Subespacios invariantes

Joan Cerdà

Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi; GARF, Barcelona

E-mail: jcerda@ub.edu
http://www.mat.ub.edu/~cerda/

16 de abril de 2012

EL PROBLEMA

El problema del subespacio invariante

Tiene todo $T \in \mathcal{L}(E)$ un subespacio invariante?

$T \in \mathcal{L}(E)$. F subespacio T-invariante $\Leftrightarrow$ F subespacio vectorial cerrado no trivial tal que $T(F) \subset F$.

Per Enflo

- Contraejemplos de Per Enflo (1976) con E Banach real o complejo y de J. Read (1985) en ℓ^1.
- E no separable y $0 \neq x \in E \Rightarrow \overline{[x, Tx, T^2x, \ldots]}$ invariante.

Respuesta afirmativa para clases de operadores con cierta compacidad:

- Caso de T tal que $P(T)$ compacto no nulo
- Caso de T tal que $TK = KT$ (K compacto no nulo)
- Caso de T tal que $TS = ST$ y $SK = KS$ con $K \neq 0$ compacto y $S \neq \lambda I$ (S no escalar) $\Leftrightarrow$ T "de Lomonosov".

El problema del subespacio invariante

Tiene todo $T \in \mathcal{L}(E)$ un subespacio invariante?

$T \in \mathcal{L}(E)$. F subespacio T-invariante $\Leftrightarrow$ F subespacio vectorial cerrado no trivial tal que $T(F) \subset F$.

Per Enflo

- Contraejemplos de Per Enflo (1976) con E Banach real o complejo y de J. Read (1985) en ℓ^1.
- E no separable y $0 \neq x \in E \Rightarrow \overline{[x, Tx, T^2x, \ldots]}$ invariante.

Respuesta afirmativa para clases de operadores con cierta compacidad:

- Caso de T tal que $P(T)$ compacto no nulo
- Caso de T tal que $TK = KT$ (K compacto no nulo)
- Caso de T tal que $TS = ST$ y $SK = KS$ con $K \neq 0$ compacto y $S \neq \lambda I$ (S no escalar) $\Leftrightarrow$ T "de Lomonosov".

El problema del subespacio invariante

Tiene todo $T \in \mathcal{L}(E)$ un subespacio invariante?

$T \in \mathcal{L}(E)$. F subespacio T-invariante $\Leftrightarrow$ F subespacio vectorial cerrado no trivial tal que $T(F) \subset F$.

Per Enflo

- Contraejemplos de Per Enflo (1976) con E Banach real o complejo y de J. Read (1985) en ℓ^1.
- E no separable y $0 \neq x \in E \Rightarrow \overline{[x, Tx, T^2x, \ldots]}$ invariante.

Respuesta afirmativa para clases de operadores con cierta compacidad:

- Caso de T tal que $P(T)$ compacto no nulo
- Caso de T tal que $TK = KT$ (K compacto no nulo)
- Caso de T tal que $TS = ST$ y $SK = KS$ con $K \neq 0$ compacto y $S \neq \lambda I$ (S no escalar) $\Leftrightarrow$ T "de Lomonosov".

El problema del subespacio invariante

Tiene todo $T \in \mathcal{L}(E)$ un subespacio invariante?

$T \in \mathcal{L}(E)$. F subespacio T-invariante $\Leftrightarrow$ F subespacio vectorial cerrado no trivial tal que $T(F) \subset F$.

Per Enflo

- Contraejemplos de Per Enflo (1976) con E Banach real o complejo y de J. Read (1985) en ℓ^1.
- E no separable y $0 \neq x \in E \Rightarrow \overline{[x, Tx, T^2x, \ldots]}$ invariante.

Respuesta afirmativa para clases de operadores con cierta compacidad:

- Caso de T tal que $P(T)$ compacto no nulo
- Caso de T tal que $TK = KT$ (K compacto no nulo)
- Caso de T tal que $TS = ST$ y $SK = KS$ con $K \neq 0$ compacto y $S \neq \lambda I$ (S no escalar) $\Leftrightarrow$ T "de Lomonosov".

