Desigualdad isoperimétrica “versus” desigualdades de Sobolev

Escuela de Análisis Funcional

Hotel Las Gaviotas,
La Manga del Mar Menor (Murcia)

16-18 de Abril de 2012

Desigualdad isoperimétrica

A boreliano acotado en $\mathbb{R}^n$, ∂A su frontera

$$\boxed{m^+(\partial A)^{\frac{1}{n-1}} \geq c_n m(A)^{\frac{1}{n}}}$$

c_n depende solo de n.

- Caso de igualdad, la mejor constante

$$c_n = \frac{(n\,\omega_n)^{\frac{1}{n-1}}}{\omega_n^{\frac{1}{n}}}$$

- ¿Qué es m^+?

Area de Minkowski, m^+

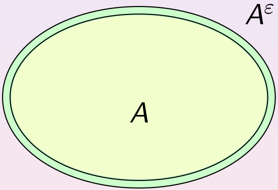
A, boreliano acotado en $\mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$,

$$A^\varepsilon = A + \varepsilon B = \{x \in \mathbb{R} : \exists\, a \in A, |x - a| < \varepsilon\}$$

Area de Minkowski, m^+

A, boreliano acotado en $\mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$,

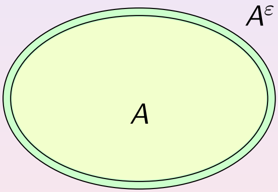
$$A^\varepsilon = A + \varepsilon B = \{x \in \mathbb{R} : \exists\, a \in A, |x - a| < \varepsilon\}$$



Area de Minkowski, m^+

A, boreliano acotado en $\mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$,

$$A^\varepsilon = A + \varepsilon B = \{x \in \mathbb{R} : \exists\, a \in A, |x - a| < \varepsilon\}$$



entonces

$$m^+(A) = \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{m(A^\varepsilon) - m(A)}{\varepsilon} = \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{m(A^\varepsilon - A)}{\varepsilon}$$

Perímetro de "Di Giorgi", P

A boreliano acotado en $\mathbb{R}^n$

$$P(A) = \|\chi_A\|_{BV} = \sup_{\xi} \int_A \operatorname{div} \xi \, dx$$

Perímetro de “Di Giorgi”, P

A boreliano acotado en $\mathbb{R}^n$

$$P(A) = \|\chi_A\|_{BV} = \sup_{\xi} \int_A \operatorname{div} \xi \, dx$$

donde ξ recorre todos los campos vectoriales de clase C^1 y soporte compacto tales que $|\xi| \leq 1$.

Perímetro de "Di Giorgi", P

A boreliano acotado en $\mathbb{R}^n$

$$P(A) = \|\chi_A\|_{BV} = \sup_{\xi} \int_A \operatorname{div} \xi \, dx$$

donde ξ recorre todos los campos vectoriales de clase C^1 y soporte compacto tales que $|\xi| \leq 1$.

$\| \cdot \|_{BV}$ es la norma para las funciones de variación acotada en $\mathbb{R}^n$, f es localmente integrable

$$\|f\|_{BV} = \sup_{\xi} \int_{\mathbb{R}^n} f \operatorname{div} \xi \, dx < \infty$$

Desigualdades de Sobolev

$f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, en general abierto y conexo

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

Desigualdades de Sobolev

$f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, en general abierto y conexo

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

Derivada débil de f de orden α

$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ multiíndice, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$
$D^\alpha f = g$ si $g : \Omega \to \mathbb{R}$, medible tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) g(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha \varphi(x) f(x) dx$$

$\forall\, \varphi$, $C^\infty(\Omega)$ de soporte compacto

Desigualdades de Sobolev

$f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, en general abierto y conexo

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

Derivada débil de f de orden α

$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ multiíndice, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$
$D^\alpha f = g$ si $g : \Omega \to \mathbb{R}$, medible tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) g(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha \varphi(x) f(x) dx$$

$\forall\, \varphi$, $C^\infty(\Omega)$ de soporte compacto

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f'(x) dx = \varphi(x) f(x) \,\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) f(x) dx$$

(regla de integración por partes)

Sea $m \in N$, $p \geq 1$, Ω un dominio en $\mathbb{R}^n$

Espacios de Sobolev

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, f \in L^p(\Omega),$$
$$D^\alpha f = g_\alpha, \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\}$$

$$\|f\|_{W^{m,p}} = \|f\|_p + \sum_\alpha \|g_\alpha\|_p$$

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \text{clausura de las funciones test en } W^{m,p}(\Omega)$$

