TEOREMA MINIMAX Y CONSECUENCIAS

Luciano Abadías Ullod (UZ)
Isaac Álvarez Romero (UCM)
Juan Ramón Balaguer Tornel (UMU)
Daniel Lear Claveras (UZ)
Eva Primo Tárraga (UV)
Juan Luis Ródenas Pedregosa (UCM)

La Manga

18 de abril de 2012

Supervisado por

Prof. Antonio Martinón Cejas

II Escuela Taller de Análisis Funcional y Aplicaciones

Definiciones

Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, donde X es un subconjunto de un espacio vectorial topológico.

Definiciones

Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, donde X es un subconjunto de un espacio vectorial topológico.

Definición

Diremos que f es **casi-convexa** si dado $\lambda \in \mathbb{R}$, el conjunto de nivel $C_\lambda := \{x \in X : f(x) \leq \lambda\}$ es convexo en X.

Definiciones

Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, donde X es un subconjunto de un espacio vectorial topológico.

Definición

Diremos que f es **casi-convexa** si dado $\lambda \in \mathbb{R}$, el conjunto de nivel $C_\lambda := \{x \in X : f(x) \leq \lambda\}$ es convexo en X.

Definición

Diremos que f es **superiormente semicontinua** si dado $\lambda \in \mathbb{R}$, el conjunto de nivel $S_\lambda := \{x \in X : f(x) < \lambda\}$ es abierto en X.

Definiciones

Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, donde X es un subconjunto de un espacio vectorial topológico.

Definición

Diremos que f es **casi-convexa** si dado $\lambda \in \mathbb{R}$, el conjunto de nivel $C_\lambda := \{x \in X : f(x) \leq \lambda\}$ es convexo en X.

Definición

Diremos que f es **superiormente semicontinua** si dado $\lambda \in \mathbb{R}$, el conjunto de nivel $S_\lambda := \{x \in X : f(x) < \lambda\}$ es abierto en X.

Diremos que f es casi-cóncava si y solo si $-f$ casi-convexa.

Definiciones

Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, donde X es un subconjunto de un espacio vectorial topológico.

Definición

Diremos que f es **casi-convexa** si dado $\lambda \in \mathbb{R}$, el conjunto de nivel $C_\lambda := \{x \in X : f(x) \leq \lambda\}$ es convexo en X.

Definición

Diremos que f es **superiormente semicontinua** si dado $\lambda \in \mathbb{R}$, el conjunto de nivel $S_\lambda := \{x \in X : f(x) < \lambda\}$ es abierto en X.

Diremos que f es casi-cóncava si y solo si $-f$ casi-convexa.
Diremos que f es inferiormente semicontinua si y solo si $-f$ superiormente semicontinua.

Teorema de Klee

Propiedad

f casi-convexa en X si y solo si
$f(\mu x_1 + (1-\mu)x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\} \quad \forall x_1, x_2 \in X, \ \ \forall \mu \in [0,1]$

Teorema de Klee

Propiedad

f casi-convexa en X si y solo si
$f(\mu x_1 + (1-\mu)x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\} \quad \forall x_1, x_2 \in X, \ \ \forall \mu \in [0,1]$

Teorema de Klee

Sean C y $C_1, \ldots, C_n$ conjuntos cerrados, convexos en un Espacio Euclídeo cumpliendo:

(i) $C \cap \bigcap_{i=1, i\neq j}^{n} C_i \neq \emptyset$ para $j = 1, 2, \ldots, n$

(ii) $C \cap \bigcap_{i=1}^{n} C_i = \emptyset$

Entonces $C \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} C_i$

Teorema de la Alternativa

Teorema

Sea X e Y dos subconjuntos convexos de espacios vectoriales topológicos, con Y compacto y sean $\tilde{f}, f, g, \tilde{g} : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaciendo:

(i) $\tilde{f}(x,y) \leq f(x,y) \leq g(x,y) \leq \tilde{g}(x,y), \forall (x,y) \in X \times Y$

(ii) $y \longmapsto \tilde{f}(x,y)$ inferiormente semicontinua y casi-convexa en Y, para cada $x \in X$ fijo,

(iii) $x \longmapsto f(x,y)$ casi-cóncava en X, para cada $y \in Y$ fijo,

(iv) $y \longmapsto g(x,y)$ casi-convexa en Y, para cada $x \in X$ fijo,

(v) $x \longmapsto \tilde{g}(x,y)$ superiormente semicontinua y casi-cóncava en X, para cada $y \in Y$ fijo.

