Teoremas del Punto Fijo

Carlos Domingo (UB)
Coralina Hernández (ULL)
Luis Carlos García (UM)
Asunción Jiménez (US)
Marta Latorre (UV)
Santiago Montaner (UZ)

Segunda Escuela-Taller de Análisis Funcional y Aplicaciones, Abril 2012

Teoremas de la bola peluda y del punto fijo de Brouwer

Teorema de la bola peluda

Una esfera de dimensión par no admite ningún campo continuo de vectores tangentes no nulos.

Teorema del punto fijo de Brouwer

Toda aplicación continua del D^n en sí misma posee al menos un punto fijo.

Definiciones previas

- Sea $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$, con $|\cdot|$ la norma euclídea y $\mathbb{S}^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n | \ |v| = 1\}$.
- Un campo vectorial diferenciable es una función $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ C^1.
- Si v es campo diferenciable, se dice que es tangente a $\mathbb{S}^{n-1}$ en u si $v(u) \cdot u = 0$, siendo $\cdot$ el producto escalar euclídeo.
- Dado un campo vectorial v, denotaremos $f_t(x) = x + tv(x)$.

Lema 1

Dada $f_t(x) = x + tv(x)$, si t es suficientemente pequeño, entonces f_t es inyectiva y dado un compacto A, el volumen de $f_t(A)$ se puede expresar como un polinomio en t.

Lema 1

Dada $f_t(x) = x + tv(x)$, si t es suficientemente pequeño, entonces f_t es inyectiva y dado un compacto A, el volumen de $f_t(A)$ se puede expresar como un polinomio en t.

Como A es compacto y el campo v es C^1, entonces se prueba que

$$|v(x) - v(y)| \leq c|x - y|.$$

Lema 1

Dada $f_t(x) = x + tv(x)$, si t es suficientemente pequeño, entonces f_t es inyectiva y dado un compacto A, el volumen de $f_t(A)$ se puede expresar como un polinomio en t.

Como A es compacto y el campo v es C^1, entonces se prueba que

$$|v(x) - v(y)| \leq c|x - y|.$$

Tomando $|t| < c^{-1}$, probamos que f_t es inyectiva.

Lema 1

Dada $f_t(x) = x + tv(x)$, si t es suficientemente pequeño, entonces f_t es inyectiva y dado un compacto A, el volumen de $f_t(A)$ se puede expresar como un polinomio en t.

Como A es compacto y el campo v es C^1, entonces se prueba que

$$|v(x) - v(y)| \leq c|x - y|.$$

Tomando $|t| < c^{-1}$, probamos que f_t es inyectiva.

$$Jf_t = I + t\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right],$$

y $detJf_t = 1 + t\sigma_1(x) + \ldots + t^n\sigma_n(x) > 0$ para $|t|$ pequeño.

Lema 1

Dada $f_t(x) = x + tv(x)$, si t es suficientemente pequeño, entonces f_t es inyectiva y dado un compacto A, el volumen de $f_t(A)$ se puede expresar como un polinomio en t.

Como A es compacto y el campo v es C^1, entonces se prueba que

$$|v(x) - v(y)| \leq c|x - y|.$$

Tomando $|t| < c^{-1}$, probamos que f_t es inyectiva.

$$Jf_t = I + t\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right],$$

y $detJf_t = 1 + t\sigma_1(x) + \ldots + t^n\sigma_n(x) > 0$ para $|t|$ pequeño.

$$vol(f_t(A)) = \int_{f_t(A)} dx = \int_A detJf_t(x)dx = 1 + ta_1 + \ldots + t^n a_n,$$

donde $a_j = \int_A \sigma_j(x)dx$.

Teorema del punto fijo de Banach.

Sea (E, d) un espacio métrico completo y sea $T : E \to E$ una contracción, es decir; que verifica

$$|T(x) - T(y)| \leq c|x - y|$$

con $c < 1$, entonces T tiene un único punto fijo en E.

- Supondremos que el campo vectorial diferenciable $v : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ es tangente a $\mathbb{S}^{n-1}$.

Teorema del punto fijo de Banach.

Sea (E,d) un espacio métrico completo y sea $T : E \to E$ una contracción, es decir; que verifica

$$|T(x) - T(y)| \leq c|x-y|$$

con $c < 1$, entonces T tiene un único punto fijo en E.

