Desigualdad isoperimétrica "versus" desigualdades de Sobolev

E. Camacho (US) I. Fernández (UCM) A. González (ULL)
J. Granados (US) L. Urrutia (UGR)

18 de abril de 2012

IIª Escuela-Taller de Análisis Funcional

Índice

1. Notaciones y resultados previos

2. Desigualdad isoperimétrica vs. desigualdad de Sobolev en el extremo

1. Desigualdad isoperimétrica

1. Desigualdad isoperimétrica

Introducimos las siguientes notaciones:

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}, \quad m \equiv \text{ medida de Lebesgue en } \mathbb{R}^n$$

1. Desigualdad isoperimétrica

Introducimos las siguientes notaciones:

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |x| < 1\}, \quad m \equiv \text{ medida de Lebesgue en } \mathbb{R}^n$$

Teorema (Desigualdad isoperimétrica)

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un boreliano acotado. Se verifica

$$m^+(A) \geq c_n m(A)^{1-\frac{1}{n}}$$

y en caso de igualdad, entonces

$$c_n = n^{\frac{1}{n-1}} \omega_n^{\frac{1}{n(n-1)}},$$

donde $\omega_n = m(B)$.

1. Desigualdad isoperimétrica

Introducimos las siguientes notaciones:

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |x| < 1\}, \quad m \equiv \text{ medida de Lebesgue en } \mathbb{R}^n$$

Teorema (Desigualdad isoperimétrica)

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un boreliano acotado. Se verifica

$$m^+(A) \geq c_n m(A)^{1-\frac{1}{n}}$$

y en caso de igualdad, entonces

$$c_n = n^{\frac{1}{n-1}} \omega_n^{\frac{1}{n(n-1)}},$$

donde $\omega_n = m(B)$.

Veamos a qué corresponde m^+:

2. Área de Minkowski

2. Área de Minkowski

Definición

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un boreliano acotado. Dado $\varepsilon > 0$ definimos

$$A^\varepsilon = A + \varepsilon B = \{x = a + \varepsilon b \,:\, a \in A,\, b \in B\} = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \exists a \in A,\, |x - a| < \varepsilon\}$$

Entonces el **área de Minkowski** *del conjunto A es*

$$m^+(A) = \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{m(A^\varepsilon) - m(A)}{\varepsilon} = \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{m(A^\varepsilon \setminus A)}{\varepsilon}.$$

2. Área de Minkowski

Definición

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un boreliano acotado. Dado $\varepsilon > 0$ definimos

$$A^\varepsilon = A + \varepsilon B = \{x = a + \varepsilon b \; : \; a \in A, \, b \in B\} = \{x \in \mathbb{R}^n \; : \; \exists a \in A, \, |x - a| < \varepsilon\}$$

Entonces el **área de Minkowski** *del conjunto A es*

$$m^+(A) = \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{m(A^\varepsilon) - m(A)}{\varepsilon} = \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{m(A^\varepsilon \setminus A)}{\varepsilon}.$$

Observamos que m^+ **no** es una medida. Si lo fuera, entonces $\forall A$

$$m^+(A) + m^+(A^c) = m^+(\mathbb{R}^n) = \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{m((\mathbb{R}^n)^\varepsilon \setminus \mathbb{R}^n)}{\varepsilon} = \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{m(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n)}{\varepsilon} = 0$$

lo que implicaría $m^+(A) = 0 \; \forall A$, que no es posible.

3. Gradiente de una función

3. Gradiente de una función

Definición

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función diferenciable en el punto* x_0*. Se define el* **gradiente** *de* f *en* x_0 *como*

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right).$$

3. Gradiente de una función

Definición

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en el punto x_0. Se define el **gradiente** *de f en x_0 como*

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right).$$

$\forall f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en x_0 se tiene: $\displaystyle \lim_{y \to x_0} \frac{f(y) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), y - x_0 \rangle}{|y - x_0|} = 0.$

Pero como siempre existe $\displaystyle \limsup_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|}$, podemos definir el *módulo* del gradiente para una clase general de funciones:

3. Gradiente de una función

Definición

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en el punto x_0. Se define el **gradiente** *de f en x_0 como*

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right).$$

$\forall f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en x_0 se tiene: $\displaystyle\lim_{y \to x_0} \frac{f(y) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), y - x_0 \rangle}{|y - x_0|} = 0.$

Pero como siempre existe $\displaystyle\limsup_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|}$, podemos definir el *módulo* del gradiente para una clase general de funciones:

Definición

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de Lipschitz. Definimos la función $|\nabla f| : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ como

$$|\nabla f(x)| = \limsup_{y \to x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|}.$$

3. Gradiente de una función

3. Gradiente de una función

Lema

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función de Lipschitz, entonces la función $|\nabla f| : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ definida como

$$|\nabla f(x)| = \limsup_{y \to x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|}$$

es medible.

3. Gradiente de una función

Lema

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función de Lipschitz, entonces la función $|\nabla f| : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ definida como

$$|\nabla f(x)| = \limsup_{y \to x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|}$$

es medible.

Demostración. Sea $\{r_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de racionales decreciendo a cero e $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de vectores densa en $\mathbb{R}^n$. Entonces

$$|\nabla f(x)| = \lim_m F_m(x), \text{ donde } F_m(x) = \sup_k \frac{|f(y_k) - f(x)|}{|y_k - x|} \chi_{y_k + r_m B}(x) \quad c.q.d.$$

Como por el teorema de Rademacher toda función Lipschitz es diferenciable en $\mathbb{R}^n$, el concepto introducido coincide con la longitud del vector gradiente en casi todo punto.