El problema del subespacio invariante

Tiene todo $T \in \mathcal{L}(E)$ un subespacio invariante?

$T \in \mathcal{L}(E)$. F subespacio T-invariante $\Leftrightarrow$ F subespacio vectorial cerrado no trivial tal que $T(F) \subset F$.

Per Enflo

- Contraejemplos de Per Enflo (1976) con E Banach real o complejo y de J. Read (1985) en ℓ^1.
- E no separable y $0 \neq x \in E \Rightarrow \overline{[x, Tx, T^2x, \ldots]}$ invariante.

Respuesta afirmativa para clases de operadores con cierta compacidad:

- Caso de T tal que $P(T)$ compacto no nulo
- Caso de T tal que $TK = KT$ (K compacto no nulo)
- Caso de T tal que $TS = ST$ y $SK = KS$ con $K \neq 0$ compacto y $S \neq \lambda I$ (S no escalar) $\Leftrightarrow$ T "de Lomonosov".

El problema del subespacio invariante

Tiene todo $T \in \mathcal{L}(E)$ un subespacio invariante?

$T \in \mathcal{L}(E)$. F subespacio T-invariante $\Leftrightarrow$ F subespacio vectorial cerrado no trivial tal que $T(F) \subset F$.

Per Enflo

- Contraejemplos de Per Enflo (1976) con E Banach real o complejo y de J. Read (1985) en ℓ^1.
- E no separable y $0 \neq x \in E \Rightarrow \overline{[x, Tx, T^2x, \ldots]}$ invariante.

Respuesta afirmativa para clases de operadores con cierta compacidad:

- Caso de T tal que $P(T)$ compacto no nulo
- Caso de T tal que $TK = KT$ (K compacto no nulo)
- Caso de T tal que $TS = ST$ y $SK = KS$ con $K \neq 0$ compacto y $S \neq \lambda I$ (S no escalar) $\Leftrightarrow$ T "de Lomonosov".

El problema del subespacio invariante

Tiene todo $T \in \mathcal{L}(E)$ un subespacio invariante?

$T \in \mathcal{L}(E)$. F subespacio T-invariante $\Leftrightarrow$ F subespacio vectorial cerrado no trivial tal que $T(F) \subset F$.

Per Enflo

- Contraejemplos de Per Enflo (1976) con E Banach real o complejo y de J. Read (1985) en ℓ^1.
- E no separable y $0 \neq x \in E \Rightarrow \overline{[x, Tx, T^2x, \ldots]}$ invariante.

Respuesta afirmativa para clases de operadores con cierta compacidad:

- Caso de T tal que $P(T)$ compacto no nulo
- Caso de T tal que $TK = KT$ (K compacto no nulo)
- Caso de T tal que $TS = ST$ y $SK = KS$ con $K \neq 0$ compacto y $S \neq \lambda I$ (S no escalar) $\Leftrightarrow$ T "de Lomonosov".

El problema del subespacio invariante

Tiene todo $T \in \mathcal{L}(E)$ un subespacio invariante?

$T \in \mathcal{L}(E)$. F subespacio T-invariante $\Leftrightarrow$ F subespacio vectorial cerrado no trivial tal que $T(F) \subset F$.

Per Enflo

- Contraejemplos de Per Enflo (1976) con E Banach real o complejo y de J. Read (1985) en ℓ^1.
- E no separable y $0 \neq x \in E \Rightarrow \overline{[x, Tx, T^2x, \ldots]}$ invariante.

Respuesta afirmativa para clases de operadores con cierta compacidad:

- Caso de T tal que $P(T)$ compacto no nulo
- Caso de T tal que $TK = KT$ (K compacto no nulo)
- Caso de T tal que $TS = ST$ y $SK = KS$ con $K \neq 0$ compacto y $S \neq \lambda I$ (S no escalar) $\Leftrightarrow$ T "de Lomonosov".

