Desigualdades de Brunn-Minkowski e isoperimétricas

Óscar Domínguez (UCM)
Alba Gómez (US)
Víctor Manuel Jiménez (ULL)
Pablo Jiménez (UCM)
Axel Leonhardt (UB)
Alexis Molino (UGR)

18/04/2012

Contenido

Desigualdad de Prekopa-Liendler

Teorema (Prekopa-Liendler)

Sean $f, g, m : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ *tres funciones medibles y* $0 < \lambda < 1$ *de forma que*

$$m(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^\lambda \cdot g(y)^{1-\lambda} \, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Entonces,

$$\int_{\mathbb{R}^n} m \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)^\lambda \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)^{1-\lambda}$$

caso n=1

Supongamos que A, B son medibles y acotados, y C medible de modo que $A + B \subseteq C$. Entonces

$$|C| \geq |A| + |B|$$

caso n=1

Supongamos que A, B son medibles y acotados, y C medible de modo que $A + B \subseteq C$. Entonces

$$|C| \geq |A| + |B|$$

- Es suficiente con considerar $A \subseteq (-\infty, \epsilon)$, $B \subseteq (-\epsilon, +\infty)$ y $0 \in A \cap B$, $\forall \epsilon > 0$.

caso n=1

Supongamos que A, B son medibles y acotados, y C medible de modo que $A + B \subseteq C$. Entonces

$$|C| \geq |A| + |B|$$

- Es suficiente con considerar $A \subseteq (-\infty, \epsilon)$, $B \subseteq (-\epsilon, +\infty)$ y $0 \in A \cap B$, $\forall \epsilon > 0$.
- $|C| \geq |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \geq |A| + |B| - 2\epsilon$

caso n=1

Supongamos que A, B son medibles y acotados, y C medible de modo que $A + B \subseteq C$. Entonces

$$|C| \geq |A| + |B|$$

- Es suficiente con considerar $A \subseteq (-\infty, \epsilon)$, $B \subseteq (-\epsilon, +\infty)$ y $0 \in A \cap B$, $\forall \epsilon > 0$.
- $|C| \geq |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \geq |A| + |B| - 2\epsilon$
- Hacemos $\epsilon \to 0$

caso n=1

- $$\int_{\mathbb{R}} f = \int_0^{\infty} |\{x : f(x) \geq t\}| dt$$

caso n=1

- $$\int_{\mathbb{R}} f = \int_0^{\infty} |\{x : f(x) \geq t\}| dt$$

- Caso I: f y g acotadas con soporte compacto y $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$

caso n=1

- $$\int_{\mathbb{R}} f = \int_0^\infty |\{x : f(x) \geq t\}| dt$$
- Caso I: f y g acotadas con soporte compacto y $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$
- Para $0 < t < 1$ y $\lambda \in [0,1]$

$$\{z : m(z) \geq t\} \supseteq \lambda\{x : f(x) \geq t\} + (1-\lambda)\{y : g(y) \geq t\}$$

caso n=1

- $$\int_{\mathbb{R}} f = \int_0^\infty |\{x : f(x) \geq t\}| dt$$
- Caso I: f y g acotadas con soporte compacto y $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$
- Para $0 < t < 1$ y $\lambda \in [0,1]$
$$\{z : m(z) \geq t\} \supseteq \lambda\{x : f(x) \geq t\} + (1-\lambda)\{y : g(y) \geq t\}$$
- $|\{z : m(z) \geq t\}| \geq \lambda|\{x : f(x) \geq t\}| + (1-\lambda)|\{y : g(y) \geq t\}|$

caso n=1

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} m &\geq \int_0^1 |\{z : m(z) \geq t\}| dt \\
&\geq \lambda \int_0^1 |\{x : f(x) \geq t\}| dt + (1-\lambda) \int_0^1 |\{y : g(y) \geq t\}| dt \\
&= \lambda \int_{\mathbb{R}} f + (1-\lambda) \int_{\mathbb{R}} g \\
&\geq \left(\int_{\mathbb{R}} f \right)^{\lambda} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} g \right)^{1-\lambda}
\end{aligned}
$$

caso n=1

Teorema

Versión del Teorema de la Convergencia Monótona *Sea* $\{f_n\}$ *una sucesión creciente de funciones medibles no negativas y* $f(x) = lim f_n(x)$*. Entonces*

$$\int f\, dx = lim \int f_n dx$$

(el valor $+\infty$ *es admisible)*

caso n=1

Teorema

Versión del Teorema de la Convergencia Monótona *Sea* $\{f_n\}$ *una sucesión creciente de funciones medibles no negativas y* $f(x) = lim f_n(x)$. *Entonces*

$$\int f\, dx = lim \int f_n dx$$

(el valor $+\infty$ *es admisible)*

- Caso II: Una de las dos no es acotada o no tiene soporte compacto.