- Supondremos que el campo vectorial diferenciable $v : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ es tangente a $\mathbb{S}^{n-1}$.
- Notar que $|f_t(u)| = \sqrt{1+t^2}$.

Lema 2

Dada $f_t(x) = x + tv(x)$, si t es suficientemente pequeño, la aplicación $u \mapsto u + tv(u) = f_t(u)$ de $\mathbb{S}^{n-1}$ en la esfera de radio $\sqrt{1+t^2}$ es sobreyectiva.

- $A = \{x \in \mathbb{R}^n | 1/2 \leq |x| \leq 3/2\}$ y en A extendemos v como $v(ru) = rv(u)$ con $1/2 \leq r \leq 3/2$.

Lema 2

Dada $f_t(x) = x + tv(x)$, si t es suficientemente pequeño, la aplicación $u \mapsto u + tv(u) = f_t(u)$ de $\mathbb{S}^{n-1}$ en la esfera de radio $\sqrt{1+t^2}$ es sobreyectiva.

- $A = \{x \in \mathbb{R}^n | 1/2 \leq |x| \leq 3/2\}$ y en A extendemos v como $v(ru) = rv(u)$ con $1/2 \leq r \leq 3/2$.
- Tomamos $|t| < 1/3$ y $|t| < c^{-1}$, con c constante de Lipschitz de v.

Lema 2

Dada $f_t(x) = x + tv(x)$, si t es suficientemente pequeño, la aplicación $u \mapsto u + tv(u) = f_t(u)$ de $\mathbb{S}^{n-1}$ en la esfera de radio $\sqrt{1+t^2}$ es sobreyectiva.

- $A = \{x \in \mathbb{R}^n | 1/2 \leq |x| \leq 3/2\}$ y en A extendemos v como $v(ru) = rv(u)$ con $1/2 \leq r \leq 3/2$.
- Tomamos $|t| < 1/3$ y $|t| < c^{-1}$, con c constante de Lipschitz de v.
- Para cada $u_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ definimos $g_{u_0}(x) = u_0 - tv(x)$, que es contractiva y por el teorema del punto fijo de Banach, g_{u_0} tiene un único punto fijo.

Teorema 1

Una esfera de dimensión par no posee ningún campo de **clase** C^1 de vectores tangentes unitarios.

- Si n es impar: $v(u_1, \ldots, u_n) = (u_2, -u_1, \ldots, u_n, -u_{n-1})$.

Teorema 1

Una esfera de dimensión par no posee ningún campo de **clase** C^1 de vectores tangentes unitarios.

- Si n es impar: $v(u_1, \ldots, u_n) = (u_2, -u_1, \ldots, u_n, -u_{n-1})$.
- $A = \{x \in \mathbb{R}^n |\ a \leq |x| \leq b\}$.

Teorema 1

Una esfera de dimensión par no posee ningún campo de **clase** C^1 de vectores tangentes unitarios.

- Si n es impar: $v(u_1, \ldots, u_n) = (u_2, -u_1, \ldots, u_n, -u_{n-1})$.
- $A = \{x \in \mathbb{R}^n | \; a \leq |x| \leq b\}$.
- Extendemos v a A como $v(ru) = rv(u)$, con $a \leq r \leq b$.
  f_t es sobreyectiva de $\mathbb{S}_r^{n-1}$ en la esfera de radio $r\sqrt{1+t^2}$ con t pequeño.

Teorema 1

Una esfera de dimensión par no posee ningún campo de **clase** C^1 de vectores tangentes unitarios.

- Si n es impar: $v(u_1, \ldots, u_n) = (u_2, -u_1, \ldots, u_n, -u_{n-1})$.
- $A = \{x \in \mathbb{R}^n | \ a \leq |x| \leq b\}$.
- Extendemos v a A como $v(ru) = rv(u)$, con $a \leq r \leq b$.
  f_t es sobreyectiva de $\mathbb{S}_r^{n-1}$ en la esfera de radio $r\sqrt{1+t^2}$ con t pequeño.
- $vol(f_t(A)) = (\sqrt{1+t^2})^n vol(A)$.

Teorema 1

Una esfera de dimensión par no posee ningún campo de **clase** C^1 de vectores tangentes unitarios.