El resultado de John von Neumann (1935)

- J. von Neumann: Todo $K \in \mathcal{L}(H)$ compacto (o sea, $\overline{K(B_H)}$ compacto) en H, espacio de Hilbert de dimensión infinita, tiene subespacio invariante.
- Demostrado por Aronszajn y Smith en 1954.

Problema abierto para T arbitrario sobre H!!

El resultado de John von Neumann (1935)

- J. von Neumann: Todo $K \in \mathcal{L}(H)$ compacto (o sea, $\overline{K(B_H)}$ compacto) en H, espacio de Hilbert de dimensión infinita, tiene subespacio invariante.
- Demostrado por Aronszajn y Smith en 1954.

Problema abierto para T arbitrario sobre H!!

El resultado de John von Neumann (1935)

- J. von Neumann: Todo $K \in \mathcal{L}(H)$ compacto (o sea, $\overline{K(B_H)}$ compacto) en H, espacio de Hilbert de dimensión infinita, tiene subespacio invariante.
- Demostrado por Aronszajn y Smith en 1954.

Problema abierto para T arbitrario sobre H!!

Caso $\dim E < \infty$

Solución completa considerando subespacios propios:

- λ valor propio y $\mathcal{N}(\lambda) := \mathrm{Nuc}\,(T - \lambda I) \Rightarrow T(\mathcal{N}(\lambda)) \subset \mathcal{N}(\lambda)$ cerrado no nulo
- También $AT = TA \Rightarrow A(\mathcal{N}(\lambda)) \subset \mathcal{N}(\lambda)$:
  $x \in \mathcal{N}(\lambda)) \Rightarrow T(Ax) = A(Tx) = A(\lambda x) = \lambda Ax \Rightarrow Ax \in \mathcal{N}(\lambda)$.
- Si $\mathcal{N}(\lambda) = E$, $T = \lambda I$ es un operador escalar y todo subespacio es invariante.
- Si E es complejo y $\dim E < \infty$, T tiene valores propios (soluciones de $\det(T - \lambda I) = 0$) $\longrightarrow$ distinción entre casos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Falso si $\dim E = \infty$. Ejemplo: Volterra, $Vf(x) = \int_0^x f$ sobre $E = \mathcal{C}[0,1]$.

Caso $\dim E < \infty$

Solución completa considerando subespacios propios:

- λ valor propio y $\mathcal{N}(\lambda) := \mathrm{Nuc}\,(T - \lambda I) \Rightarrow T(\mathcal{N}(\lambda)) \subset \mathcal{N}(\lambda)$ cerrado no nulo
- También $AT = TA \Rightarrow A(\mathcal{N}(\lambda)) \subset \mathcal{N}(\lambda)$:
  $x \in \mathcal{N}(\lambda)) \Rightarrow T(Ax) = A(Tx) = A(\lambda x) = \lambda Ax \Rightarrow Ax \in \mathcal{N}(\lambda)$.
- Si $\mathcal{N}(\lambda) = E$, $T = \lambda I$ es un operador escalar y todo subespacio es invariante.
- Si E es complejo y $\dim E < \infty$, T tiene valores propios (soluciones de $\det(T - \lambda I) = 0$) $\longrightarrow$ distinción entre casos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Falso si $\dim E = \infty$. Ejemplo: Volterra, $Vf(x) = \int_0^x f$ sobre $E = \mathcal{C}[0, 1]$.

Caso $\dim E < \infty$

Solución completa considerando subespacios propios:

- λ valor propio y $\mathcal{N}(\lambda) := \mathrm{Nuc}\,(T - \lambda I) \Rightarrow T(\mathcal{N}(\lambda)) \subset \mathcal{N}(\lambda)$ cerrado no nulo
- También $AT = TA \Rightarrow A(\mathcal{N}(\lambda)) \subset \mathcal{N}(\lambda)$:
  $x \in \mathcal{N}(\lambda)) \Rightarrow T(Ax) = A(Tx) = A(\lambda x) = \lambda Ax \Rightarrow Ax \in \mathcal{N}(\lambda)$.
- Si $\mathcal{N}(\lambda) = E$, $T = \lambda I$ es un operador escalar y todo subespacio es invariante.
- Si E es complejo y $\dim E < \infty$, T tiene valores propios (soluciones de $\det(T - \lambda I) = 0$) $\longrightarrow$ distinción entre casos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Falso si $\dim E = \infty$. Ejemplo: Volterra, $Vf(x) = \int_0^x f$ sobre $E = \mathcal{C}[0,1]$.