caso n=1

Teorema

Versión del Teorema de la Convergencia Monótona *Sea* $\{f_n\}$ *una sucesión creciente de funciones medibles no negativas y* $f(x) = lim f_n(x)$. *Entonces*

$$\int f\,dx = lim \int f_n dx$$

(el valor $+\infty$ *es admisible)*

- Caso II: Una de las dos no es acotada o no tiene soporte compacto.
- Definimos $f_n(x) = (f(x) \wedge n) \cdot \chi_{[-n,n]}$ y $g_n(x) = (g(x) \wedge n) \cdot \chi_{[-n,n]}$ para $n \in \mathbb{N}$

caso n=1

Teorema

Versión del Teorema de la Convergencia Monótona *Sea* $\{f_n\}$ *una sucesión creciente de funciones medibles no negativas y* $f(x) = lim f_n(x)$. *Entonces*

$$\int f\,dx = lim \int f_n dx$$

(el valor $+\infty$ *es admisible)*

- Caso II: Una de las dos no es acotada o no tiene soporte compacto.
- Definimos $f_n(x) = (f(x) \wedge n) \cdot \chi_{[-n,n]}$ y $g_n(x) = (g(x) \wedge n) \cdot \chi_{[-n,n]}$ para $n \in \mathbb{N}$
- Entonces

$$\int_{\mathbb{R}} m \geq \left(\int_{\mathbb{R}} f_n\right)^{\lambda} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} g_n\right)^{1-\lambda}$$

n=1

- Por el T.C.M.,

$$lim \int f_n = \int f \text{ y } lim \int g_n = \int g$$

caso general

- Supongamos cierto el resultado para n

caso general

- Supongamos cierto el resultado para n
- Sean $f, g, m : \mathbb{R}^{n+1} \to [0, \infty)$ medibles tal que $\exists \lambda \in (0, 1)$ satisfaciendo $m(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^{\lambda} g(y)^{1-\lambda} \, \forall x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$

caso general

- Supongamos cierto el resultado para n
- Sean $f, g, m : \mathbb{R}^{n+1} \to [0, \infty)$ medibles tal que $\exists \lambda \in (0, 1)$ satisfaciendo $m(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^{\lambda} g(y)^{1-\lambda}\, \forall x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$
- Sean $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $z_0 := \lambda x_0 + (1-\lambda) y_0$

caso general

- Supongamos cierto el resultado para n
- Sean $f, g, m : \mathbb{R}^{n+1} \to [0, \infty)$ medibles tal que $\exists \lambda \in (0, 1)$ satisfaciendo $m(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq f(x)^{\lambda} g(y)^{1-\lambda}\ \forall x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$
- Sean $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $z_0 := \lambda x_0 + (1 - \lambda)y_0$
- Definimos

$$\begin{array}{rccl} f_{x_0} : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & [0, \infty) \\ & x & \to & f(x_0, x) \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} g_{y_0} : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & [0, \infty) \\ & y & \to & g(y_0, y) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} m_{z_0} : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & [0, \infty) \\ & z & \to & m(z_0, z) \end{array}$$

caso general

- $$\int_{\mathbb{R}^n} m_{z_0}(x)dx \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_{x_0}(x)dx\right)^{\lambda} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} g_{y_0}(x)dx\right)^{1-\lambda}$$

caso general

- $$\int_{\mathbb{R}^n} m_{z_0}(x)dx \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_{x_0}(x)dx\right)^{\lambda} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} g_{y_0}(x)dx\right)^{1-\lambda}$$