- Si n es impar: $v(u_1, \ldots, u_n) = (u_2, -u_1, \ldots, u_n, -u_{n-1})$.
- $A = \{x \in \mathbb{R}^n | \; a \leq |x| \leq b\}$.
- Extendemos v a A como $v(ru) = rv(u)$, con $a \leq r \leq b$. f_t es sobreyectiva de $\mathbb{S}_r^{n-1}$ en la esfera de radio $r\sqrt{1+t^2}$ con t pequeño.
- $vol(f_t(A)) = (\sqrt{1+t^2})^n vol(A)$.
- Si n es impar, el volumen de $f_t(A)$ no es un polinomio en función de t $\Rightarrow$ Contradicción !!!

Teorema 1'

Una esfera de dimensión par no admite ningún campo continuo de vectores tangentes no nulos.

Teorema de Aproximación de Weierstrass

Toda función continua sobre un compacto de $\mathbb{R}^n$ se puede aproximar uniformemente por polinomios.

- Por el Teorema de Aproximación de Weierstrass, $|p(u) - v(u)| < m/2$, con $m = min(|v(u)|) > 0$

Teorema 1'

Una esfera de dimensión par no admite ningún campo continuo de vectores tangentes no nulos.

Teorema de Aproximación de Weierstrass

Toda función continua sobre un compacto de $\mathbb{R}^n$ se puede aproximar uniformemente por polinomios.

- Por el Teorema de Aproximación de Weierstrass, $|p(u) - v(u)| < m/2$, con $m = min(|v(u)|) > 0$
- $w(u) = p(u) - (p(u) \cdot u)u$

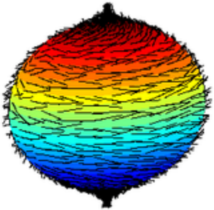
Teorema 1'

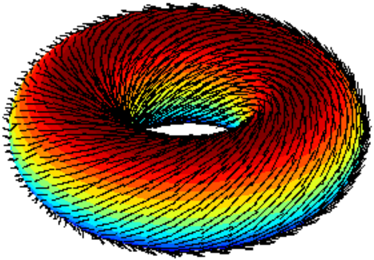
Una esfera de dimensión par no admite ningún campo continuo de vectores tangentes no nulos.

Teorema de Aproximación de Weierstrass

Toda función continua sobre un compacto de $\mathbb{R}^n$ se puede aproximar uniformemente por polinomios.

- Por el Teorema de Aproximación de Weierstrass, $|p(u) - v(u)| < m/2$, con $m = min(|v(u)|) > 0$
- $w(u) = p(u) - (p(u) \cdot u)u$
- $\frac{w(u)}{|w(u)|}$ es campo diferenciable de vectores tangentes unitarios en la esfera de dimesión par. Contradicción con el teorema 1.





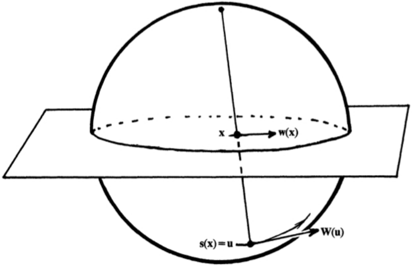
Teorema 2

Toda aplicación continua del D^n en sí misma posee al menos un punto fijo.

- Sup. no hay punto fijo
- $w(x) = x - y(1 - x \cdot x)/(1 - x \cdot y)$, con $y = f(x)$.
- $s(x) = (2x_1, \ldots, 2x_n, x \cdot x - 1)/(x \cdot x + 1)$
- $W(s(x)) = \frac{ds(x+tw(x))}{dt}|_{t=0}$ es campo tangente en el hemisferio sur.

- Similarmente en el hemisferio norte, con el campo $-w(x)$ construimos un campo en toda la esfera.

- Similarmente en el hemisferio norte, con el campo $-w(x)$ construimos un campo en toda la esfera.
- Si n es par, tenemos contradicción con el Teorema 1'.
- Si n es impar, $F(x_1, \ldots, x_n) = (f(x_1, \ldots, x_{n-1}), 0)$ tiene punto fijo.



Generalizaciones del Teorema de Brouwer.

Teorema *(Schauder)*

Sea X un espacio normado y $K \subseteq X$ compacto y convexo. Entonces, K tiene la propiedad del punto fijo.

Definición

Un espacio topológico X tiene la *propiedad del punto fijo* si toda función continua $f : X \to X$ tiene un punto fijo.

Definición

Un espacio topológico X tiene la *propiedad del punto fijo* si toda función continua $f : X \to X$ tiene un punto fijo.