Teorema de inclusión. (Sobolev, Kondrashov, Il'in $\sim$ 1930)

Sea $1 \leq k \leq n$, $0 \leq \ell \leq m$, $1 < p < q < \infty$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ con la "cone property"

$$\boxed{\frac{k}{q} = \frac{n}{p} - (m - \ell)}$$

entonces

$$W^{m,p}(\Omega) \subset W^{\ell,q}(\Omega^k)$$

donde $\Omega^k = \Omega \cap E$, E es cualquier subespacio k-dimensional

Teorema de inclusión. (Sobolev, Kondrashov, Il'in $\sim$ 1930)

Sea $1 \leq k \leq n$, $0 \leq \ell \leq m$, $1 < p < q < \infty$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ con la "cone property"

$$\boxed{\frac{k}{q} = \frac{n}{p} - (m - \ell)}$$

entonces

$$W^{m,p}(\Omega) \subset W^{\ell,q}(\Omega^k)$$

donde $\Omega^k = \Omega \cap E$, E es cualquier subespacio k-dimensional

($W^{\ell,q}(\Omega^k)$ son las restriciones de las funciones a E)

Caso $k = n$, $m = 1$, $\ell = 0$

$$\boxed{\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}}$$

$$1 \leq p < n \qquad \Rightarrow \qquad \frac{n}{n-1} \leq q < \infty$$

entonces

Caso $k = n$, $m = 1$, $\ell = 0$

$$\boxed{\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}}$$

$$1 \leq p < n \qquad \Rightarrow \qquad \frac{n}{n-1} \leq q < \infty$$

entonces

$$\|f\|_q \leq c_{n,p} \|\nabla f\|_p$$

Caso $k = n$, $m = 1$, $\ell = 0$

$$\boxed{\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}}$$

$$1 \leq p < n \qquad \Rightarrow \qquad \frac{n}{n-1} \leq q < \infty$$

entonces

$$\|f\|_q \leq c_{n,p} \|\nabla f\|_p$$

es decir,

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$$

Casos extremos, $p = n$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$$

$$\boxed{p = n, \qquad\qquad q = \infty}$$

$$W^{1,n}(\Omega) \not\subseteq L^{\infty}(\Omega)$$

Casos extremos, $p = n$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$$

$$\boxed{p = n, \qquad q = \infty}$$

$$W^{1,n}(\Omega) \not\subset L^\infty(\Omega)$$

Hay extensiones cambiando $L^\infty(\Omega)$ por espacios más grandes e incluso clases de funciones

Caso $p = 1$

$$q = \frac{n}{n-1} \qquad \|\nabla f\|_1 \geq c_n \|f\|_{\frac{n}{n-1}}$$

Caso $p = 1$

$$q = \frac{n}{n-1} \qquad \|\nabla f\|_1 \geq c_n \|f\|_{\frac{n}{n-1}}$$

$$W^{1,1}(\Omega) \subseteq L^{\frac{n}{n-1}}(\Omega)$$

Caso $p = 1$

$$q = \frac{n}{n-1} \qquad \|\nabla f\|_1 \geq c_n \|f\|_{\frac{n}{n-1}}$$

$$W^{1,1}(\Omega) \subseteq L^{\frac{n}{n-1}}(\Omega)$$

Sobolev intuyó que esta desigualdad era equivalente a la desigualdad isoperimétrica, haciendo $f = \chi_A$ (que no está en $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$!)

Hay que extender el concepto de gradiente

Federer&Fleming, Maz'ja (1960)

Son equivalentes con la misma constante:

i) Para toda función C^∞ de soporte compacto $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)| dx \geq C \|f\|_{n/(n-1)}$$

ii) Para todo conjunto A, boreliano acotado de $\mathbb{R}^n$,

$$m^+(\partial A) \geq C m(A)^{1-1/n}$$

Federer&Fleming, Maz'ja (1960)

Son equivalentes con la misma constante:

i) Para toda función C^∞ de soporte compacto $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)| dx \geq C \|f\|_{n/(n-1)}$$

ii) Para todo conjunto A, boreliano acotado de $\mathbb{R}^n$,

$$m^+(\partial A) \geq C m(A)^{1-1/n}$$

Lo anterior es equivalente a

iii)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)| dx \geq C \|f\|_{n/(n-1)}$$

para toda función Lipschitz de soporte compacto $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