- Definimos

$$\begin{array}{rccc} \tilde{f}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,\infty) \\ & u & \to & \int_{\mathbb{R}^n} f_u(x)dx \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \tilde{g}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,\infty) \\ & u & \to & \int_{\mathbb{R}^n} g_u(x)dx \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \tilde{m}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,\infty) \\ & u & \to & \int_{\mathbb{R}^n} m_u(x)dx \end{array}$$

caso general

- $$\int_{\mathbb{R}^n} m_{z_0}(x)dx \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_{x_0}(x)dx\right)^{\lambda} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} g_{y_0}(x)dx\right)^{1-\lambda}$$

- Definimos

$$\begin{array}{rccc} \tilde{f}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,\infty) \\ & u & \rightarrow & \int_{\mathbb{R}^n} f_u(x)dx \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \tilde{g}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,\infty) \\ & u & \rightarrow & \int_{\mathbb{R}^n} g_u(x)dx \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \tilde{m}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,\infty) \\ & u & \rightarrow & \int_{\mathbb{R}^n} m_u(x)dx \end{array}$$

- $$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} m = \int_{\mathbb{R}} \tilde{m} \geq \left(\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}\right)^{\lambda} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} \tilde{g}\right)^{1-\lambda} = \left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}} f\right)^{\lambda} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}} g\right)^{1-\lambda}$$

Contenido

Desigualdad de Brunn-Minkowski

Teorema (forma multiplicativa)

Sean A, B dos conjuntos medibles no vacíos en $\mathbb{R}^n$ y $0 < \lambda < 1$ tales que $\lambda A + (1-\lambda)B$ es medible. Entonces,

$$Vol(\lambda A + (1-\lambda)B) \geq Vol(A)^{\lambda} \cdot Vol(B)^{1-\lambda} \tag{1}$$

Desigualdad de Brunn-Minkowski

Teorema (forma multiplicativa)

Sean A, B dos conjuntos medibles no vacíos en $\mathbb{R}^n$ y $0 < \lambda < 1$ tales que $\lambda A + (1-\lambda)B$ es medible. Entonces,

$$Vol(\lambda A + (1-\lambda)B) \geq Vol(A)^{\lambda} \cdot Vol(B)^{1-\lambda} \tag{1}$$

Demostración:
Simplemente se aplica el Teorema de Prekopa-Liendler a las funciones $m(x) = \chi_{\lambda A+(1-\lambda)B}(x)$, $f(x) = \chi_A$ y $g(x) = \chi_B$

Demostración

La anterior desigualdad es equivalente a

Teorema

Sean A, B dos conjuntos medibles no vacíos en $\mathbb{R}^n$ tales que $A + B$ es medible. Entonces,

$$Vol(A+B)^{1/n} \geq Vol(A)^{1/n} + Vol(B)^{1/n} \tag{2}$$

- $(2) \Rightarrow (1)$

$$Vol(\lambda A + (1-\lambda)B)^{1/n} \geq Vol(\lambda A)^{1/n} + Vol((1-\lambda)B)^{1/n} =$$

- $(2) \Rightarrow (1)$

$$Vol(\lambda A+(1-\lambda)B)^{1/n} \geq Vol(\lambda A)^{1/n} + Vol((1-\lambda)B)^{1/n} =$$

$$\lambda Vol(A)^{1/n} + (1-\lambda)Vol(B)^{1/n} \geq Vol(A)^{\lambda/n} Vol(B)^{(1-\lambda)/n}$$

- $(2) \Rightarrow (1)$

$$Vol(\lambda A + (1-\lambda)B)^{1/n} \geq Vol(\lambda A)^{1/n} + Vol((1-\lambda)B)^{1/n} =$$

$$\lambda Vol(A)^{1/n} + (1-\lambda)Vol(B)^{1/n} \geq Vol(A)^{\lambda/n} Vol(B)^{(1-\lambda)/n}$$

- $(1) \Rightarrow (2)$ Supongamos que $Vol(A), Vol(B) > 0$

- $(2) \Rightarrow (1)$

$$Vol(\lambda A + (1-\lambda)B)^{1/n} \geq Vol(\lambda A)^{1/n} + Vol((1-\lambda)B)^{1/n} =$$

$$\lambda Vol(A)^{1/n} + (1-\lambda)Vol(B)^{1/n} \geq Vol(A)^{\lambda/n} Vol(B)^{(1-\lambda)/n}$$

- $(1) \Rightarrow (2)$ Supongamos que $Vol(A), Vol(B) > 0$

$$\frac{Vol(A+B)}{(Vol(A)^{1/n} + Vol(B)^{1/n})^n} = Vol\left(\frac{A+B}{Vol(A)^{1/n} + Vol(B)^{1/n}}\right)$$