Teorema de la Alternativa

Entonces dado $\lambda \in \mathbb{R}$ se cumple la siguiente alternativa:

A $\exists \bar{x} \in X$ tal que $\forall y \in Y$, $\tilde{g}(\bar{x}, y) \geq \lambda$.

B $\exists \bar{y} \in Y$ tal que $\forall x \in X$, $\tilde{f}(x, \bar{y}) \leq \lambda$.

Teorema de la Alternativa

Demostración:
Suponemos que no se cumplen ninguna de las afirmaciones. Consideramos dos familias de conjuntos:

- $\{U_y := \{x \in X \mid \tilde{g}(x,y) < \lambda\} \mid y \in Y\}$, recubrimiento abierto de X.
- $\{V_x := \{y \in Y \mid \tilde{f}(x,y) > \lambda\} \mid x \in X\}$, recubrimiento abierto de Y.

Teorema de la Alternativa

Demostración:
Suponemos que no se cumplen ninguna de las afirmaciones. Consideramos dos familias de conjuntos:

- $\{U_y := \{x \in X \mid \tilde{g}(x,y) < \lambda\} \mid y \in Y\}$, recubrimiento abierto de X.
- $\{V_x := \{y \in Y \mid \tilde{f}(x,y) > \lambda\} \mid x \in X\}$, recubrimiento abierto de Y.

Sea $\{V_{x_k} : k = 1, \ldots, m\}$ un subrecubrimiento finito de Y.

Teorema de la Alternativa

Demostración:
Suponemos que no se cumplen ninguna de las afirmaciones. Consideramos dos familias de conjuntos:

- $\{U_y := \{x \in X \mid \tilde{g}(x,y) < \lambda\} \mid y \in Y\}$, recubrimiento abierto de X.
- $\{V_x := \{y \in Y \mid \tilde{f}(x,y) > \lambda\} \mid x \in X\}$, recubrimiento abierto de Y.

Sea $\{V_{x_k} : k = 1, \ldots, m\}$ un subrecubrimiento finito de Y.
Llamamos $C := Conv\{x_k : k = 1, \ldots, m\} \subset L < X$ con $dimL < \infty$.

Teorema de la Alternativa

Demostración:
Suponemos que no se cumplen ninguna de las afirmaciones. Consideramos dos familias de conjuntos:

- $\{U_y := \{x \in X \mid \tilde{g}(x,y) < \lambda\} \mid y \in Y\}$, recubrimiento abierto de X.
- $\{V_x := \{y \in Y \mid \tilde{f}(x,y) > \lambda\} \mid x \in X\}$, recubrimiento abierto de Y.

Sea $\{V_{x_k} : k = 1, \ldots, m\}$ un subrecubrimiento finito de Y.
Llamamos $C := Conv\{x_k : k = 1, \ldots, m\} \subset L < X$ con $dimL < \infty$.
Consideramos $\{U_y \cap L\}$, es un recubrimiento abierto de C.

Teorema de la Alternativa

Demostración:
Suponemos que no se cumplen ninguna de las afirmaciones. Consideramos dos familias de conjuntos:

- $\{U_y := \{x \in X \mid \tilde{g}(x,y) < \lambda\} \mid y \in Y\}$, recubrimiento abierto de X.
- $\{V_x := \{y \in Y \mid \tilde{f}(x,y) > \lambda\} \mid x \in X\}$, recubrimiento abierto de Y.

Sea $\{V_{x_k} : k = 1, \dots, m\}$ un subrecubrimiento finito de Y.
Llamamos $C := Conv\{x_k : k = 1, \dots, m\} \subset L < X$ con $dimL < \infty$.
Consideramos $\{U_y \cap L\}$, es un recubrimiento abierto de C.
Sea $\{U_i \mid i = 1, \dots, n\}$ un subrecubrimiento finito tal que $C \not\subseteq \bigcup_{i=1, i\neq j}^{n} U_i, \forall j \in \{1, \dots, n\}$.

Teorema de la Alternativa

Definimos $C_i := L \backslash U_i$, cerrado y convexo de L.

Teorema de la Alternativa

Definimos $C_i := L \backslash U_i$, cerrado y convexo de L.Por lo tanto tenemos:

- $C \cap \bigcap_{i=1}^{n} C_i = \emptyset$,
- $C \cap \bigcap_{i=1, i \neq j}^{n} C_i \neq \emptyset$.