Caso $\dim E < \infty$

Solución completa considerando subespacios propios:

- λ valor propio y $\mathcal{N}(\lambda) := \mathrm{Nuc}\,(T - \lambda I) \Rightarrow T(\mathcal{N}(\lambda)) \subset \mathcal{N}(\lambda)$ cerrado no nulo
- También $AT = TA \Rightarrow A(\mathcal{N}(\lambda)) \subset \mathcal{N}(\lambda)$:
  $x \in \mathcal{N}(\lambda)) \Rightarrow T(Ax) = A(Tx) = A(\lambda x) = \lambda Ax \Rightarrow Ax \in \mathcal{N}(\lambda)$.
- Si $\mathcal{N}(\lambda) = E$, $T = \lambda I$ es un operador escalar y todo subespacio es invariante.
- Si E es complejo y $\dim E < \infty$, T tiene valores propios (soluciones de $\det(T - \lambda I) = 0$) $\longrightarrow$ distinción entre casos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Falso si $\dim E = \infty$. Ejemplo: Volterra, $Vf(x) = \int_0^x f$ sobre $E = \mathcal{C}[0,1]$.

Caso $\dim E < \infty$

Solución completa considerando subespacios propios:

- λ valor propio y $\mathcal{N}(\lambda) := \mathrm{Nuc}\,(T - \lambda I) \Rightarrow T(\mathcal{N}(\lambda)) \subset \mathcal{N}(\lambda)$ cerrado no nulo
- También $AT = TA \Rightarrow A(\mathcal{N}(\lambda)) \subset \mathcal{N}(\lambda)$:
  $x \in \mathcal{N}(\lambda)) \Rightarrow T(Ax) = A(Tx) = A(\lambda x) = \lambda Ax \Rightarrow Ax \in \mathcal{N}(\lambda)$.
- Si $\mathcal{N}(\lambda) = E$, $T = \lambda I$ es un operador escalar y todo subespacio es invariante.
- Si E es complejo y $\dim E < \infty$, T tiene valores propios (soluciones de $\det(T - \lambda I) = 0$) $\longrightarrow$ distinción entre casos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Falso si $\dim E = \infty$. Ejemplo: Volterra, $Vf(x) = \int_0^x f$ sobre $E = \mathcal{C}[0,1]$.

Caso $\dim E < \infty$

Solución completa considerando subespacios propios:

- λ valor propio y $\mathcal{N}(\lambda) := \mathrm{Nuc}\,(T - \lambda I) \Rightarrow T(\mathcal{N}(\lambda)) \subset \mathcal{N}(\lambda)$ cerrado no nulo
- También $AT = TA \Rightarrow A(\mathcal{N}(\lambda)) \subset \mathcal{N}(\lambda)$:
  $x \in \mathcal{N}(\lambda)) \Rightarrow T(Ax) = A(Tx) = A(\lambda x) = \lambda Ax \Rightarrow Ax \in \mathcal{N}(\lambda)$.
- Si $\mathcal{N}(\lambda) = E$, $T = \lambda I$ es un operador escalar y todo subespacio es invariante.
- Si E es complejo y $\dim E < \infty$, T tiene valores propios (soluciones de $\det(T - \lambda I) = 0$) $\longrightarrow$ distinción entre casos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Falso si $\dim E = \infty$. Ejemplo: Volterra, $Vf(x) = \int_0^x f$ sobre $E = \mathcal{C}[0,1]$.

