(A^\varepsilon) - m(A)}{\varepsilon} \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{m(\overline{A^\varepsilon}) - m(A)}{\varepsilon} \\ &\leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{m(A^{\varepsilon+\varepsilon^2}) - m(A)}{\varepsilon} = \liminf_{\varepsilon_1 \to 0} \frac{m(A^{\varepsilon_1}) - m(A)}{\varepsilon_1} \end{aligned}$$

y las desigualdades anteriores son igualdades.

Demostración. Para $h > 0$ definimos $f_h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mediante

$$f_h(x) = \sup_{|x-y|<h} |f(y)|$$

f_h es una función medible acotada. Además, para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$\limsup_{h \to 0} \frac{f_h(x) - |f(x)|}{h} = \limsup_{y \to x} \frac{|f(y)| - |f(x)|}{|y-x|} \leq |\nabla f(x)|$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x) dx &\geq \int_{\mathbb{R}^n} \limsup_{h \to 0} \frac{f_h(x) - |f(x)|}{h} dx \geq \text{(por el lema de Fatou)} \\ &\geq \limsup_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f_h(x) - |f(x)|}{h} dx \geq \liminf_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f_h(x) - |f(x)|}{h} dx \\ &= \liminf_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^\infty \left(m\{x \in \mathbb{R}^n, f_h(x) > t\} - m\{x \in \mathbb{R}^n, |f(x)| > t\}\right) dt \end{aligned}$$

Fijemos $t > 0$ y consideremos $A_t = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}$. Es fácil probar que

$$(A_t)^h = \{x \in \mathbb{R}^n : f_h(x) > t\}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)| dx &\geq \liminf_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^\infty (m(A_t^h) - m(A_t)) dt \geq \text{(por Fatou)} \\ &\geq \int_0^\infty \liminf_{h \to 0} \frac{m(A_t^h) - m(A_t))}{h}) dt = \int_0^\infty m^+(A_t) dt \end{aligned}$$

$\square$

Referencias

[BH] S. Bobkov, C. Houdré, *Some connections between Isoperimetric and Sobolev-type Inequalities.* Memoirs A.M.S., **616** (1997).

[C] I. Chavel, *Isoperimetric Inequalities.* Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press **145** (2001).

[FF] H. Federer, W. Fleming, *Normal integral currents*, Ann. Math. **72**, (1960), 458–520.

[H] J. Heinonen, *Lectures on Lipschitz Analysis*, http://www.math.jyu.fi/research/reports/rep100.pdf

[M1] V. Maz'ja, *Classes of domains and embedding theorems for function spaces*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **133**, (1960), 527–530.

[M2] V. Maz'ja, *Sobolev Spaces.* Springer-Verlag (1985).