Aplicamos el Teorema de Klee

Teorema de la Alternativa

Definimos $C_i := L \backslash U_i$, cerrado y convexo de L.Por lo tanto tenemos:

- $C \cap \bigcap_{i=1}^{n} C_i = \emptyset$,
- $C \cap \bigcap_{i=1, i \neq j}^{n} C_i \neq \emptyset$.

Aplicamos el Teorema de Klee$\Rightarrow \exists x_0 \in C$ con $x_0 \notin C_i \;\; i = 1, \ldots, n$.
Por lo tanto $g(x_0, y_i) \leq \tilde{g}(x_0, y_i) < \lambda$.

Teorema de la Alternativa

Definimos $C_i := L \backslash U_i$, cerrado y convexo de L.Por lo tanto tenemos:

- $C \cap \bigcap_{i=1}^{n} C_i = \emptyset$,
- $C \cap \bigcap_{i=1, i \neq j}^{n} C_i \neq \emptyset$.

Aplicamos el Teorema de Klee$\Rightarrow$ $\exists x_0 \in C$ con $x_0 \notin C_i$ $i = 1, \ldots, n$.
Por lo tanto $g(x_0, y_i) \leq \tilde{g}(x_0, y_i) < \lambda$.
Como $g(x_0, \cdot)$ es casi-convexa $\Rightarrow$
$g(x_0, y) < \lambda \; \forall y \in D := Conv\{y_i \mid i = 1, \ldots, n\}$

Teorema de la Alternativa

Definimos $C_i := L \backslash U_i$, cerrado y convexo de L.Por lo tanto tenemos:

- $C \cap \bigcap_{i=1}^{n} C_i = \emptyset$,
- $C \cap \bigcap_{i=1, i\neq j}^{n} C_i \neq \emptyset$.

Aplicamos el Teorema de Klee$\Rightarrow$ $\exists x_0 \in C$ con $x_0 \notin C_i$ $i = 1, \ldots, n$.
Por lo tanto $g(x_0, y_i) \leq \tilde{g}(x_0, y_i) < \lambda$.
Como $g(x_0, \cdot)$ es casi-convexa $\Rightarrow$
$g(x_0, y) < \lambda$ $\forall y \in D := Conv\{y_i \mid i = 1, \ldots, n\}$
De forma similar obtenemos $f(x, y_0) > \lambda, \forall x \in C$.

Teorema de la Alternativa

Definimos $C_i := L \backslash U_i$, cerrado y convexo de L.Por lo tanto tenemos:

- $C \cap \bigcap_{i=1}^{n} C_i = \emptyset$,
- $C \cap \bigcap_{i=1, i \neq j}^{n} C_i \neq \emptyset$.

Aplicamos el Teorema de Klee$\Rightarrow \exists x_0 \in C$ con $x_0 \notin C_i \; i = 1, \ldots, n$.
Por lo tanto $g(x_0, y_i) \leq \tilde{g}(x_0, y_i) < \lambda$.
Como $g(x_0, \cdot)$ es casi-convexa $\Rightarrow$
$g(x_0, y) < \lambda \; \forall y \in D := Conv\{y_i \mid i = 1, \ldots, n\}$
De forma similar obtenemos $f(x, y_0) > \lambda, \forall x \in C$.
Por lo tanto:

$$\lambda < f(x_0, y_0) \leq g(x_0, y_0) < \lambda$$

Contradicción.

Corolario

Bajo las mismas hipótesis que en el teorema anterior, entonces:

$$\bar{\alpha} = \sup_{X} \inf_{Y} \tilde{g}(x, y) \geq \min_{Y} \sup_{X} \tilde{f}(x, y) = \bar{\beta}$$

Corolario

Bajo las mismas hipótesis que en el teorema anterior, entonces:

$$\bar{\alpha} = \sup_X \inf_Y \tilde{g}(x,y) \geq \min_Y \sup_X \tilde{f}(x,y) = \bar{\beta}$$

Dem: Suponemos $\bar{\alpha} < \bar{\beta}$.
Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $\bar{\alpha} < \lambda < \bar{\beta}$.
Por el teorema anterior $\exists \bar{y} \in Y$ tal que $\forall x \in X$, $\tilde{f}(x,\bar{y}) \leq \lambda$.
Entonces $\bar{\beta} \leq \lambda < \bar{\beta}$.
Contradicción.
O si no $\exists \bar{x} \in X$ tal que $\forall y \in Y$, $\tilde{g}(\bar{x},y) \geq \lambda$, entonces $\bar{\alpha} \geq \lambda > \bar{\alpha}$
Contradicción.