- $(2) \Rightarrow (1)$

$$Vol(\lambda A + (1-\lambda)B)^{1/n} \geq Vol(\lambda A)^{1/n} + Vol((1-\lambda)B)^{1/n} =$$

$$\lambda Vol(A)^{1/n} + (1-\lambda) Vol(B)^{1/n} \geq Vol(A)^{\lambda/n} Vol(B)^{(1-\lambda)/n}$$

- $(1) \Rightarrow (2)$ Supongamos que $Vol(A), Vol(B) > 0$

$$\frac{Vol(A+B)}{(Vol(A)^{1/n} + Vol(B)^{1/n})^n} = Vol\left(\frac{A+B}{Vol(A)^{1/n} + Vol(B)^{1/n}}\right)$$

$$= Vol\left(\lambda \frac{A}{Vol(A)^{1/n}} + (1-\lambda)\frac{B}{Vol(B)^{1/n}}\right)$$

- $(2) \Rightarrow (1)$

$$Vol(\lambda A + (1-\lambda)B)^{1/n} \geq Vol(\lambda A)^{1/n} + Vol((1-\lambda)B)^{1/n} =$$

$$\lambda Vol(A)^{1/n} + (1-\lambda)Vol(B)^{1/n} \geq Vol(A)^{\lambda/n} Vol(B)^{(1-\lambda)/n}$$

- $(1) \Rightarrow (2)$ Supongamos que $Vol(A), Vol(B) > 0$

$$\frac{Vol(A+B)}{(Vol(A)^{1/n} + Vol(B)^{1/n})^n} = Vol\left(\frac{A+B}{Vol(A)^{1/n} + Vol(B)^{1/n}}\right)$$

$$= Vol\left(\lambda \frac{A}{Vol(A)^{1/n}} + (1-\lambda)\frac{B}{Vol(B)^{1/n}}\right)$$

con

$$\lambda := \frac{Vol(A)^{1/n}}{Vol(A)^{1/n} + Vol(B)^{1/n}}$$

- Aplicando (1) tenemos:

$$\frac{Vol(A+B)}{(Vol(A)^{1/n}+Vol(B)^{1/n})^n}$$

$$\geq Vol\left(\frac{A}{Vol(A)^{1/n}}\right)^{\lambda} Vol\left(\frac{B}{Vol(B)^{1/n}}\right)^{1-\lambda} = 1$$

- Aplicando (1) tenemos:

$$\frac{Vol(A+B)}{(Vol(A)^{1/n}+Vol(B)^{1/n})^n}$$

$$\geq Vol\left(\frac{A}{Vol(A)^{1/n}}\right)^{\lambda} Vol\left(\frac{B}{Vol(B)^{1/n}}\right)^{1-\lambda}=1$$

- $$Vol(A+B)\geq (Vol(A)^{1/n}+Vol(B)^{1/n})^n$$

- Aplicando (1) tenemos:

$$\frac{Vol(A+B)}{(Vol(A)^{1/n}+Vol(B)^{1/n})^n}$$

$$\geq Vol\left(\frac{A}{Vol(A)^{1/n}}\right)^{\lambda} Vol\left(\frac{B}{Vol(B)^{1/n}}\right)^{1-\lambda} = 1$$

- $$Vol(A+B) \geq (Vol(A)^{1/n}+Vol(B)^{1/n})^n$$

- $$Vol(A+B)^{1/n} \geq Vol(A)^{1/n}+Vol(B)^{1/n}$$

- Aplicando (1) tenemos:

$$\frac{Vol(A+B)}{(Vol(A)^{1/n}+Vol(B)^{1/n})^n}$$

$$\geq Vol\left(\frac{A}{Vol(A)^{1/n}}\right)^{\lambda} Vol\left(\frac{B}{Vol(B)^{1/n}}\right)^{1-\lambda} = 1$$

- $$Vol(A+B) \geq (Vol(A)^{1/n}+Vol(B)^{1/n})^n$$

- $$Vol(A+B)^{1/n} \geq Vol(A)^{1/n}+Vol(B)^{1/n}$$

Nota: Para cuerpos convexos (con interior no vacío) se da la igualdad si y sólo si los dos cuerpos son homotéticos.