1er. ingrediente: Funciones Lipschitz

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en x_0, su gradiente o diferencial es

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \right)$$

y

$$\lim_{y \to x_0} \frac{f(y) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), y - x_0 \rangle}{|y - x_0|} = 0$$

En consecuencia

$$\frac{f(y) - f(x_0)}{|y - x_0|} = \frac{f(y) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), y - x_0 \rangle}{|y - x_0|} + \langle \nabla f(x_0), \frac{y - x_0}{|y - x_0|} \rangle$$

$$\downarrow y \to x_0$$

$$0$$

y por tanto

$$|\nabla f(x_0)| = \limsup_{y \to x_0} \frac{|f(y) - f(x_0)|}{|y - x_0|}$$

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es Lipschitz, se puede definir

$$|\nabla f| : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$$

mediante

$$\boxed{|\nabla f(x)| = \limsup_{y \to x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|}}$$

y esta función $|\nabla f(\cdot)|$ es medible

Aproximación

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función Lipschitz de soporte compacto

- existe una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones C^∞ y soporte compacto tales que
- $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, uniformemente en $x \in \mathbb{R}^n$
- $$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_n(x)|dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|dx$$

Si $j_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función "test" (C^∞ y soporte compacto), $j_0 \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} j_0(x)dx = 1$$

$$j_m(x) = m^n j_0(mx)$$

$$f_m(x) = f * j_m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} j_m(x-y)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)j_m(y)dy$$

2^o ingrediente: Fórmula de la coárea

Sean dos dominios $\Omega_n \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega_k \subseteq \mathbb{R}^k$ y $f : \Omega_n \to \Omega_k$ de clase C^r. Si $g : \Omega_n \to \mathbb{R}$ medible ≥ 0 o integrable, entonces

$$\int_{\Omega_n} g(x)|\mathcal{J}f(x)|dx =$$

$$|\mathcal{J}f(x)| = \sqrt{|\det Jf(x)Jf(x)^t|}$$

2^o ingrediente: Fórmula de la coárea

Sean dos dominios $\Omega_n \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega_k \subseteq \mathbb{R}^k$ y $f : \Omega_n \to \Omega_k$ de clase C^r. Si $g : \Omega_n \to \mathbb{R}$ medible ≥ 0 o integrable, entonces

$$\int_{\Omega_n} g(x)|\mathcal{J}f(x)|dx = \int_{\Omega_k} \left(\int_{\{y \in \Omega_n ; f(y) = z\}} g(y)dy \right) dz$$

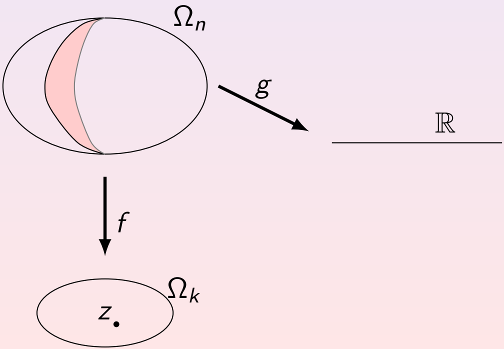
$$|\mathcal{J}f(x)| = \sqrt{|\det Jf(x)Jf(x)^t|}$$

2^o ingrediente: Fórmula de la coárea

Sean dos dominios $\Omega_n \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega_k \subseteq \mathbb{R}^k$ y $f : \Omega_n \to \Omega_k$ de clase C^r. Si $g : \Omega_n \to \mathbb{R}$ medible ≥ 0 o integrable, entonces

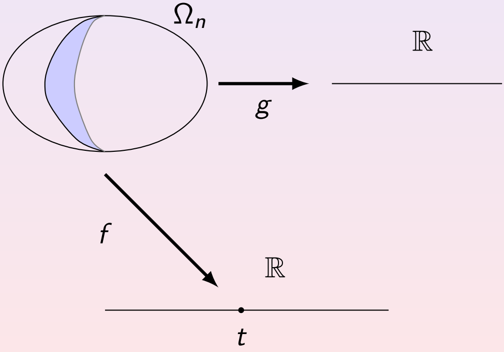
$$\int_{\Omega_n} g(x)|\mathcal{J}f(x)|dx = \int_{\Omega_k} \left(\int_{\{y\in\Omega_n; f(y)=z\}} g(y)dy \right) dz$$

$$|\mathcal{J}f(x)| = \sqrt{|\det Jf(x)Jf(x)^t|}$$



- Cuando $n = k$ es la fórmula del cambio de variable, incluso si $\mathcal{J}f(\cdot)$ degenera
- Para $k = 1$ (integral por superficies de nivel)

$$\int_{\Omega_n} g(x)|\nabla f(x)|dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\{y\in\Omega_n; f(y)=t\}} g(y)dy \right) dt$$