Lema 1

Sea X un espacio topológico e Y un retracto de X. Si X tiene la propiedad del punto fijo, entonces Y también.

Definición

Un espacio topológico X tiene la *propiedad del punto fijo* si toda función continua $f : X \to X$ tiene un punto fijo.

Lema 1

Sea X un espacio topológico e Y un retracto de X. Si X tiene la propiedad del punto fijo, entonces Y también.

Lema 2

Sean X, Y dos espacios topológicos homeomorfos. Si X tiene la propiedad del punto fijo, entonces Y también.

Teorema

Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un compacto convexo y $f : K \to K$ una función continua. Entonces f tiene un punto fijo.

Teorema

Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un compacto convexo y $f : K \to K$ una función continua. Entonces f tiene un punto fijo.

Sea B una bola euclídea que contiene al compacto K. Entonces:

- Dado $y \in B$, existe un punto $x \in K$ tal que

$$d(y,x) = \inf_{z \in K} d(y,z) = d(y,K).$$

- x es único.

Teorema

Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un compacto convexo y $f : K \to K$ una función continua. Entonces f tiene un punto fijo.

Sea B una bola euclídea que contiene al compacto K. Entonces:

- Dado $y \in B$, existe un punto $x \in K$ tal que

$$d(y,x) = \inf_{z \in K} d(y,z) = d(y,K).$$

- x es único.

Así, podemos definir

$$r : B \to K,$$

donde $r(y) = x$ satisfaciendo $d(y,x) = d(y,K)$. Además, $r_{|K} = Id_K$.

Si vemos que r es continua, entonces por los lemas 1 y 2 terminamos la prueba:

$$B_{euc}(0,1) \cong B, \quad K \text{ retracto de } B.$$

Teorema *(Schauder)*

Sea X un espacio normado y $K \subseteq X$ compacto y convexo. Entonces, K tiene la propiedad del punto fijo.

- Dado $\varepsilon > 0$, tenemos

$$K \subseteq B(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_n, \varepsilon).$$

Definimos $X_\varepsilon := \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$.

- Dado $\varepsilon > 0$, tenemos

$$K \subseteq B(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_n, \varepsilon).$$

Definimos $X_\varepsilon := \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$.

- Para cada $i = 1, \ldots, n$, definimos en K

$$\phi_i(x) := (\varepsilon - \|x - x_i\|)\chi_{B(x_i,\varepsilon)}(x),$$

que son continuas y cumplen $\sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) > 0$ para $x \in K$.

- Sea

$$g_\varepsilon(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_i(x)}{\sum_{k=1}^{n} \phi_k(x)} x_i.$$

Tenemos $g_\varepsilon : K \to X_\varepsilon \cap K$ y $\|g_\varepsilon(x) - x\| \leq \varepsilon$ si $x \in K$.

Consideremos $K_\varepsilon := co(x_1, \ldots, x_n) \subseteq K \cap X_\varepsilon$ y $f_\varepsilon = g_\varepsilon \circ f$.

Consideremos $K_\varepsilon := co(x_1, \ldots, x_n) \subseteq K \cap X_\varepsilon$ y $f_\varepsilon = g_\varepsilon \circ f$.
Aplicamos Brouwer a $f_\varepsilon : K_\varepsilon \to K_\varepsilon$, con K_ε compacto convexo de X_ε, y obtenemos

$$x_\varepsilon = f_\varepsilon(x_\varepsilon).$$

Consideremos $K_\varepsilon := co(x_1, \ldots, x_n) \subseteq K \cap X_\varepsilon$ y $f_\varepsilon = g_\varepsilon \circ f$.
Aplicamos Brouwer a $f_\varepsilon : K_\varepsilon \to K_\varepsilon$, con K_ε compacto convexo de X_ε, y obtenemos

$$x_\varepsilon = f_\varepsilon(x_\varepsilon).$$

Por compacidad de K, tomamos una subsucesión $\{x_{\varepsilon_n}\}_n$ que converge a $x \in K$ con $\varepsilon_n \to 0$. Veamos que x es el punto fijo.