4. Fórmula de Cavalieri

4. Fórmula de Cavalieri

Teorema (Fórmula de Cavalieri)

Si $f : X \to [0, \infty)$ es una función medible, $q \geq 1$ y μ es una medida σ-finita en X, entonces

$$\int_X |f|^q \, d\mu = \int_0^\infty q t^{q-1} \mu\{x \in X : |f(x)| > t\} \, dt.$$

4. Fórmula de Cavalieri

Teorema (Fórmula de Cavalieri)

Si $f : X \to [0,\infty)$ es una función medible, $q \geq 1$ y μ es una medida σ-finita en X, entonces

$$\int_X |f|^q \, d\mu = \int_0^\infty q t^{q-1} \mu\{x \in X : |f(x)| > t\} \, dt.$$

Demostración.

$$\int_X |f|^q \, d\mu = \int_X |f(x)|^q \, d\mu(x) = \int_X \left(\int_0^\infty q t^{q-1} \chi_{[0,|f(x)|]}(t) \, dt \right) d\mu(x) =$$

$$= \int_{X \times [0,\infty)} (q t^{q-1} \chi_{[0,|f(x)|]}(t) \, dt) \, d\mu(x) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^\infty \left(\int_X q t^{q-1} \chi_{[0,|f(x)|]}(t) \, d\mu(x) \right) dt =$$

$$= \int_0^\infty q t^{q-1} \left(\int_X \chi_{[0,|f(x)|]}(t) \, d\mu(x) \right) dt = \int_0^\infty q t^{q-1} \mu\{x \in X : |f(x)| > t\} \, dt.$$

4. Fórmula de Cavalieri

Teorema (Fórmula de Cavalieri)

Si $f : X \to [0,\infty)$ es una función medible, $q \geq 1$ y μ es una medida σ-finita en X, entonces

$$\int_X |f|^q \, d\mu = \int_0^\infty q t^{q-1} \mu\{x \in X : |f(x)| > t\} \, dt.$$

Demostración.

$$\int_X |f|^q \, d\mu = \int_X |f(x)|^q \, d\mu(x) = \int_X \left(\int_0^\infty q t^{q-1} \chi_{[0,|f(x)|]}(t) \, dt \right) d\mu(x) =$$

$$= \int_{X \times [0,\infty)} (q t^{q-1} \chi_{[0,|f(x)|]}(t) \, dt) \, d\mu(x) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^\infty \left(\int_X q t^{q-1} \chi_{[0,|f(x)|]}(t) \, d\mu(x) \right) dt =$$

$$= \int_0^\infty q t^{q-1} \left(\int_X \chi_{[0,|f(x)|]}(t) \, d\mu(x) \right) dt = \int_0^\infty q t^{q-1} \mu\{x \in X : |f(x)| > t\} \, dt.$$

Para $X = \mathbb{R}^n$ y $\mu = m$ se tendría:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^q \, dm = \int_0^\infty q t^{q-1} m\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\} \, dt.$$

5. Fórmula de la co-área

5. Fórmula de la co-área

Teorema (Fórmula de la co-área)

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *de clase* C^∞ *y soporte compacto con* $a = \inf f$ *y* $b = \sup f$*. Sea* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *medible no negativa o integrable. Entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)| g(x)\, dx = \int_a^b \left(\int_{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = t\}} g(x)\, dm_{n-1}(x) \right) dt.$$

5. Fórmula de la co-área

Teorema (Fórmula de la co-área)

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ y soporte compacto con $a = \inf f$ y $b = \sup f$. Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ medible no negativa o integrable. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)| g(x)\, dx = \int_a^b \left(\int_{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = t\}} g(x)\, dm_{n-1}(x) \right) dt.$$

En el caso $g = 1$, tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|\, dx = \int_a^b m_{n-1}\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = t\}\, dt.$$

5. Fórmula de la co-área

Teorema (Fórmula de la co-área)

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ y soporte compacto con $a = \inf f$ y $b = \sup f$. Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ medible no negativa o integrable. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)| g(x)\, dx = \int_a^b \left(\int_{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = t\}} g(x)\, dm_{n-1}(x) \right) dt.$$

En el caso $g = 1$, tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|\, dx = \int_a^b m_{n-1}\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = t\}\, dt.$$

Teorema (Fórmula de la co-área para funciones Lipschitz)

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es Lipschitz y de soporte compacto entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|\, dx \geq \int_0^\infty m^+\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\}\, dt.$$

Índice

1. Notaciones y resultados previos
2. Desigualdad isoperimétrica vs. desigualdad de Sobolev en el extremo

1. Desigualdades de Sobolev

1. Desigualdades de Sobolev

Teorema (Desigualdades clásicas de Sobolev)

Sean $0 < \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ *y* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función* C^∞ *y de soporte compacto, entonces:*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \geq C_{n,p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

es decir,

$$\||\nabla f|\|_p \geq C_{n,p} \|f\|_q$$

1. Desigualdades de Sobolev

Teorema (Desigualdades clásicas de Sobolev)

Sean $0 < \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$ *y* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función* C^∞ *y de soporte compacto, entonces:*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \geq C_{n,p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

es decir,

$$\||\nabla f|\|_p \geq C_{n,p} \|f\|_q$$

Estudiaremos en el caso $p = 1$ la equivalencia entre la correspondiente desigualdad clásica de Sobolev y la desigualdad isoperimétrica en el siguiente Teorema:

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

Teorema (Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev)

Son equivalentes, con la misma constante $C > 0$, dependiendo sólo de n, las siguientes afirmaciones:

1. *Para toda función C^∞ de soporte compacto $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*
$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|\, dx \geq C\|f\|_{\frac{n}{n-1}}.$$
2. *Para toda función Lipschitz de soporte compacto $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*
$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|\, dx \geq C\|f\|_{\frac{n}{n-1}}.$$
3. *Para todo conjunto A, boreliano acotado de $\mathbb{R}^n$,*
$$m^+(A) \geq Cm(A)^{1-\frac{1}{n}}.$$

Además
$$C = n\omega_n^{\frac{1}{n}} = \frac{n\sqrt{\pi}}{(\Gamma(1+\frac{n}{2}))^{\frac{1}{n}}}.$$

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

Demostración: (1) $\Leftrightarrow$ (2)

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

Demostración: (1) $\Leftrightarrow$ (2)

- (1) $\Rightarrow$ (2): Es consecuencia del siguiente resultado:

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

Demostración: (1) $\Leftrightarrow$ (2)

- (1) $\Rightarrow$ (2): Es consecuencia del siguiente resultado:

Lema (Aproximación)

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es Lipschitz y de soporte compacto, existe una sucesión $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ de funciones C^∞ y de soporte compacto tales que:

- $\lim\limits_{m\to\infty} f_m(x) = f(x)$ *uniformemente en* $x \in \mathbb{R}^n$.
- $\lim\limits_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_m(x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|\, dx.$

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

Demostración: (1) $\Leftrightarrow$ (2)

- (1) $\Rightarrow$ (2): Es consecuencia del siguiente resultado:

Lema (Aproximación)

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es Lipschitz y de soporte compacto, existe una sucesión $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ de funciones C^∞ y de soporte compacto tales que:

- $\displaystyle\lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x)$ *uniformemente en $x \in \mathbb{R}^n$.*
- $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_m(x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|\, dx.$

Demostración. Sea $j_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función "test"(C^∞ y de soporte compacto), $j_0(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ y tal que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} j_0(x)\, dx = 1$. Definimos:

- $j_m(x) = m^n j_0(mx)$
- $\displaystyle f_m(x) = f * j_m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} j_m(x-y) f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) j_m(y)\, dy$

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

Entonces:

$$|f_m(x) - f(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) j_m(y)\, dy - f(x) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x)) j_m(y)\, dy \right| \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)||j_m(y)|\, dy \leq M \int_{\mathbb{R}^n} |y| j_m(y)\, dy.$$

Resolviendo esta última integral obtenemos que para un $m > N$ con N suficientemente grande es $\int_{\mathbb{R}^n} |y| j_m(y)\, dy \leq \frac{\varepsilon}{M}$.

Por otra parte, usando el teorema de Rademacher y las propiedades de la convolución se tiene que

$$\nabla f_m = \nabla f * j_m,$$

de donde

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_m(x)|\, dx = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x) * j_m|\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|\, dx.$$

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

Entonces:

$$|f_m(x) - f(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) j_m(y)\, dy - f(x) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x)) j_m(y)\, dy \right| \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)| |j_m(y)|\, dy \leq M \int_{\mathbb{R}^n} |y| j_m(y)\, dy.$$

Resolviendo esta última integral obtenemos que para un $m > N$ con N suficientemente grande es $\int_{\mathbb{R}^n} |y| j_m(y)\, dy \leq \frac{\varepsilon}{M}$.
Por otra parte, usando el teorema de Rademacher y las propiedades de la convolución se tiene que

$$\nabla f_m = \nabla f * j_m,$$

de donde

$$\lim_{m \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_m(x)|\, dx = \lim_{m \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x) * j_m|\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|\, dx.$$

- (2) $\Rightarrow$ (1): Se verifica trivialmente dado que toda función C^∞ es Lipschitz.

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

Demostración: (3) $\Rightarrow$ (2)

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

Demostración: (3) $\Rightarrow$ (2)

Utilizamos la fórmula de la co-área:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|\, dx \geq \int_0^{\infty} m^+\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}\, dt$$

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

Demostración: (3) $\Rightarrow$ (2)

Utilizamos la fórmula de la co-área:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|\, dx \geq \int_0^\infty m^+\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}\, dt$$

$$\overset{(3)}{\geq} C \int_0^\infty m\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}^{1-\frac{1}{n}}\, dt.$$

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

Demostración: (3) $\Rightarrow$ (2)

Utilizamos la fórmula de la co-área:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|\, dx \geq \int_0^\infty m^+\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}\, dt$$

$$\overset{(3)}{\geq} C \int_0^\infty m\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}^{1-\frac{1}{n}}\, dt.$$

Llamamos

$$F(s) = \int_0^s m\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}^{1-\frac{1}{n}}\, dt,$$

$$G(s) = \left(\frac{n}{n-1} \int_0^s t^{\frac{1}{n-1}}\, m\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\} \right)^{1-\frac{1}{n}}.$$

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

Demostración: (3) $\Rightarrow$ (2)

Utilizamos la fórmula de la co-área:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|\, dx \geq \int_0^\infty m^+\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}\, dt$$

$$\overset{(3)}{\geq} C \int_0^\infty m\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}^{1-\frac{1}{n}}\, dt.$$

Llamamos

$$F(s) = \int_0^s m\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}^{1-\frac{1}{n}}\, dt,$$

$$G(s) = \left(\frac{n}{n-1} \int_0^s t^{\frac{1}{n-1}}\, m\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\} \right)^{1-\frac{1}{n}}.$$

Claramente $F(0) = G(0) = 0$

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

Demostración: (3) $\Rightarrow$ (2)

Utilizamos la fórmula de la co-área:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|\, dx \geq \int_0^\infty m^+\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}\, dt$$

$$\overset{(3)}{\geq} C \int_0^\infty m\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}^{1-\frac{1}{n}}\, dt.$$

Llamamos

$$F(s) = \int_0^s m\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}^{1-\frac{1}{n}}\, dt,$$

$$G(s) = \left(\frac{n}{n-1} \int_0^s t^{\frac{1}{n-1}} m\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\} \right)^{1-\frac{1}{n}}.$$

Claramente $F(0) = G(0) = 0$ y

$$F'(s) = m\{|f(x)| > s\}^{1-\frac{1}{n}},$$

$$G'(s) = \left(\frac{n}{n-1} \int_0^s t^{\frac{1}{n-1}} m\{|f(x)| > t\}\, dt \right)^{-\frac{1}{n}} s^{\frac{1}{n-1}} m\{|f(x)| > s\}.$$

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

Se tiene $F'(s) \geq G'(s)$

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

Se tiene $F'(s) \geq G'(s)$ pues

$$\frac{G'(s)}{F'(s)} = \frac{s^{\frac{1}{n-1}} m\{|f(x)| > s\}^{\frac{1}{n}}}{\left(\frac{n}{n-1}\int_0^s t^{\frac{1}{n-1}} m\{|f(x)| > t\}\, dt\right)^{\frac{1}{n}}}$$

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

Se tiene $F'(s) \geq G'(s)$ pues

$$\frac{G'(s)}{F'(s)} = \frac{s^{\frac{1}{n-1}} m\{|f(x)| > s\}^{\frac{1}{n}}}{\left(\frac{n}{n-1}\int_0^s t^{\frac{1}{n-1}} m\{|f(x)| > t\}\, dt\right)^{\frac{1}{n}}} \overset{\substack{m\{|f(x)|>t\} \\ \geq m\{|f(x)|>s\}}}{\leq} \frac{s^{\frac{1}{n-1}}}{\left(\frac{n}{n-1}\int_0^s t^{\frac{1}{n-1}}\, dt\right)^{\frac{1}{n}}}$$