Contenido

Volumen de la frontera

Definición

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ con frontera regular. Definimos el volumen de la frontera de A como

$$Vol(\partial A) := \lim_{t \to 0^+} \frac{Vol(A + tB_2^n) - Vol(A)}{t}$$

supuesto que el límite existe y siendo B_2^n la bola euclídea de $\mathbb{R}^n$.

Desigualdad isoperimétrica

Teorema

Sea $v_n := Vol(B_2^n)$. Entonces B_2^n tiene la frontera con menor volumen de entre todos los cuerpos de $\mathbb{R}^n$ con volumen v_n.

Demostración

- $A \subset \mathbb{R}^n$ con $Vol(A) = v_n$

Demostración

- $A \subset \mathbb{R}^n$ con $Vol(A) = v_n$
- $f(t) = Vol(A + tB_2^n)$

Demostración

- $A \subset \mathbb{R}^n$ con $Vol(A) = v_n$
- $f(t) = Vol(A + tB_2^n)$
- $(f(t)^{1/n})'_{t=0} = \frac{1}{n} \cdot f(0)^{1/n-1} \cdot f'(0) = \frac{1}{n} \cdot Vol(A)^{1/n-1} \cdot Vol(\partial A)$
- $$\begin{aligned} (f(t)^{1/n})'_{t=0} &= \lim_{t\to 0^+} \frac{Vol(A + tB_2^n)^{1/n} - Vol(A)^{1/n}}{t} \\ &\geq \lim_{t\to 0^+} \frac{Vol(tB_2^n)^{1/n}}{t} = Vol(B_2^n) \end{aligned}$$

Demostración

- $A \subset \mathbb{R}^n$ con $Vol(A) = v_n$
- $f(t) = Vol(A + tB_2^n)$
- $(f(t)^{1/n})'_{t=0} = \frac{1}{n} \cdot f(0)^{1/n-1} \cdot f'(0) = \frac{1}{n} \cdot Vol(A)^{1/n-1} \cdot Vol(\partial A)$
- $$\begin{aligned}(f(t)^{1/n})'_{t=0} &= \lim_{t \to 0^+} \frac{Vol(A + tB_2^n)^{1/n} - Vol(A)^{1/n}}{t} \\ &\geq \lim_{t \to 0^+} \frac{Vol(tB_2^n)^{1/n}}{t} = Vol(B_2^n)\end{aligned}$$
- $Vol(\partial A) \geq n \cdot Vol(B_2^n)^{1/n} \cdot Vol(A)^{1-1/n} = n \cdot v_n = Vol(\partial B_2^n)$

Contenido

Teorema

Sea $\|\cdot\|$ *una norma en* S^{n-1}. *Dados* $\epsilon > 0$ *y* $A \subseteq S^{n-1}$,

$$\mu(A_\epsilon^c) \leq \left(\frac{2^n - 1}{2^n}\right)^{-2} \frac{1}{\mu(A)} e^{-2\delta(\epsilon/2)n}$$

siendo μ *la medida de Haar sobre* S^{n-1}, $A_\epsilon := \{x \in S^{n-1} \,:\, d(x, A) \leq \epsilon\}$ *y* $\delta(\cdot)$ *el módulo de convexidad.*

Definición

Se define el módulo de convexidad como
$\delta(\epsilon) := inf\{1 - ||\frac{x+y}{2}|| : ||x||, ||y|| \leq 1, ||x-y|| \geq \epsilon\}$

Definición

Se define el módulo de convexidad como
$\delta(\epsilon) := inf\{1 - ||\frac{x+y}{2}|| : ||x||, ||y|| \leq 1, ||x-y|| \geq \epsilon\}$

- A, $B \subset B^n_{||\cdot||}$ de forma que $d(A, B) \geq \epsilon$

Definición

Se define el módulo de convexidad como
$\delta(\epsilon) := inf\{1 - ||\frac{x+y}{2}|| : ||x||, ||y|| \leq 1, ||x-y|| \geq \epsilon\}$

- A, $B \subset B^n_{\|\cdot\|}$ de forma que $d(A, B) \geq \epsilon$
- Dados $a \in A$ y $b \in B$ con $\|a - b\| \geq \epsilon$, se tiene $\|\frac{a+b}{2}\| \leq 1 - \delta(\epsilon)$