Teorema Minimax

Teorema (von Neumann, versión de Sion)

Sean X e Y dos subconjuntos convexos de espacios vectoriales topológicos,con Y compacto y sea $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- $x \longmapsto f(x,y)$ superiormente semicontinua y casi-cóncava en X, para cada $y \in Y$ fijo.
- $y \longmapsto f(x,y)$ inferiormente semicontinua y casi-convexa en Y, para cada $x \in X$ fijo

Entonces:

$$\sup_X \min_Y f(x,y) = \min_Y \sup_X f(x,y)$$

Teorema de la Alternativa

Observaciones

- Las conclusiones A y B del Teorema son equivalentes a la conclusión del corolario.
- El supremo de una familia de funciones inferiormente semicontinuas es inferiormente semicontinua.
- Una función inferiormente semicontinua de un compacto que toma valores reales alcanza un mínimo.

Notación

Dada una relación $A \subset X \times Y$, denotamos:

Notación

Dada una relación $A \subset X \times Y$, denotamos:

- Las secciones de A:
    - $A[x] := \{y \in Y \,:\, (x, y) \in A\}$.
    - $A[y] := \{x \in X \,:\, (x, y) \in A\}$.

Notación

Dada una relación $A \subset X \times Y$, denotamos:

- Las secciones de A:
    - $A[x] := \{y \in Y \,:\, (x, y) \in A\}$.
    - $A[y] := \{x \in X \,:\, (x, y) \in A\}$.
- Su relación inversa $A^{-1} := \{(y, x) \in Y \times X \,:\, (x, y) \in A\}$.

Pares de von Neumann

Definición:

Dadas $\tilde{A}, A \subset X \times Y$, se dice que $(\tilde{A}, A)$ es un par de von Neumann si:

Pares de von Neumann

Definición:

Dadas $\tilde{A}, A \subset X \times Y$, se dice que $(\tilde{A}, A)$ es un par de von Neumann si:

i) $\tilde{A} \subset A$.

Pares de von Neumann

Definición:

Dadas $\tilde{A}, A \subset X \times Y$, se dice que $(\tilde{A}, A)$ es un par de von Neumann si:

i) $\tilde{A} \subset A$.

ii) Dado $y \in Y$, $A[y]$ es convexa.

Pares de von Neumann

Definición:

Dadas $\tilde{A}, A \subset X \times Y$, se dice que $(\tilde{A}, A)$ es un par de von Neumann si:

i) $\tilde{A} \subset A$.

ii) Dado $y \in Y$, $A[y]$ es convexa.

iii) Dado $x \in X$, $Y \backslash \tilde{A}[x]$ es convexo y $\tilde{A}[x]$ es abierto.

Aplicación del Teorema de la Alternativa

Teorema:

Sean X, Y dos subconjuntos convexos no vacíos en espacios topológicos de Hausdorff. Sean $(\tilde{A}, A), (\tilde{B}, B)$ dos pares de relaciones de $X \times Y$. Asumamos que Y compacto y que los pares $(\tilde{A}, A), (\tilde{B}^{-1}, B^{-1})$ son de von Neumann.

Aplicación del Teorema de la Alternativa

Teorema:

Sean X, Y dos subconjuntos convexos no vacíos en espacios topológicos de Hausdorff. Sean $(\tilde{A}, A), (\tilde{B}, B)$ dos pares de relaciones de $X \times Y$. Asumamos que Y compacto y que los pares $(\tilde{A}, A), (\tilde{B}^{-1}, B^{-1})$ son de von Neumann.

Entonces se verifica la siguiente alternativa:

(1) $\tilde{A}[\bar{y}] = \emptyset$ para algún $\bar{y} \in Y$ $\vee$ $\tilde{B}[\bar{x}] = \emptyset$ para algún $\bar{x} \in X$. (Elemento maximal)

(2) $A \cap B \neq \emptyset$. (Coincidencia)

Esquema de la prueba

Demostración (esquema):

- **Definimos** $\lambda := \frac{1}{2}$ **y** $\tilde{f}, f, g, \tilde{g} : X \times Y \to \mathbb{R}$ **tales que** $\tilde{f} \equiv 1_{\tilde{A}}, f \equiv 1_{A}, g \equiv 1_{B^c}, \tilde{g} \equiv 1_{\tilde{B}^c}$**.**

Esquema de la prueba

Demostración (esquema):