Si $f(x) = \langle x, v\rangle$ es la fórmula de Cavalieri

Demuestra la fórmula de integración en polares en $\mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx =$$

$$\int_0^\infty \int_{S^{n-1}} r^{n-1} g(r\theta) d\sigma_{S^{n-1}}(\theta) dr$$

Demuestra la fórmula de integración en polares en $\mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla|x|| \cdot \frac{g(x)}{|\nabla|x||}dx$$

$$\int_0^\infty \int_{S^{n-1}} r^{n-1} g(r\theta) d\sigma_{S^{n-1}}(\theta) dr$$

Demuestra la fórmula de integración en polares en $\mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla |x|\,| \cdot \frac{g(x)}{|\nabla |x|\,|} dx = \int_0^\infty \left(\int_{|x|=r} \frac{g(x)}{|\nabla |x|\,|} dx \right) dr$$

$$\int_0^\infty \int_{S^{n-1}} r^{n-1} g(r\theta) d\sigma_{S^{n-1}}(\theta) dr$$

Demuestra la fórmula de integración en polares en $\mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla|x|\,| \cdot \frac{g(x)}{|\nabla|x|\,|}dx = \int_0^\infty \left(\int_{|x|=r} \frac{g(x)}{|\nabla|x|\,|}dx \right) dr$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_{rS^{n-1}} g(x) d\sigma_{rS^{n-1}}(x) \right) dr$$

$$\int_0^\infty \int_{S^{n-1}} r^{n-1} g(r\theta) d\sigma_{S^{n-1}}(\theta) dr$$

Demuestra la fórmula de integración en polares en $\mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla|x|| \cdot \frac{g(x)}{|\nabla|x||} dx = \int_0^\infty \left(\int_{|x|=r} \frac{g(x)}{|\nabla|x||} dx \right) dr$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_{rS^{n-1}} g(x) d\sigma_{rS^{n-1}}(x) \right) dr$$

Como

$$d\sigma_{rS^{n-1}}(rA) = r^{n-1} d\sigma_{S^{n-1}}(A)$$

si $A \subseteq S^{n-1}$ es un boreliano, entonces

$$\int_{rS^{n-1}} g(x) d\sigma_{rS^{n-1}}(x) = \int_{S^{n-1}} g(r\theta) r^{n-1} d\sigma_{S^{n-1}}(\theta)$$

y

$$\int_0^\infty \int_{S^{n-1}} r^{n-1} g(r\theta) d\sigma_{S^{n-1}}(\theta) dr$$

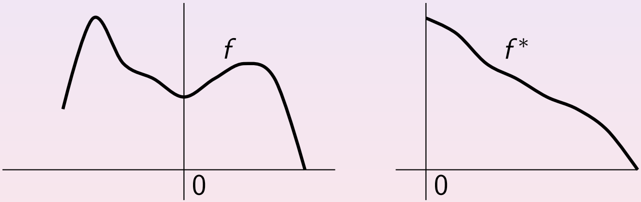
Demostración de D. Sobolev, para $1 < p < n$

Es consecuencia de:

- la desigualdad isoperimétrica
- la fórmula de la coárea
- las desigualdades de Hardy

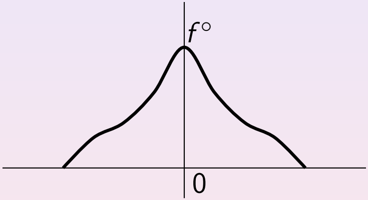
- Si $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ medible, entonces $f^*:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ (reordenamiento no creciente de f)

$$f^*(t) = \text{ínf}\{\lambda > 0; |\{x\in\mathbb{R}^n; |f(x)|>\lambda\}| \le t\}$$



- $f^\circ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (simetrizada de Schwarz)

$$f^\circ(x) = f^*(|x|^n \omega_n)$$



- f, f^*, f° tienen los mismos conjuntos de nivel

Cómo demostrar las desigualdades de Soblolev

$$1 \leq p < n \qquad \Longrightarrow \qquad \|f\|_q \leq c_{p,n}\|\nabla f\|_p$$