Consideremos $K_\varepsilon := co(x_1, \ldots, x_n) \subseteq K \cap X_\varepsilon$ y $f_\varepsilon = g_\varepsilon \circ f$.
Aplicamos Brouwer a $f_\varepsilon : K_\varepsilon \to K_\varepsilon$, con K_ε compacto convexo de X_ε, y obtenemos

$$x_\varepsilon = f_\varepsilon(x_\varepsilon).$$

Por compacidad de K, tomamos una subsucesión $\{x_{\varepsilon_n}\}_n$ que converge a $x \in K$ con $\varepsilon_n \to 0$. Veamos que x es el punto fijo.

$$\|x - f(x)\| \leq \|x - x_{\varepsilon_n}\| + \|x_{\varepsilon_n} - f(x_{\varepsilon_n})\| + \|f(x_{\varepsilon_n}) - f(x)\| \xrightarrow{n} 0$$

$$(\|x_{\varepsilon_n} - f(x_{\varepsilon_n})\| = \|f_{\varepsilon_n}(x_{\varepsilon_n}) - f(x_{\varepsilon_n})\| = \|g_{\varepsilon_n}(f(x_{\varepsilon_n})) - f(x_{\varepsilon_n})\| \leq \varepsilon_n.$$

Equilibrios de Nash

Equilibrios de Nash

Theorem (Nash, 1950)

Todo juego finito tiene un punto de equilibrio.

Ejemplos

		Jug. 2	
		α	β
Jug.1	a	6,6	0,10
	b	10,0	1,1

Ejemplos

		Jug. 2	
		α	β
Jug.1	a	6,6	0,10
	b	10,0	1,1

(b, β) es punto de eq.

Ejemplos

		Jug. 2	
		α	β
Jug.1	a	6,6	0,10
	b	10,0	1,1

(b,β) es punto de eq.

		Jug. 2	
		α	β
Jug.1	a	5,-3	-4,4
	b	-5,5	3,-4

Ejemplos

		Jug. 2	
		α	β
Jug.1	a	6,6	0,10
	b	10,0	1,1

(b, β) es punto de eq.

		Jug. 2	
		α	β
Jug.1	a	5,-3	-4,4
	b	-5,5	3,-4

$(\frac{9}{16}a + \frac{7}{16}b, \frac{7}{17}\alpha + \frac{10}{17}\beta)$ es punto de eq.

Ejemplos

		Jug. 2	
		α	β
Jug.1	a	6,6	0,10
	b	10,0	1,1

(b, β) es punto de eq.

		Jug. 2	
		α	β
Jug.1	a	5,-3	-4,4
	b	-5,5	3,-4

$(\frac{9}{16}a + \frac{7}{16}b, \frac{7}{17}\alpha + \frac{10}{17}\beta)$ es punto de eq.

Definition

Llamamos **juego finito** a un conjunto de n jugadores, cada uno con un conjunto $P_i = \{\pi_{i\alpha}\}$ finito de estrategias puras, y con una función de pagos $p_i : P_1 \times \ldots \times P_n \to \mathbb{R}$

Definition

Para cada jugador i, se define el conjunto de sus estrategias mixtas como $S_i = \{s_i = (x_{i1}, \ldots, x_{im_i}) \in \mathbb{R}^{m_i} : x_{i\alpha} \geq 0, \sum_\alpha x_{i\alpha} = 1\}$

Definition

Para cada jugador i, se define el conjunto de sus estrategias mixtas como $S_i = \{s_i = (x_{i1}, \ldots, x_{im_i}) \in \mathbb{R}^{m_i} : x_{i\alpha} \geq 0, \sum_\alpha x_{i\alpha} = 1\}$

- S_i es compacto y convexo.

Definition

Para cada jugador i, se define el conjunto de sus estrategias mixtas como $S_i = \{s_i = (x_{i1}, \ldots, x_{im_i}) \in \mathbb{R}^{m_i} : x_{i\alpha} \geq 0, \sum_\alpha x_{i\alpha} = 1\}$

- S_i es compacto y convexo.
- Sea S $= S_1 \times ... \times S_n$. S también es convexo y compacto.

Definition

Para cada jugador i, se define el conjunto de sus estrategias mixtas como $S_i = \{s_i = (x_{i1}, \ldots, x_{im_i}) \in \mathbb{R}^{m_i} : x_{i\alpha} \geq 0, \sum_\alpha x_{i\alpha} = 1\}$

- S_i es compacto y convexo.
- Sea S $= S_1 \times \ldots \times S_n$. S también es convexo y compacto.
- p_i se extiende por linealidad a una función $p_i : S \to \mathbb{R}$ continua.