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

Se tiene $F'(s) \geq G'(s)$ pues

$$\frac{G'(s)}{F'(s)} = \frac{s^{\frac{1}{n-1}} m\{|f(x)| > s\}^{\frac{1}{n}}}{\left(\frac{n}{n-1}\int_0^s t^{\frac{1}{n-1}} m\{|f(x)| > t\}\, dt\right)^{\frac{1}{n}}} \overset{\substack{m\{|f(x)|>t\} \\ \geq m\{|f(x)|>s\}}}{\leq} \frac{s^{\frac{1}{n-1}}}{\left(\frac{n}{n-1}\int_0^s t^{\frac{1}{n-1}}\, dt\right)^{\frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{s^{\frac{1}{n-1}}}{\left(\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n} s^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}}}$$

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

Se tiene $F'(s) \geq G'(s)$ pues

$$\frac{G'(s)}{F'(s)} = \frac{s^{\frac{1}{n-1}} m\{|f(x)| > s\}^{\frac{1}{n}}}{\left(\frac{n}{n-1}\int_0^s t^{\frac{1}{n-1}} m\{|f(x)| > t\}\, dt\right)^{\frac{1}{n}}} \overset{\substack{m\{|f(x)|>t\} \\ \geq m\{|f(x)|>s\}}}{\leq} \frac{s^{\frac{1}{n-1}}}{\left(\frac{n}{n-1}\int_0^s t^{\frac{1}{n-1}}\, dt\right)^{\frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{s^{\frac{1}{n-1}}}{\left(\frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} s^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}}} = 1.$$

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

Se tiene $F'(s) \geq G'(s)$ pues

$$\frac{G'(s)}{F'(s)} = \frac{s^{\frac{1}{n-1}} m\{|f(x)| > s\}^{\frac{1}{n}}}{\left(\frac{n}{n-1}\int_0^s t^{\frac{1}{n-1}} m\{|f(x)| > t\}\, dt\right)^{\frac{1}{n}}} \overset{\substack{m\{|f(x)|>t\} \\ \geq m\{|f(x)|>s\}}}{\leq} \frac{s^{\frac{1}{n-1}}}{\left(\frac{n}{n-1}\int_0^s t^{\frac{1}{n-1}}\, dt\right)^{\frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{s^{\frac{1}{n-1}}}{\left(\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n} s^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}}} = 1.$$

Entonces $F(s) \geq G(s)\ \forall s > 0$.

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

Se tiene $F'(s) \geq G'(s)$ pues

$$\frac{G'(s)}{F'(s)} = \frac{s^{\frac{1}{n-1}} m\{|f(x)| > s\}^{\frac{1}{n}}}{\left(\frac{n}{n-1}\int_0^s t^{\frac{1}{n-1}} m\{|f(x)| > t\}\, dt\right)^{\frac{1}{n}}} \overset{\substack{m\{|f(x)|>t\} \\ \geq m\{|f(x)|>s\}}}{\leq} \frac{s^{\frac{1}{n-1}}}{\left(\frac{n}{n-1}\int_0^s t^{\frac{1}{n-1}}\, dt\right)^{\frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{s^{\frac{1}{n-1}}}{\left(\frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} s^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}}} = 1.$$

Entonces $F(s) \geq G(s)\ \forall s > 0$. Por lo tanto:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|\, dx$$

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

Se tiene $F'(s) \geq G'(s)$ pues

$$\frac{G'(s)}{F'(s)} = \frac{s^{\frac{1}{n-1}} m\{|f(x)| > s\}^{\frac{1}{n}}}{\left(\frac{n}{n-1}\int_0^s t^{\frac{1}{n-1}} m\{|f(x)| > t\}\, dt\right)^{\frac{1}{n}}} \overset{\substack{m\{|f(x)|>t\} \\ \geq m\{|f(x)|>s\}}}{\leq} \frac{s^{\frac{1}{n-1}}}{\left(\frac{n}{n-1}\int_0^s t^{\frac{1}{n-1}}\, dt\right)^{\frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{s^{\frac{1}{n-1}}}{\left(\frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} s^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}}} = 1.$$

Entonces $F(s) \geq G(s)\ \forall s > 0$. Por lo tanto:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|\, dx \geq C \lim_{s \to \infty} F(s)$$

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

Se tiene $F'(s) \geq G'(s)$ pues

$$\frac{G'(s)}{F'(s)} = \frac{s^{\frac{1}{n-1}} m\{|f(x)| > s\}^{\frac{1}{n}}}{\left(\frac{n}{n-1}\int_0^s t^{\frac{1}{n-1}} m\{|f(x)| > t\}\, dt\right)^{\frac{1}{n}}} \overset{\substack{m\{|f(x)|>t\} \\ \geq m\{|f(x)|>s\}}}{\leq} \frac{s^{\frac{1}{n-1}}}{\left(\frac{n}{n-1}\int_0^s t^{\frac{1}{n-1}}\, dt\right)^{\frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{s^{\frac{1}{n-1}}}{\left(\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n} s^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}}} = 1.$$

Entonces $F(s) \geq G(s)$ $\forall s > 0$. Por lo tanto:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|\, dx \geq C \lim_{s\to\infty} F(s) \geq C \lim_{s\to\infty} G(s)$$

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

Se tiene $F'(s) \geq G'(s)$ pues

$$\frac{G'(s)}{F'(s)} = \frac{s^{\frac{1}{n-1}} m\{|f(x)| > s\}^{\frac{1}{n}}}{\left(\frac{n}{n-1}\int_0^s t^{\frac{1}{n-1}} m\{|f(x)| > t\}\, dt\right)^{\frac{1}{n}}} \overset{\substack{m\{|f(x)|>t\} \\ \geq m\{|f(x)|>s\}}}{\leq} \frac{s^{\frac{1}{n-1}}}{\left(\frac{n}{n-1}\int_0^s t^{\frac{1}{n-1}}\, dt\right)^{\frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{s^{\frac{1}{n-1}}}{\left(\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n} s^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}}} = 1.$$