Caso $\dim E < \infty$

Solución completa considerando subespacios propios:

- λ valor propio y $\mathcal{N}(\lambda) := \mathrm{Nuc}\,(T - \lambda I) \Rightarrow T(\mathcal{N}(\lambda)) \subset \mathcal{N}(\lambda)$ cerrado no nulo
- También $AT = TA \Rightarrow A(\mathcal{N}(\lambda)) \subset \mathcal{N}(\lambda)$:
  $x \in \mathcal{N}(\lambda)) \Rightarrow T(Ax) = A(Tx) = A(\lambda x) = \lambda Ax \Rightarrow Ax \in \mathcal{N}(\lambda)$.
- Si $\mathcal{N}(\lambda) = E$, $T = \lambda I$ es un operador escalar y todo subespacio es invariante.
- Si E es complejo y $\dim E < \infty$, T tiene valores propios (soluciones de $\det(T - \lambda I) = 0$) $\longrightarrow$ distinción entre casos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Falso si $\dim E = \infty$. Ejemplo: Volterra, $Vf(x) = \int_0^x f$ sobre $E = \mathcal{C}[0,1]$.

Caso $\dim E < \infty$

Solución completa considerando subespacios propios:

- λ valor propio y $\mathcal{N}(\lambda) := \mathrm{Nuc}\,(T - \lambda I) \Rightarrow T(\mathcal{N}(\lambda)) \subset \mathcal{N}(\lambda)$ cerrado no nulo
- También $AT = TA \Rightarrow A(\mathcal{N}(\lambda)) \subset \mathcal{N}(\lambda)$:
  $x \in \mathcal{N}(\lambda)) \Rightarrow T(Ax) = A(Tx) = A(\lambda x) = \lambda Ax \Rightarrow Ax \in \mathcal{N}(\lambda)$.
- Si $\mathcal{N}(\lambda) = E$, $T = \lambda I$ es un operador escalar y todo subespacio es invariante.
- Si E es complejo y $\dim E < \infty$, T tiene valores propios (soluciones de $\det(T - \lambda I) = 0$) $\longrightarrow$ distinción entre casos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Falso si $\dim E = \infty$. Ejemplo: Volterra, $Vf(x) = \int_0^x f$ sobre $E = \mathcal{C}[0,1]$.

Complexificación de E Banach real

- $E_{\mathbb{C}} = E \times E$ Banach complejo con:
  - $x + \imath y := (x, y)$, $r(x + \imath y) := rx + \imath ry)$, $i(x + \imath y) := -y + \imath x$
  - $\|x + \imath y\| := \max_{\vartheta \in \mathbb{R}} \|x \cos(\vartheta) + y \operatorname{sen}(\vartheta)\|_E$.
  - $T_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$ tal que $T_{\mathbb{C}}(x + \imath y) := Tx + \imath Ty$
  - $(ST)_{\mathbb{C}} = S_{\mathbb{C}} T_{\mathbb{C}}$ y $\|T_{\mathbb{C}}\| = \|T\|$.

- E real de dimensión finita:
  - $\dim E = n < \infty$ impar $\Rightarrow T$ tiene valores propios y, por tanto, subespacios invariantes
  - $\dim E = 2$, rotaciones sin subespacios invariantes.
  - $2 < \dim E < \infty$ par, $T_{\mathbb{C}}$ tiene vector propio no nulo: $Tx_0 + \imath Ty_0 = \lambda(x_0 + \imath y_0) \Rightarrow F := [x_0, y_0] \subset E$ T-invariante.