Definition

Para cada jugador i, se define el conjunto de sus estrategias mixtas como $S_i = \{s_i = (x_{i1}, \dots, x_{im_i}) \in \mathbb{R}^{m_i} : x_{i\alpha} \geq 0, \sum_\alpha x_{i\alpha} = 1\}$

- S_i es compacto y convexo.
- Sea S $= S_1 \times \ldots \times S_n$. S también es convexo y compacto.
- p_i se extiende por linealidad a una función $p_i : S \to \mathbb{R}$ continua.

Definition

Se dice que una estategia mixta $s \in S$ es un **punto de equilibrio** si para todo $i = 1, \dots, n$ se tiene:

$$p_i(s) = \max_{r_i \in S_i} p_i(s; r_i)$$

Definition

Para cada jugador i, se define el conjunto de sus estrategias mixtas como $S_i = \{s_i = (x_{i1}, \ldots, x_{im_i}) \in \mathbb{R}^{m_i} : x_{i\alpha} \geq 0, \sum_\alpha x_{i\alpha} = 1\}$

- S_i es compacto y convexo.
- Sea S $= S_1 \times \ldots \times S_n$. S también es convexo y compacto.
- p_i se extiende por linealidad a una función $p_i : S \to \mathbb{R}$ continua.

Definition

Se dice que una estategia mixta $s \in S$ es un **punto de equilibrio** si para todo $i = 1, \ldots, n$ se tiene:

$$p_i(s) = \max_{r_i \in S_i} p_i(s; r_i)$$

- Por linealidad, es equivalente a $p_i(s) = \max_\alpha p_i(s; \pi_{i\alpha})$

Theorem (Nash, 1950)

Todo juego finito tiene un punto de equilibrio.

Theorem (Nash, 1950)

Todo juego finito tiene un punto de equilibrio.

- Definimos $\phi_{i\alpha} : S \to \mathbb{R}^+$ dada por $\phi_{i\alpha}(s) = \max\{0, p_i(s;\pi_{i\alpha}) - p_i(s)\}$

Theorem (Nash, 1950)

Todo juego finito tiene un punto de equilibrio.

- Definimos $\phi_{i\alpha} : S \to \mathbb{R}^+$ dada por $\phi_{i\alpha}(s) = \max\{0, p_i(s;\pi_{i\alpha}) - p_i(s)\}$
- Sea $T : S \to S$ dada por $T(s_1, \ldots, s_n) = (s'_1, \ldots, s'_n)$ donde
$$s'_i = \frac{s_i + \sum_\alpha \phi_{i\alpha}(s)\pi_{i\alpha}}{1 + \sum_\alpha \phi_{i\alpha}(s)}.$$

Theorem (Nash, 1950)

Todo juego finito tiene un punto de equilibrio.

- Definimos $\phi_{i\alpha} : S \to \mathbb{R}^+$ dada por $\phi_{i\alpha}(s) = \max\{0, p_i(s;\pi_{i\alpha}) - p_i(s)\}$
- Sea $T : S \to S$ dada por $T(s_1, \ldots, s_n) = (s_1', \ldots, s_n')$ donde

$$s_i' = \frac{s_i + \sum_\alpha \phi_{i\alpha}(s)\pi_{i\alpha}}{1 + \sum_\alpha \phi_{i\alpha}(s)}.$$

- Por el teorema de Brouwer, T tiene algún punto fijo $s \in S$.

Theorem (Nash, 1950)

Todo juego finito tiene un punto de equilibrio.

- Definimos $\phi_{i\alpha} : S \to \mathbb{R}^+$ dada por $\phi_{i\alpha}(s) = \max\{0, p_i(s;\pi_{i\alpha}) - p_i(s)\}$
- Sea $T : S \to S$ dada por $T(s_1, \ldots, s_n) = (s_1', \ldots, s_n')$ donde

$$s_i' = \frac{s_i + \sum_\alpha \phi_{i\alpha}(s)\pi_{i\alpha}}{1 + \sum_\alpha \phi_{i\alpha}(s)}.$$

- Por el teorema de Brouwer, T tiene algún punto fijo $s \in S$.
- Existe β tal que $p_i(s;\pi_{i\beta}) \leq p_i(s)$ y por tanto $\phi_{i\beta}(s) = 0$ Centrándonos en la coordenada β:

$$x_{i\beta} = \frac{x_{i\beta} + 0}{1 + \sum_\alpha \phi_{i\alpha}(s)}.$$

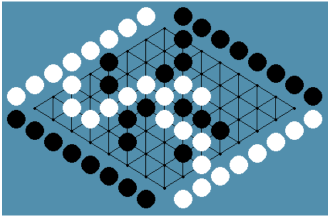
Theorem (Nash, 1950)

Todo juego finito tiene un punto de equilibrio.