Entonces $F(s) \geq G(s)$ $\forall s > 0$. Por lo tanto:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|\, dx \geq C \lim_{s\to\infty} F(s) \geq C \lim_{s\to\infty} G(s) = C\left(\frac{n}{n-1}\int_0^\infty t^{\frac{1}{n-1}} m\{|f(x)| > t\}\, dt\right)^{1-\frac{1}{n}}$$

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

Se tiene $F'(s) \geq G'(s)$ pues

$$\frac{G'(s)}{F'(s)} = \frac{s^{\frac{1}{n-1}} m\{|f(x)| > s\}^{\frac{1}{n}}}{\left(\frac{n}{n-1}\int_0^s t^{\frac{1}{n-1}} m\{|f(x)| > t\}\,dt\right)^{\frac{1}{n}}} \overset{\substack{m\{|f(x)|>t\} \\ \geq m\{|f(x)|>s\}}}{\leq} \frac{s^{\frac{1}{n-1}}}{\left(\frac{n}{n-1}\int_0^s t^{\frac{1}{n-1}}\,dt\right)^{\frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{s^{\frac{1}{n-1}}}{\left(\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n} s^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}}} = 1.$$

Entonces $F(s) \geq G(s)$ $\forall s > 0$. Por lo tanto:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|\,dx \geq C \lim_{s\to\infty} F(s) \geq C \lim_{s\to\infty} G(s) = C\left(\frac{n}{n-1}\int_0^\infty t^{\frac{1}{n-1}} m\{|f(x)| > t\}\,dt\right)^{1-\frac{1}{n}}$$

$$\overset{\text{F. Cavalieri}}{=} C\|f\|_{\frac{n}{n-1}}.$$

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

Demostración: (2) $\Rightarrow$ (3)

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

Demostración: (2) $\Rightarrow$ (3)

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un boreliano acotado y $0 < \varepsilon < 1$.

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

Demostración: (2) $\Rightarrow$ (3)

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un boreliano acotado y $0 < \varepsilon < 1$. Definimos

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin A^\varepsilon \\ 1 - \frac{d(x,A)}{\varepsilon}, & \text{si } x \in A^\varepsilon \setminus A \\ 1, & \text{si } x \in A \end{cases}$$

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

Demostración: (2) $\Rightarrow$ (3)

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un boreliano acotado y $0 < \varepsilon < 1$. Definimos

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin A^\varepsilon \\ 1 - \frac{d(x,A)}{\varepsilon}, & \text{si } x \in A^\varepsilon \setminus A \\ 1, & \text{si } x \in A \end{cases}$$

- f_ε es una función Lipschitz por serlo en cada trozo y además $\forall x$, y en trozos distintos se verifica $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{|x-y|}{\varepsilon}$.

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

Demostración: (2) $\Rightarrow$ (3)

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un boreliano acotado y $0 < \varepsilon < 1$. Definimos

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin A^\varepsilon \\ 1 - \frac{d(x,A)}{\varepsilon}, & \text{si } x \in A^\varepsilon \setminus A \\ 1, & \text{si } x \in A \end{cases}$$

- f_ε es una función Lipschitz por serlo en cada trozo y además $\forall x$, y en trozos distintos se verifica $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{|x-y|}{\varepsilon}$.
- $\lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon = \chi_{\overline{A}}$.

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

Demostración: (2) $\Rightarrow$ (3)

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un boreliano acotado y $0 < \varepsilon < 1$. Definimos

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin A^\varepsilon \\ 1 - \frac{d(x,A)}{\varepsilon}, & \text{si } x \in A^\varepsilon \setminus A \\ 1, & \text{si } x \in A \end{cases}$$

- f_ε es una función Lipschitz por serlo en cada trozo y además $\forall x$, y en trozos distintos se verifica $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{|x-y|}{\varepsilon}$.
- $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon = \chi_{\overline{A}}$.
- Tenemos que:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} |f_\varepsilon|^{\frac{n}{n-1}}\, dx \overset{\text{T.C.D.}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\varepsilon \to 0^+} |f_\varepsilon|^{\frac{n}{n-1}}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\overline{A}}(x)\, dx = m(\overline{A}) \geq m(A)$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0^+} \|f_\varepsilon\| \geq m(A)^{1-\frac{1}{n}}.$$

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

- Por otra parte:

$$|f_\varepsilon(y) - f_\varepsilon(x)| \leq \frac{|d(x,A) - d(y,A)|}{\varepsilon} \overset{\substack{d \text{ Lipschitz} \\ (L=1)}}{\leq} \frac{|x-y|}{\varepsilon}$$

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

- Por otra parte:

$$|f_\varepsilon(y) - f_\varepsilon(x)| \leq \frac{|d(x,A) - d(y,A)|}{\varepsilon} \overset{\substack{d \text{ Lipschitz} \\ (L=1)}}{\leq} \frac{|x-y|}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \limsup_{y\to x} \frac{|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)|}{|x-y|} = |\nabla f(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

- Por otra parte:

$$|f_\varepsilon(y) - f_\varepsilon(x)| \leq \frac{|d(x,A) - d(y,A)|}{\varepsilon} \overset{\substack{d \text{ Lipschitz} \\ (L=1)}}{\leq} \frac{|x-y|}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \limsup_{y \to x} \frac{|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)|}{|x-y|} = |\nabla f(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

- Entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx \leq \int_{\overline{A^\varepsilon} \setminus A^\circ} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx \leq \frac{1}{\varepsilon} m(\overline{A^\varepsilon} \setminus A^\circ)$$

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

- Por otra parte:

$$|f_\varepsilon(y) - f_\varepsilon(x)| \leq \frac{|d(x,A) - d(y,A)|}{\varepsilon} \overset{\substack{d \text{ Lipschitz} \\ (L=1)}}{\leq} \frac{|x-y|}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \limsup_{y \to x} \frac{|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)|}{|x-y|} = |\nabla f(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

- Entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx \leq \int_{\overline{A^\varepsilon} \setminus A^\circ} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx \leq \frac{1}{\varepsilon} m(\overline{A^\varepsilon} \setminus A^\circ) = \frac{1}{\varepsilon}(m(\overline{A^\varepsilon}) - m(A^\circ)).$$

