Prueba original del Teorema de Lomonosov

20 de abril de 2012

CONTIENE:

1. **Prueba manuscrita (una página) por Bessaga del Teorema de Lomonosov (Proporcionada por J. Diestel).**

2. **Comentarios de I. Namioka sobre el teorema de Lomonosov.**

Victor Lomonosov
With best regards

Theorem (Lomonosov). Let X be an ∞-dimensional Banach space and let $A: X \longrightarrow X$ be a bounded linear operator. If A commutes with some compact non-zero operator $K: X \longrightarrow X$ then A has a non-trivial invariant subspace.

Proof. We may assume that $\|K\| = 1$. Fix $x_0 \in X$ with $\|Kx_0\| > 1$ and let $S = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq 1\}$. Obviously,

(1) $$0 \notin S, \qquad 0 \notin \overline{K(S)}.$$

Let $\mathcal{A}$ denote the set of all polynomials of A without constant term. Suppose, to the contrary, that A does not have any non-trivial invariant subspace. Then, by (1), for any $y \in \overline{K(S)}$ there is a $T \in \mathcal{A}$ such that $\|Ty - x_0\| < 1$. Since $\overline{K(S)}$ is compact, there exists a finite family $\{T_1, \dots, T_n\} \subset \mathcal{A}$ such that the sets $\{y : \|T_j y - x_0\| < 1\}$, $1 \leq j \leq n$, form a covering of $\overline{K(S)}$. Let

$$a_j(y) = (1 - \|T_j y - x_0\|)^+, \qquad y \in \overline{K(S)}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

For $y \in \overline{K(S)}$ we have $\sum_{j=1}^{n} a_j(y) > 0$. Define the function $\Psi: S \to$

$$\Psi(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j(Kx) T_j K x, \qquad \text{where } b_j(y) = a_j(y) / \sum_{j=1}^{n} a_j(y)$$

Ψ is a continuous mapping of S into a compact subset of itself, hence, by the Schauder fixpoint theorem, there is a $u \in S$ with $\Psi(u) = u$.

Let $$A_0 = \sum_{j=1}^{n} b_j(Ku) T_j K, \qquad E = \{x \in X : A_0 x = x\}.$$

Since A_0 commutes with A, ~~if~~ if $x \in E$, then $Ax = AA_0x = A_0Ax$, i.e. $Ax \in E$. Hence E is an invariant subspace of A. However, $E \neq X$ (because A_0 is compact and $\dim X = \infty$), and $E \neq \{0\}$ (because $u \in E$, and, by (1), $u \neq 0$). This contradiction completes the proof of the theorem.

Existencia de subespacios invariantes, V. Lomonosov, 1951-1987.

«La mejor aplicación del teorema de Schauder del punto fijo que puedo pensar es la prueba del teorema de Lomonosov de existencia de subespacios invariantes. Hay varias generalizaciones de este resultado, pero lo que Lomonosov demostró fue que: si X es un espacio de Banach y T un operador acotado en X tal que $TK = KT$ para algún operador compacto K no nulo de X en X, entonces algún subespacio Y propio de X es invariante bajo T, i.e., $T(Y) \subset Y$.

*Un poco de historia sobre este resultado. Parece ser que J. von Neumann demostró que todo operador compacto en un espacio de Hilbert tiene un subespacio invariante no trivial, pero no publicó la prueba. En 1951 ó 1952, N. Aronszajn, en Kansas, probó este resultado independientemente de von Neumann y mostró su prueba a K. T. Smith. Esa noche, Smith fue a casa y trató de reproducir la demostración de Aronszajn, pero encontró otra diferente que también servía para espacios de Banach (conozco esto porque en aquellos tiempos yo era un estudiante en la Universidad de Kansas). Aronszajn y Smith escribieron un artículo juntos. Al final del artículo, dejaron una cuestión abierta: si un operador T tiene cuadrado compacto, ¿tiene T un subespacio invariante no trivial? Mucho después, creo que en 1963, A. R. Bernstein y A. Robinson demostraron, con técnicas de análisis no-estándar, que si T es un operador con la propiedad de que $p(T)$ es compacto, donde p es un polinomio de grado positivo, entonces T tiene un subespacio invariante propio. Esto fue demostrado originalmente para espacios de Hilbert, pero pronto fue generalizado a espacios de Banach usando otra vez técnicas de análisis no-estándar. Date cuenta de que el teorema de Lomonosov generaliza todo lo de arriba, y la demostración es ¡*tan bella y tan simple*! Recuerdo que cuando Lomonosov demostró su resultado, J. Lindenstrauss nos visitó en la Universidad de Washington desde Berkeley. Sacó del bolsillo una hoja de papel arrugada (¡una sólo!), que era la fotocopia de la prueba completa manuscrita que el propio Lomonosov había hecho de su resultado. Joram dijo: "esta demostración está propiciando que mucha gente en Berkeley sea infeliz". Leí la prueba una vez, y* no la podré olvidar nunca.