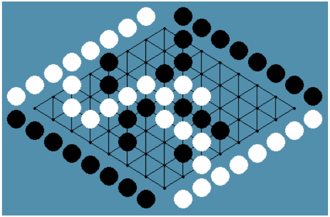
- Definimos $\phi_{i\alpha} : S \to \mathbb{R}^+$ dada por $\phi_{i\alpha}(s) = \max\{0, p_i(s; \pi_{i\alpha}) - p_i(s)\}$
- Sea $T : S \to S$ dada por $T(s_1, \ldots, s_n) = (s_1', \ldots, s_n')$ donde
$$s_i' = \frac{s_i + \sum_\alpha \phi_{i\alpha}(s)\pi_{i\alpha}}{1 + \sum_\alpha \phi_{i\alpha}(s)}.$$
- Por el teorema de Brouwer, T tiene algún punto fijo $s \in S$.
- Existe β tal que $p_i(s; \pi_{i\beta}) \leq p_i(s)$ y por tanto $\phi_{i\beta}(s) = 0$
Centrándonos en la coordenada β:
$$x_{i\beta} = \frac{x_{i\beta} + 0}{1 + \sum_\alpha \phi_{i\alpha}(s)}.$$
- Por tanto, $\sum_\alpha \phi_{i\alpha}(s) = 0 \Rightarrow \phi_{i\alpha}(s) = 0 \Rightarrow p_i(s; \pi_{i\alpha}) = p_i(s) \Rightarrow s$ es punto de equilibrio.

Una demostración curiosa

El juego del Hex



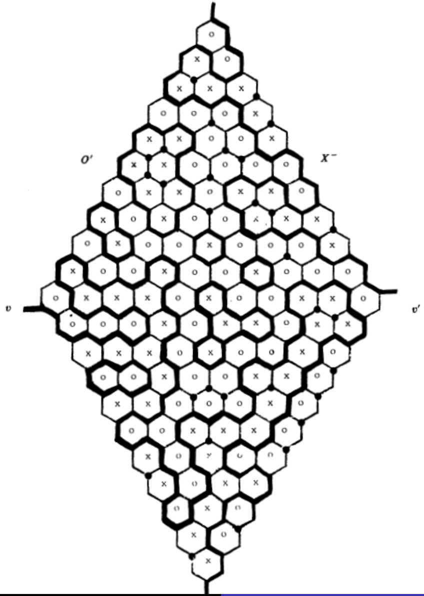
El juego del Hex



THE GAME OF HEX AND THE BROUWER FIXED-POINT THEOREM

DAVID GALE

1. Introduction. The application of mathematics to games of strategy is now represented by a voluminous literature. Recently there has also been some work which goes in the other direction, using known facts about games to obtain mathematical results in other areas. The present paper is in this latter spirit. Our main purpose is to show that a classical result of topology, the celebrated Brouwer Fixed-Point Theorem, is an easy consequence of the fact that Hex, a game which is probably familiar to many mathematicians, cannot end in a draw. This


O'
X⁻
v
v'

Bibliografía

- Bernardo Cascales, Stanimir Troyanski, *Fundamentos de Análisis Matemático* http://webs.um.es/beca/Docencia/Doctorado/AnalisisDoctorado.pdf
- Joan Cerdà, *Introducció a l'anàlisi funcional*, Edicions de la Universitat de Barcelona, 2004.
- David Gale, *The Game of Hex and the Brouwer Fixed-Point Theorem*, The American Mathematical Monthly, vol. 86, no. 10. (Dec., 1979), 818-827.
- John Milnor, *Analytic Proofs of the "Hairy Ball Theorem" and the Brouwer Fixed Point*, The American Mathematical Monthly, vol. 85, no.7 (Aug.-Sep. 1978), 521-524.
- John Nash, *Non-cooperative games*, The Annals of Mathematics, Second Series, vol. 54, no.2 (sep. 1951),

GRACIAS!