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

- Por otra parte:

$$|f_\varepsilon(y) - f_\varepsilon(x)| \leq \frac{|d(x,A) - d(y,A)|}{\varepsilon} \overset{d \text{ Lipschitz}}{\underset{}{\overset{(L=1)}{\leq}}} \frac{|x-y|}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \limsup_{y \to x} \frac{|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)|}{|x-y|} = |\nabla f(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

- Entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx \leq \int_{\overline{A^\varepsilon} \setminus A^\circ} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx \leq \frac{1}{\varepsilon} m(\overline{A^\varepsilon} \setminus A^\circ) = \frac{1}{\varepsilon}(m(\overline{A^\varepsilon}) - m(A^\circ)).$$

Si tuviéramos que $m(A) = m(A^\circ)$

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

- Por otra parte:

$$|f_\varepsilon(y) - f_\varepsilon(x)| \leq \frac{|d(x,A) - d(y,A)|}{\varepsilon} \overset{\substack{d \text{ Lipschitz} \\ (L=1)}}{\leq} \frac{|x-y|}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \limsup_{y \to x} \frac{|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)|}{|x-y|} = |\nabla f(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

- Entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx \leq \int_{\overline{A^\varepsilon} \setminus A^\circ} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx \leq \frac{1}{\varepsilon} m(\overline{A^\varepsilon} \setminus A^\circ) = \frac{1}{\varepsilon}(m(\overline{A^\varepsilon}) - m(A^\circ)).$$

Si tuviéramos que $m(A) = m(A^\circ)$

$$\frac{1}{\varepsilon} m(\overline{A^\varepsilon} \setminus A) \geq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_\varepsilon|\, dx \overset{(2)}{\geq} C \|f_\varepsilon\|_{\frac{n}{n-1}}$$

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

- Por otra parte:

$$|f_\varepsilon(y) - f_\varepsilon(x)| \leq \frac{|d(x,A) - d(y,A)|}{\varepsilon} \overset{\substack{d \text{ Lipschitz} \\ (L=1)}}{\leq} \frac{|x-y|}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \limsup_{y \to x} \frac{|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)|}{|x-y|} = |\nabla f(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

- Entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx \leq \int_{\overline{A^\varepsilon} \setminus A^\circ} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx \leq \frac{1}{\varepsilon} m(\overline{A^\varepsilon} \setminus A^\circ) = \frac{1}{\varepsilon}(m(\overline{A^\varepsilon}) - m(A^\circ)).$$

Si tuviéramos que $m(A) = m(A^\circ)$

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1}{\varepsilon} m(\overline{A^\varepsilon} \setminus A) & \geq & \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_\varepsilon|\, dx & \overset{(2)}{\geq} & C\|f_\varepsilon\|_{\frac{n}{n-1}} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ m^+(A) & & \geq & & Cm(A)^{1-\frac{1}{n}} \end{array}$$

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

- Por otra parte:

$$|f_\varepsilon(y) - f_\varepsilon(x)| \leq \frac{|d(x,A) - d(y,A)|}{\varepsilon} \overset{\substack{d \text{ Lipschitz} \\ (L=1)}}{\leq} \frac{|x-y|}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \limsup_{y \to x} \frac{|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)|}{|x-y|} = |\nabla f(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

- Entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx \leq \int_{\overline{A^\varepsilon} \setminus A^\circ} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx \leq \frac{1}{\varepsilon} m(\overline{A^\varepsilon} \setminus A^\circ) = \frac{1}{\varepsilon}(m(\overline{A^\varepsilon}) - m(A^\circ)).$$

Si tuviéramos que $m(A) = m(A^\circ)$

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1}{\varepsilon} m(\overline{A^\varepsilon} \setminus A) & \geq & \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_\varepsilon|\, dx & \overset{(2)}{\geq} & C\|f_\varepsilon\|_{\frac{n}{n-1}} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ m^+(A) & & \geq & & Cm(A)^{1-\frac{1}{n}} \end{array}$$

Pero esto no sucede en general ya que existen borelianos con frontera muy complicada que sirven de contraejemplo.

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

- Otra forma de proceder en este último paso sería:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx$$

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

- Otra forma de proceder en este último paso sería:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx = \int_{\overline{A^\varepsilon} \setminus A^\circ} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx$$

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

- Otra forma de proceder en este último paso sería:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx = \int_{\overline{A^\varepsilon} \setminus A^\circ} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx = \int_{\overline{A^\varepsilon} \setminus A} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx$$

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

- Otra forma de proceder en este último paso sería:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx = \int_{\overline{A^\varepsilon} \setminus A^\circ} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx = \int_{\overline{A^\varepsilon} \setminus A} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx + \int_{Fr(A)\cap A} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx.$$

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

- Otra forma de proceder en este último paso sería:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx = \int_{\overline{A^\varepsilon} \setminus A^\circ} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx = \int_{\overline{A^\varepsilon} \setminus A} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx + \int_{Fr(A) \cap A} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx.$$

Sabemos por Rademacher que $\exists \nabla f_\varepsilon(x_0)$ en casi todo $x_0 \in Fr(A) \cap A$ pero

$$f_v(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle \stackrel{?}{=} 0.$$

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

- Otra forma de proceder en este último paso sería:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_\varepsilon(x)|\,dx = \int_{\overline{A^\varepsilon}\setminus A^\circ} |\nabla f_\varepsilon(x)|\,dx = \int_{\overline{A^\varepsilon}\setminus A} |\nabla f_\varepsilon(x)|\,dx + \int_{Fr(A)\cap A} |\nabla f_\varepsilon(x)|\,dx.$$

  Sabemos por Rademacher que $\exists \nabla f_\varepsilon(x_0)$ en casi todo $x_0 \in Fr(A) \cap A$ pero

$$f_v(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v\rangle \stackrel{?}{=} 0.$$

Definimos entonces otra función:

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin A^\varepsilon \\ 1 - \frac{d(x, A^{\varepsilon^2})}{\varepsilon - \varepsilon^2}, & \text{si } x \in A^\varepsilon \setminus A^{\varepsilon^2} \\ 1, & \text{si } x \in A^{\varepsilon^2} \end{cases}$$