Cómo demostrar las desigualdades de Soblolev

$$1 \leq p < n \qquad \Longrightarrow \qquad \|f\|_q \leq c_{p,n} \|\nabla f\|_p$$

Primer paso

$$\|f\|_q = \|f^\circ\|_q \quad \overset{\substack{\text{desigualdades}\\ \text{de}\\ \text{Hardy}}}{\leq} \quad \|\nabla f^\circ\|_p$$

Cómo demostrar las desigualdades de Soblolev

$$1 \leq p < n \qquad \Longrightarrow \qquad \|f\|_q \leq c_{p,n}\|\nabla f\|_p$$

Primer paso

$$\|f\|_q = \|f^\circ\|_q \quad \overset{\substack{\text{desigualdades}\\ \text{de}\\ \text{Hardy}}}{\leq} \quad \|\nabla f^\circ\|_p$$

Segundo paso

$$\|\nabla f^\circ\|_p \quad \overset{\substack{\text{desigualdad}\\ \text{isoperimétrica}\\ +\,\text{coárea}}}{\leq} \quad \|\nabla f\|_p \quad \text{(Polya-Szego)}$$

Desigualdad de Hardy

Si $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ es una función medible positiva y $p > 1$,

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \right)^p dx \right)^{1/p} \leq \frac{p}{p-1} \left(\int_0^\infty f(x)^p dx \right)^{1/p}$$

Desigualdad de Hardy

Si $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ es una función medible positiva y $p > 1$,

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \right)^p dx \right)^{1/p} \leq \frac{p}{p-1} \left(\int_0^\infty f(x)^p dx \right)^{1/p}$$

- $\|F'\|_p$ controla a la norma $\|x^{-1}F\|_p$
- Variaciones con pesos y diferentes exponentes p, q
- Se conocen las mejores constantes

Veamos

$$\|\nabla f^{\circ}\|_p \leq \|\nabla f\|_p \qquad \text{(Polya-Szegö)}$$

$f \in C^1$ y la fórmula de la co-área de Federer implican

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^p dx = \int_0^{\infty} \left(\int_{\{|f|=t\}} |\nabla f(x)|^p d\mu(x) \right) dt$$

donde

$$d\mu(x) = \frac{dx}{|\nabla f(x)|}$$

Pero

$$\int_{\{|f|=t\}} d\mu(x) = \left(-\int_t^\infty \left(\int_{\{|f|=s\}} \frac{dx}{|\nabla f(x)|}\right) ds\right)'$$

$$= \text{(por co-área)} \; = \left(-\int_{\{|f|\geq t\}} dx\right)' = |M'(t)|$$

$M(t)$ es la función de distribución. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^p dx = \int_0^\infty \left(\int_{\{|f|=t\}} |\nabla f(x)|^p \frac{d\mu(x)}{|M'(t)|}\right) |M'(t)| dt$$

$$\geq \; \text{(by Jensen)} \; \geq \int_0^\infty \left(\int_{\{|f|=t\}} |\nabla f(x)| \frac{d\mu(x)}{|M'(t)|}\right)^p |M'(t)| dt$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_{\{|f|=t\}} dx\right)^p |M'(t)|^{1-p} dt$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \ \text{(D.I.)} \ \geq \int_0^\infty M(t)^{p(n-1)/n} |M'(t)|^{1-p} dt \\
&= \int_0^\infty s^{p(n-1)/n} |(f^*)'(s)|^p ds \\
&= c_{p,n} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f^\circ(x)|^p dx
\end{aligned}
$$

Bibliografía

- S. Bobkov, C. Houdré, *Some connections between Isoperimetric and Sobolev-type Inequalities*. Memoirs A.M.S., **616** (1997).
- I. Chavel, *Isoperimetric Inequalities*. Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press **145** (2001).
- H. Federer, W. Fleming, *Normal integral currents*, Ann. Math. **72**, (1960), 458–520.
- J. Heinonen, *Lectures on Lipschitz Analysis*, http://www.math.jyu.fi/research/reports/rep100.pdf
- V. Maz'ja, *Classes of domains and embedding theorems for function spaces*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **133**, (1960), 527–530.
- V. Maz'ja, *Sobolev Spaces*. Springer-Verlag (1985).