Demostración. Probaremos que si T es un operador acotado en un espacio de Banach infinito-dimensional X que conmuta con algún operador compacto no nulo K, entonces T tiene un subespacio invariante propio.

Supongamos que $\|K\| = 1$ y fijemos un punto a de forma que $\|K(a)\| > 1$. Sean $S = a + B_X$ y $C = \overline{K(S)}$. Entonces, C es compacto en norma, convexo y $0 \notin C$. Observemos que si $\{P(T)x : P \text{ polinomio}\}$ no es denso para algún elemento no nulo x en X, entonces su clausura es un subespacio invariante propio de T. Así, podemos suponer que $\{P(T)x : P \text{ polinomio}\}$ es denso en X para cada elemento no nulo $x \in X$. Entonces, para cada $x \in C$, existe un polinomio P_x tal que $\|a - P_x(T)(x)\| < 1$. Definimos $U_x = \{y \in X : \|a - P_x(T)(y)\| < 1\}$. Cada U_x es un entorno abierto de x, y así, por compacidad, existen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de forma que C está recubierto por $U_1, \ldots, U_n$, donde $U_i = U_{x_i}$. Sea $b_1, \ldots, b_n$ una partición de la unidad en C subordinada al cubrimiento $U_1, \ldots, U_n$, y consideremos $F : C \longrightarrow C$ la aplicación continua dada por

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i(x) K P_i(T)(x)$$

(aquí, $P_i = P_{x_i}$). Por el teorema de Schauder, existe un punto $c \in C$ tal que $F(c) = c$. Sea H el operador lineal en X dado por

$$H = \sum_{i=1}^{n} b_i(c) K P_i(T),$$

y sea $H_1 = \{z \in X : H(z) = z\}$ el auto-espacio asociado al autovalor 1. Dado que H conmuta con T, H_1 es un subespacio invariante para T. Obsérvese que H_1 no es nulo, puesto que $c \in H_1$. Por otro lado, si tuviéramos que $H_1 = X$, H sería la identidad en X y, como H es compacto, entonces X sería de dimensión finita, que no es el caso. Consecuentemente, H_1 es propio y la prueba termina. □

I. Namioka (2 de enero de 2004)»

C. J. Read, en 1984, [90], demostró la existencia de un espacio de Banach y de un operador sobre dicho espacio de Banach que no tenía ningún subespacio invariante no trivial, lo que estuvo precedido por algún trabajo de P. Enflo (no publicado, aunque conocido) en el que se resolvía esta misma cuestión. Más tarde, B. Beauzamy, en 1985, [6], recogió y arregló las ideas de Enflo y dio una exposición y simplificación de su construcción. El trabajo de Enflo apareció finalmente en 1987, [47]. Read, en 1986, [91], presentó una exposición autocontenida demostrando la existencia de un operador acotado en ℓ^1 que no tenía ningún subespacio invariante no trivial.

Pero todo este profundo trabajo no cierra completamente el tema. ¿Qué espacios de Banach X tienen la propiedad de que existe un operador acotado sobre X con ningún subespacio invariante no trivial? Si X es reflexivo, ¿es $\operatorname{Lat} T$ no trivial, para todo T en $\mathscr{L}(X)$? Esta pregunta no tiene respuesta incluso si X es un espacio de Hilbert.

Una demostración de una versión ligeramente más débil del teorema de Lomonosov debida a A. J. Michaels, que elude el teorema del punto fijo de Schauder, puede encontrarse en [77].