- Definimos $\lambda := \frac{1}{2}$ y $\tilde{f}, f, g, \tilde{g} : X \times Y \to \mathbb{R}$ tales que $\tilde{f} \equiv 1_{\tilde{A}}, f \equiv 1_{A}, g \equiv 1_{B^c}, \tilde{g} \equiv 1_{\tilde{B}^c}$.
- **Se verifican (ii),(iii),(iv) y (v) del Teorema de la Alternativa.**

Esquema de la prueba

Demostración (esquema):

- Definimos $\lambda := \frac{1}{2}$ y $\tilde{f}, f, g, \tilde{g} : X \times Y \to \mathbb{R}$ tales que $\tilde{f} \equiv 1_{\tilde{A}}, f \equiv 1_{A}, g \equiv 1_{B^c}, \tilde{g} \equiv 1_{\tilde{B}^c}$.
- Se verifican (ii),(iii),(iv) y (v) del Teorema de la Alternativa.
- **Asumamos que la opción (1) no se cumple.**

Esquema de la prueba

Demostración (esquema):

- Definimos $\lambda := \frac{1}{2}$ y $\tilde{f}, f, g, \tilde{g} : X \times Y \to \mathbb{R}$ tales que $\tilde{f} \equiv 1_{\tilde{A}}, f \equiv 1_{A}, g \equiv 1_{B^c}, \tilde{g} \equiv 1_{\tilde{B}^c}$.
- Se verifican (ii),(iii),(iv) y (v) del Teorema de la Alternativa.
- Asumamos que la opción (1) no se cumple.
- **Entonces no se verifica la tesis del Teorema de la Alternativa.**

Esquema de la prueba

Demostración (esquema):

- Definimos $\lambda := \frac{1}{2}$ y $\tilde{f}, f, g, \tilde{g} : X \times Y \to \mathbb{R}$ tales que $\tilde{f} \equiv 1_{\tilde{A}}, f \equiv 1_{A}, g \equiv 1_{B^c}, \tilde{g} \equiv 1_{\tilde{B}^c}$.
- Se verifican (ii),(iii),(iv) y (v) del Teorema de la Alternativa.
- Asumamos que la opción (1) no se cumple.
- Entonces no se verifica la tesis del Teorema de la Alternativa.
- **Necesariamente no se verifica (i) del Teorema de la Alternativa.**

Esquema de la prueba

Demostración (esquema):

- Definimos $\lambda := \frac{1}{2}$ y $\tilde{f}, f, g, \tilde{g} : X \times Y \to \mathbb{R}$ tales que $\tilde{f} \equiv 1_{\tilde{A}}, f \equiv 1_{A}, g \equiv 1_{B^c}, \tilde{g} \equiv 1_{\tilde{B}^c}$.
- Se verifican (ii),(iii),(iv) y (v) del Teorema de la Alternativa.
- Asumamos que la opción (1) no se cumple.
- Entonces no se verifica la tesis del Teorema de la Alternativa.
- Necesariamente no se verifica (i) del Teorema de la Alternativa.
- **Como** $\tilde{f} \leq f$ **y** $g \leq \tilde{g} \Rightarrow f \not\leq g$**.**

Esquema de la prueba

Demostración (esquema):

- Definimos $\lambda := \frac{1}{2}$ y $\tilde{f}, f, g, \tilde{g} : X \times Y \to \mathbb{R}$ tales que $\tilde{f} \equiv 1_{\tilde{A}}, f \equiv 1_{A}, g \equiv 1_{B^c}, \tilde{g} \equiv 1_{\tilde{B}^c}$.
- Se verifican (ii),(iii),(iv) y (v) del Teorema de la Alternativa.
- Asumamos que la opción (1) no se cumple.
- Entonces no se verifica la tesis del Teorema de la Alternativa.
- Necesariamente no se verifica (i) del Teorema de la Alternativa.
- Como $\tilde{f} \leq f$ y $g \leq \tilde{g} \Rightarrow f \not\leq g$.
- **Y esto conlleva finalmente a la verificación de (2).**

Bibliografía

- *A simpler proof of the von Neumann Minimax Theorem*,
  H. Ben-El-Mechaiekh and R.W. Dimand.
- *On certain intersection properties of convex sets*,
  V. L. Klee Jr.
- *On general minimax theorems*,
  M. Sion.
- *Theory of Games and Economic Behavior*,
  J. von Neumann, M. Morgenstern.
- *Functional analysis*,
  W. Rudin.

Gracias por vuestra atención