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

- Otra forma de proceder en este último paso sería:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx = \int_{\overline{A^\varepsilon}\setminus A^\circ} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx = \int_{\overline{A^\varepsilon}\setminus A} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx + \int_{Fr(A)\cap A} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx.$$

Sabemos por Rademacher que $\exists \nabla f_\varepsilon(x_0)$ en casi todo $x_0 \in Fr(A) \cap A$ pero

$$f_v(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v\rangle \overset{?}{=} 0.$$

Definimos entonces otra función:

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin A^\varepsilon \\ 1 - \frac{d(x, A^{\varepsilon^2})}{\varepsilon - \varepsilon^2}, & \text{si } x \in A^\varepsilon \setminus A^{\varepsilon^2} \\ 1, & \text{si } x \in A^{\varepsilon^2} \end{cases}$$

- f_ε es una función Lipschitz por serlo en cada trozo y
  - Si $x \in A^{\varepsilon^2}$, $y \in A^\varepsilon \setminus A^{\varepsilon^2} \Rightarrow |f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)| = \left| \frac{d(y, A^{\varepsilon^2})}{\varepsilon - \varepsilon^2} \right| \leq \frac{|x-y|}{\varepsilon - \varepsilon^2}$.
  - Si $x \in A^\varepsilon \setminus A^{\varepsilon^2}$, $y \notin A^\varepsilon \Rightarrow$
    $|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)| = \left| \frac{\varepsilon - \varepsilon^2 - d(x, A^{\varepsilon^2})}{\varepsilon - \varepsilon^2} \right| \leq \left| \frac{d(y, A^{\varepsilon^2}) - d(x, A^{\varepsilon^2})}{\varepsilon - \varepsilon^2} \right| \leq \frac{|x-y|}{\varepsilon - \varepsilon^2}$.

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

- $\lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon = \chi_{\overline{A}}$ pues
  - Si $x \in \overline{A} \Rightarrow x \in A^{\varepsilon^2} \Rightarrow f_\varepsilon(x) = 1 = \chi_{\overline{A}}(x)$.
  - Si $x \notin \overline{A} \Rightarrow \exists \varepsilon_0 \, : \, \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0, \, x \notin A^\varepsilon \Rightarrow f_\varepsilon(x) = 0 = \chi_{\overline{A}}(x)$.

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

- $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon = \chi_{\overline{A}}$ pues
  - Si $x \in \overline{A} \Rightarrow x \in A^{\varepsilon^2} \Rightarrow f_\varepsilon(x) = 1 = \chi_{\overline{A}}(x)$.
  - Si $x \notin \overline{A} \Rightarrow \exists \varepsilon_0 \,:\, \forall \varepsilon \le \varepsilon_0,\, x \notin A^\varepsilon \Rightarrow f_\varepsilon(x) = 0 = \chi_{\overline{A}}(x)$.
- Tenemos que:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} |f_\varepsilon|^{\frac{n}{n-1}}\, dx \overset{\text{T.C.D.}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\varepsilon \to 0^+} |f_\varepsilon|^{\frac{n}{n-1}}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\overline{A}}(x)\, dx = m(\overline{A}) \ge m(A)$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0^+} \|f_\varepsilon\| \ge m(A)^{1-\frac{1}{n}}.$$

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

- $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon = \chi_{\overline{A}}$ pues
  - Si $x \in \overline{A} \Rightarrow x \in A^{\varepsilon^2} \Rightarrow f_\varepsilon(x) = 1 = \chi_{\overline{A}}(x)$.
  - Si $x \notin \overline{A} \Rightarrow \exists \varepsilon_0 \,:\, \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0,\ x \notin A^\varepsilon \Rightarrow f_\varepsilon(x) = 0 = \chi_{\overline{A}}(x)$.
- Tenemos que:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} |f_\varepsilon|^{\frac{n}{n-1}}\, dx \overset{\text{T.C.D.}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\varepsilon\to 0^+} |f_\varepsilon|^{\frac{n}{n-1}}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\overline{A}}(x)\, dx = m(\overline{A}) \geq m(A)$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0^+} \|f_\varepsilon\| \geq m(A)^{1-\frac{1}{n}}.$$

- Por otra parte:

$$|f_\varepsilon(y) - f_\varepsilon(x)| \leq \frac{|d(x, A^{\varepsilon^2}) - d(y, A^{\varepsilon^2})|}{\varepsilon - \varepsilon^2} \overset{\substack{d \text{ Lipschitz} \\ (L=1)}}{\leq} \frac{|x-y|}{\varepsilon - \varepsilon^2}$$

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

- $\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon = \chi_{\overline{A}}$ pues
  - Si $x \in \overline{A} \Rightarrow x \in A^{\varepsilon^2} \Rightarrow f_\varepsilon(x) = 1 = \chi_{\overline{A}}(x)$.
  - Si $x \notin \overline{A} \Rightarrow \exists \varepsilon_0 \; : \; \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0,\; x \notin A^\varepsilon \Rightarrow f_\varepsilon(x) = 0 = \chi_{\overline{A}}(x)$.
- Tenemos que:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} |f_\varepsilon|^{\frac{n}{n-1}}\, dx \overset{\text{T.C.D.}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\varepsilon\to 0^+} |f_\varepsilon|^{\frac{n}{n-1}}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\overline{A}}(x)\, dx = m(\overline{A}) \geq m(A)$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0^+} \|f_\varepsilon\| \geq m(A)^{1-\frac{1}{n}}.$$

- Por otra parte:

$$|f_\varepsilon(y) - f_\varepsilon(x)| \leq \frac{|d(x, A^{\varepsilon^2}) - d(y, A^{\varepsilon^2})|}{\varepsilon - \varepsilon^2} \overset{\substack{d \text{ Lipschitz} \\ (L=1)}}{\leq} \frac{|x-y|}{\varepsilon - \varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow \limsup_{y\to x} \frac{|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)|}{|x-y|} = |\nabla f_\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon^2}.$$

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

- Como $|\nabla f_\varepsilon| = 0$ en $\{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) > \varepsilon\} \cup A^{\varepsilon^2}$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx \leq \int_{\overline{A^\varepsilon} \setminus A^{\varepsilon^2}} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx$$