Definición

Se define el módulo de convexidad como
$\delta(\epsilon) := inf\{1 - ||\frac{x+y}{2}|| : ||x||, ||y|| \leq 1, ||x-y|| \geq \epsilon\}$

- $A, B \subset B^n_{\|\cdot\|}$ de forma que $d(A,B) \geq \epsilon$
- Dados $a \in A$ y $b \in B$ con $\|a-b\| \geq \epsilon$, se tiene $\|\frac{a+b}{2}\| \leq 1 - \delta(\epsilon)$
- $\frac{A+B}{2} \subseteq (1-\delta(\epsilon))B^n_{\|\cdot\|}$

Definición

Se define el módulo de convexidad como
$\delta(\epsilon) := inf\{1 - ||\frac{x+y}{2}|| : ||x||, ||y|| \leq 1, ||x-y|| \geq \epsilon\}$

- A, $B \subset B^n_{\|\cdot\|}$ de forma que $d(A, B) \geq \epsilon$
- Dados $a \in A$ y $b \in B$ con $\|a - b\| \geq \epsilon$, se tiene $\|\frac{a+b}{2}\| \leq 1 - \delta(\epsilon)$
- $\frac{A+B}{2} \subseteq (1 - \delta(\epsilon))B^n_{\|\cdot\|}$
- $Vol(\frac{A+B}{2}) \leq e^{-\delta(\epsilon)n} \cdot Vol(B^n_{\|\cdot\|})$

Definición

Se define el módulo de convexidad como
$\delta(\epsilon) := inf\{1 - ||\frac{x+y}{2}|| : ||x||, ||y|| \leq 1, ||x - y|| \geq \epsilon\}$

- A, $B \subset B^n_{\|\cdot\|}$ de forma que $d(A, B) \geq \epsilon$
- Dados $a \in A$ y $b \in B$ con $\|a - b\| \geq \epsilon$, se tiene $\|\frac{a+b}{2}\| \leq 1 - \delta(\epsilon)$
- $\frac{A+B}{2} \subseteq (1 - \delta(\epsilon))B^n_{\|\cdot\|}$
- $Vol(\frac{A+B}{2}) \leq e^{-\delta(\epsilon)n} \cdot Vol(B^n_{\|\cdot\|})$
- $Vol(\frac{A+B}{2}) \geq Vol(A)^{1/2} \cdot Vol(B)^{1/2}$

- $\dfrac{Vol(B)}{Vol(B^{\boldsymbol{n}}_{\|\cdot\|})} \leq \dfrac{Vol(B^{\boldsymbol{n}}_{\|\cdot\|})}{Vol(A)} e^{-2\delta(\epsilon)n}$

- $\frac{Vol(B)}{Vol(B^{\boldsymbol{n}}_{\|\cdot\|})} \leq \frac{Vol(B^{\boldsymbol{n}}_{\|\cdot\|})}{Vol(A)} e^{-2\delta(\epsilon)n}$
- Dados $A, B \subset S^{n-1}$, con $d(A, B) \geq \epsilon$, consideremos $\tilde{A} := [\frac{1}{2}, 1]A$, $\tilde{B} := [\frac{1}{2}, 1]B$

- $\frac{Vol(B)}{Vol(B^{\boldsymbol{n}}_{\|\cdot\|})} \leq \frac{Vol(B^{\boldsymbol{n}}_{\|\cdot\|})}{Vol(A)} e^{-2\delta(\epsilon)n}$
- Dados $A, B \subset S^{n-1}$, con $d(A, B) \geq \epsilon$, consideremos $\tilde{A} := [\frac{1}{2}, 1]A$, $\tilde{B} := [\frac{1}{2}, 1]B$
- $d(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq \epsilon/2$

- $\frac{Vol(B)}{Vol(B^n_{\|\cdot\|})} \leq \frac{Vol(B^n_{\|\cdot\|})}{Vol(A)} e^{-2\delta(\epsilon)n}$
- Dados $A, B \subset S^{n-1}$, con $d(A, B) \geq \epsilon$, consideremos $\tilde{A} := [\frac{1}{2}, 1]A$, $\tilde{B} := [\frac{1}{2}, 1]B$
- $d(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq \epsilon/2$
- $\mu(A) = \frac{Vol([0,1]A)}{Vol(B^n_{\|\cdot\|})}$

- $\frac{Vol(B)}{Vol(B^{\boldsymbol{n}}_{\|\cdot\|})} \leq \frac{Vol(B^{\boldsymbol{n}}_{\|\cdot\|})}{Vol(A)} e^{-2\delta(\epsilon)n}$
- Dados $A, B \subset S^{n-1}$, con $d(A,B) \geq \epsilon$, consideremos $\tilde{A} := [\frac{1}{2}, 1]A$, $\tilde{B} := [\frac{1}{2}, 1]B$
- $d(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq \epsilon/2$
- $\mu(A) = \frac{Vol([0,1]A)}{Vol(B^{\boldsymbol{n}}_{\|\cdot\|})}$
- $Vol([0,1]A) = 2^n Vol([0, \frac{1}{2}]A)$

- $\frac{Vol(B)}{Vol(B^{\boldsymbol{n}}_{\|\cdot\|})} \leq \frac{Vol(B^{\boldsymbol{n}}_{\|\cdot\|})}{Vol(A)} e^{-2\delta(\epsilon)n}$
- Dados $A, B \subset S^{n-1}$, con $d(A, B) \geq \epsilon$, consideremos $\tilde{A} := [\frac{1}{2}, 1]A$, $\tilde{B} := [\frac{1}{2}, 1]B$
- $d(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq \epsilon/2$
- $\mu(A) = \frac{Vol([0,1]A)}{Vol(B^{\boldsymbol{n}}_{\|\cdot\|})}$
- $Vol([0, 1]A) = 2^n Vol([0, \frac{1}{2}]A)$
- $Vol([0, 1]A) = Vol([0, \frac{1}{2}]A) + Vol(\tilde{A})$

- $\frac{Vol(B)}{Vol(B^n_{\|\cdot\|})} \leq \frac{Vol(B^n_{\|\cdot\|})}{Vol(A)} e^{-2\delta(\epsilon)n}$
- Dados $A, B \subset S^{n-1}$, con $d(A,B) \geq \epsilon$, consideremos $\tilde{A} := [\frac{1}{2}, 1]A$, $\tilde{B} := [\frac{1}{2}, 1]B$
- $d(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq \epsilon/2$
- $\mu(A) = \frac{Vol([0,1]A)}{Vol(B^n_{\|\cdot\|})}$
- $Vol([0,1]A) = 2^n Vol([0, \frac{1}{2}]A)$
- $Vol([0,1]A) = Vol([0, \frac{1}{2}]A) + Vol(\tilde{A})$
- $Vol([0,1]A) = \frac{2^n}{2^n - 1} Vol(\tilde{A})$

- $\mu(A) = \frac{2^n}{2^n - 1} \frac{Vol(\tilde{A})}{Vol(B^n_{\|\cdot\|})}$

- $\mu(A) = \frac{2^n}{2^n - 1} \frac{Vol(\tilde{A})}{Vol(B^n_{\|\cdot\|})}$
- $\frac{Vol(\tilde{A})}{Vol(B^n_{\|\cdot\|})} \leq \frac{Vol(B^n_{\|\cdot\|})}{Vol(\tilde{B})} \cdot e^{-2\delta(\epsilon/2)n}$

- $\mu(A) = \frac{2^n}{2^n - 1} \frac{Vol(\tilde{A})}{Vol(B^n_{\|\cdot\|})}$
- $\frac{Vol(\tilde{A})}{Vol(B^n_{\|\cdot\|})} \leq \frac{Vol(B^n_{\|\cdot\|})}{Vol(\tilde{B})} \cdot e^{-2\delta(\epsilon/2)n}$
- $\mu(A) \leq \left(\frac{2^n}{2^n - 1}\right)^{-2} \cdot \frac{e^{-2\delta(\epsilon/2)n}}{\mu(B)}$

- $\mu(A) = \frac{2^n}{2^n - 1} \frac{Vol(\tilde{A})}{Vol(B^n_{\|\cdot\|})}$
- $\frac{Vol(\tilde{A})}{Vol(B^n_{\|\cdot\|})} \leq \frac{Vol(B^n_{\|\cdot\|})}{Vol(\tilde{B})} \cdot e^{-2\delta(\epsilon/2)n}$
- $\mu(A) \leq (\frac{2^n}{2^n - 1})^{-2} \cdot \frac{e^{-2\delta(\epsilon/2)n}}{\mu(B)}$
- En particular,

$$\mu(A^c_\epsilon) \leq (\frac{2^n}{2^n - 1})^{-2} \cdot \frac{e^{-2\delta(\epsilon/2)n}}{\mu(A)}$$