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

- Como $|\nabla f_\varepsilon| = 0$ en $\{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) > \varepsilon\} \cup A^{\varepsilon^2}$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx \leq \int_{\overline{A^\varepsilon} \setminus A^{\varepsilon^2}} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx \overset{A^{\varepsilon^2} \supset A}{\leq} \int_{\overline{A^\varepsilon} \setminus A} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx.$$

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

- Como $|\nabla f_\varepsilon| = 0$ en $\{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) > \varepsilon\} \cup A^{\varepsilon^2}$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx \leq \int_{\overline{A^\varepsilon} \setminus A^{\varepsilon^2}} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx \overset{A^{\varepsilon^2} \supset A}{\leq} \int_{\overline{A^\varepsilon} \setminus A} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx.$$

- Veamos que $\overline{A^\varepsilon} \subset A^{\varepsilon + \varepsilon^2}$:

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

- Como $|\nabla f_\varepsilon| = 0$ en $\{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) > \varepsilon\} \cup A^{\varepsilon^2}$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx \leq \int_{\overline{A^\varepsilon} \setminus A^{\varepsilon^2}} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx \overset{A^{\varepsilon^2} \supset A}{\leq} \int_{\overline{A^\varepsilon} \setminus A} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx.$$

- Veamos que $\overline{A^\varepsilon} \subset A^{\varepsilon+\varepsilon^2}$:
  Sea $x \in \overline{A^\varepsilon} \Rightarrow \exists (x_n) \subset A^\varepsilon$ tal que $x_n \to x$. $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists a_n \in A$ tal que $|x_n - a_n| < \varepsilon$.
  Como $x_n \to x$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > N$, $|x - x_N| < \varepsilon^2$. Luego
  $|x - a_N| \leq |x - x_N| + |x_N - a_N| < \varepsilon + \varepsilon^2 \Rightarrow x \in A^{\varepsilon+\varepsilon^2}$.

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

- Como $|\nabla f_\varepsilon| = 0$ en $\{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) > \varepsilon\} \cup A^{\varepsilon^2}$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx \le \int_{\overline{A^\varepsilon} \setminus A^{\varepsilon^2}} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx \overset{A^{\varepsilon^2} \supset A}{\le} \int_{\overline{A^\varepsilon} \setminus A} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx.$$

- Veamos que $\overline{A^\varepsilon} \subset A^{\varepsilon+\varepsilon^2}$:
  Sea $x \in \overline{A^\varepsilon} \Rightarrow \exists (x_n) \subset A^\varepsilon$ tal que $x_n \to x$. $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists a_n \in A$ tal que $|x_n - a_n| < \varepsilon$.
  Como $x_n \to x$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > N$, $|x - x_N| < \varepsilon^2$. Luego
  $|x - a_N| \le |x - x_N| + |x_N - a_N| < \varepsilon + \varepsilon^2 \Rightarrow x \in A^{\varepsilon+\varepsilon^2}$.
- Entonces

$$\int_{\overline{A^\varepsilon} \setminus A} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx \le \frac{m(A^{\varepsilon+\varepsilon^2}) - m(A)}{\varepsilon - \varepsilon^2}$$

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

- Como $|\nabla f_\varepsilon| = 0$ en $\{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) > \varepsilon\} \cup A^{\varepsilon^2}$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx \leq \int_{\overline{A^\varepsilon} \setminus A^{\varepsilon^2}} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx \overset{A^{\varepsilon^2} \supset A}{\leq} \int_{\overline{A^\varepsilon} \setminus A} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx.$$

- Veamos que $\overline{A^\varepsilon} \subset A^{\varepsilon+\varepsilon^2}$:
  Sea $x \in \overline{A^\varepsilon} \Rightarrow \exists (x_n) \subset A^\varepsilon$ tal que $x_n \to x$. $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists a_n \in A$ tal que $|x_n - a_n| < \varepsilon$.
  Como $x_n \to x$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > N$, $|x - x_N| < \varepsilon^2$. Luego
  $|x - a_N| \leq |x - x_N| + |x_N - a_N| < \varepsilon + \varepsilon^2 \Rightarrow x \in A^{\varepsilon+\varepsilon^2}$.
- Entonces

$$\int_{\overline{A^\varepsilon} \setminus A} |\nabla f_\varepsilon(x)|\, dx \leq \frac{m(A^{\varepsilon+\varepsilon^2}) - m(A)}{\varepsilon - \varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{m(A^{\varepsilon+\varepsilon^2}) - m(A)}{\varepsilon - \varepsilon^2} = \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{m(A^{\varepsilon+\varepsilon^2}) - m(A)}{\varepsilon + \varepsilon^2} \cdot \frac{\varepsilon + \varepsilon^2}{\varepsilon - \varepsilon^2} = m^+(A).$$

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

- Luego se verifica

2. Teorema de Maz'ja, Federer-Fleming, Sobolev

- Luego se verifica

$$m^+(A) = \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{m(A^{\varepsilon+\varepsilon^2}) - m(A)}{\varepsilon - \varepsilon^2} = \liminf_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_\varepsilon(x)| \, dx$$

$$\overset{(2)}{\geq} \liminf_{\varepsilon \to 0} C \|f_\varepsilon\|_{\frac{n}{n-1}} = C \lim_{\varepsilon \to 0} \|f_\varepsilon\|_{\frac{n}{n-1}} \geq C m(A)^{1-\frac{1}{n}}.$$

- S. Bobkov, C. Houdré, *Some connections between Isoperimetric and Sobolev-type Inequalities*. Memoirs A.M.S., **616** (1997).
- I. Chavel, *Isoperimetric Inequalities*. Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press **145** (2001).
- H. Federer, W. Fleming, *Normal integral curents*, Ann. Math. **72**, (1960), 458-520.
- J. Heinonen, *Lectures on Lipschitz Analysis*, `http://www.math.jyu.fi/research/reports/rep100.pdf`
- V. Maz'ja, *Classes of domains and embedding theorems for function spaces*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 133, (1960), 527-530.
- V. Maz'ja, *Sobolev Spaces*. Springer-Verlag (1985).