Corolario: Teorema de concentración de Levy

Teorema

Sea $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ una función Lipschitziana con constante L. Denotemos por M la media de f. Entonces existen constantes $0 < c, C < \infty$ tales que para cualquier $\epsilon > 0$, se satisface

$$\mu(\{x : |f(x) - M| > \epsilon\}) \leq Ce^{\frac{-c\epsilon^2 n}{L^2}}$$

- $L = 1$

- $L = 1$
- $\mu(\{|f(x) - M| > \epsilon\}) = \mu(\{f(x) - M > \epsilon\}) + \mu(\{f(x) - M < -\epsilon\})$

- $L = 1$
- $\mu(\{|f(x) - M| > \epsilon\}) = \mu(\{f(x) - M > \epsilon\}) + \mu(\{f(x) - M < -\epsilon\})$
- Sea $A := \{x \,:\, f(x) \leq M\}$. Entonces,

$$\{x \,:\, f(x) - M > \epsilon\} \subset A_\epsilon^c$$

- $L = 1$
- $\mu(\{|f(x) - M| > \epsilon\}) = \mu(\{f(x) - M > \epsilon\}) + \mu(\{f(x) - M < -\epsilon\})$
- Sea $A := \{x \,:\, f(x) \leq M\}$. Entonces,

$$\{x \,:\, f(x) - M > \epsilon\} \subset A_\epsilon^c$$

-

$$\mu(\{f(x) - M > \epsilon\}) \leq \mu(A_\epsilon^c) \leq 8e^{-\epsilon^2 n/16}$$

- $L = 1$
- $\mu(\{|f(x) - M| > \epsilon\}) = \mu(\{f(x) - M > \epsilon\}) + \mu(\{f(x) - M < -\epsilon\})$
- Sea $A := \{x \,:\, f(x) \leq M\}$. Entonces,

$$\{x \,:\, f(x) - M > \epsilon\} \subset A_\epsilon^c$$

- $$\mu(\{f(x) - M > \epsilon\}) \leq \mu(A_\epsilon^c) \leq 8e^{-\epsilon^2 n/16}$$

- $$\mu(\{f(x) - M < -\epsilon\}) \leq 8e^{-\epsilon^2 n/16}$$

- $L = 1$
- $\mu(\{|f(x) - M| > \epsilon\}) = \mu(\{f(x) - M > \epsilon\}) + \mu(\{f(x) - M < -\epsilon\})$
- Sea $A := \{x \, : \, f(x) \leq M\}$. Entonces,

$$\{x \, : \, f(x) - M > \epsilon\} \subset A_\epsilon^c$$

- $$\mu(\{f(x) - M > \epsilon\}) \leq \mu(A_\epsilon^c) \leq 8e^{-\epsilon^2 n/16}$$
- $$\mu(\{f(x) - M < -\epsilon\}) \leq 8e^{-\epsilon^2 n/16}$$
- $$\mu(\{|f(x) - M| > \epsilon\}) \leq 16e^{-\epsilon^2 n/16}$$

Bibliografía

J. Arias-de-Reyna, K. Ball and R. Villa, *Concentration of the distance in finite dimensional normed spaces*, Mathematika, **45** (1998), 245-252.

N. Gromov and V. Milman, *Generalization of the spherical isoperimetric inequality to uniformly convex Banach space*, Compositio Math. **62** (1987), 263-282.

V. Milman and G. Schechtman, *Asymptotic theory of finite-dimensional normed spaces*, Lecture notes in Mathematics, 1200, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

G. Pisier, *The volumes of convex bodies and Banach space geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

Bibliografía

- G. Schechtman,
  Asymptotic geometric analysis, Notas personales, disponible online en:
  http://www.wisdom.weizmann.ac.il/ gideon/AGAfall06/AGAfall06.pdf
- G. Schechtman, *Concentration, results and applications*, Handbook of the geometry of Banach spaces, disponible online en:
  http://www.wisdom.weizmann.ac.il/ gideon/papers/concentrationNov19.ps
- R. Schneider, *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory*, Encyclopedia of mathematics and its applications, 44. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

Gracias por vuestra atención