Complexificación de E Banach real

- $E_{\mathbb{C}} = E \times E$ Banach complejo con:
  - $x + \imath y := (x, y)$, $r(x + \imath y) := rx + \imath ry)$, $i(x + \imath y) := -y + \imath x$
  - $\|x + \imath y\| := \max_{\vartheta \in \mathbb{R}} \|x \cos(\vartheta) + y \operatorname{sen}(\vartheta)\|_E$.
  - $T_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$ tal que $T_{\mathbb{C}}(x + \imath y) := Tx + \imath Ty$
  - $(ST)_{\mathbb{C}} = S_{\mathbb{C}} T_{\mathbb{C}}$ y $\|T_{\mathbb{C}}\| = \|T\|$.

complexificacion

- E real de dimensión finita:
  - $\dim E = n < \infty$ impar $\Rightarrow T$ tiene valores propios y, por tanto, subespacios invariantes
  - $\dim E = 2$, rotaciones sin subespacios invariantes.
  - $2 < \dim E < \infty$ par, $T_{\mathbb{C}}$ tiene vector propio no nulo: $Tx_0 + \imath Ty_0 = \lambda(x_0 + \imath y_0) \Rightarrow F := [x_0, y_0] \subset E$ T-invariante.

Complexificación de E Banach real

- $E_{\mathbb{C}} = E \times E$ Banach complejo con:
  - $x + \imath y := (x, y)$, $r(x + \imath y) := rx + \imath ry)$, $i(x + \imath y) := -y + \imath x$
  - $\|x + \imath y\| := \max_{\vartheta \in \mathbb{R}} \|x \cos(\vartheta) + y \operatorname{sen}(\vartheta)\|_E$.
  - $T_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$ tal que $T_{\mathbb{C}}(x + \imath y) := Tx + \imath Ty$
  - $(ST)_{\mathbb{C}} = S_{\mathbb{C}} T_{\mathbb{C}}$ y $\|T_{\mathbb{C}}\| = \|T\|$.

complexificacion

- E real de dimensión finita:
  - $\dim E = n < \infty$ impar $\Rightarrow T$ tiene valores propios y, por tanto, subespacios invariantes
  - $\dim E = 2$, rotaciones sin subespacios invariantes.
  - $2 < \dim E < \infty$ par, $T_{\mathbb{C}}$ tiene vector propio no nulo: $Tx_0 + \imath Ty_0 = \lambda(x_0 + \imath y_0) \Rightarrow F := [x_0, y_0] \subset E$ T-invariante.

Complexificación de E Banach real

- $E_{\mathbb{C}} = E \times E$ Banach complejo con:
  - $x + \imath y := (x, y)$, $r(x + \imath y) := rx + \imath ry)$, $i(x + \imath y) := -y + \imath x$
  - $\|x + \imath y\| := \max_{\vartheta \in \mathbb{R}} \|x \cos(\vartheta) + y \operatorname{sen}(\vartheta)\|_E$.
  - $T_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$ tal que $T_{\mathbb{C}}(x + \imath y) := Tx + \imath Ty$
  - $(ST)_{\mathbb{C}} = S_{\mathbb{C}} T_{\mathbb{C}}$ y $\|T_{\mathbb{C}}\| = \|T\|$.

complexificacion

- E real de dimensión finita:
  - $\dim E = n < \infty$ impar $\Rightarrow T$ tiene valores propios y, por tanto, subespacios invariantes
  - $\dim E = 2$, rotaciones sin subespacios invariantes.
  - $2 < \dim E < \infty$ par, $T_{\mathbb{C}}$ tiene vector propio no nulo: $Tx_0 + \imath Ty_0 = \lambda(x_0 + \imath y_0) \Rightarrow F := [x_0, y_0] \subset E$ T-invariante.

Complexificación de E Banach real

- $E_{\mathbb{C}} = E \times E$ Banach complejo con:
  - $x + \imath y := (x, y)$, $r(x + \imath y) := rx + \imath ry)$, $i(x + \imath y) := -y + \imath x$
  - $\|x + \imath y\| := \max_{\vartheta \in \mathbb{R}} \|x \cos(\vartheta) + y \operatorname{sen}(\vartheta)\|_E$.
  - $T_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$ tal que $T_{\mathbb{C}}(x + \imath y) := Tx + \imath Ty$
  - $(ST)_{\mathbb{C}} = S_{\mathbb{C}} T_{\mathbb{C}}$ y $\|T_{\mathbb{C}}\| = \|T\|$.

complexificacion

- E real de dimensión finita:
  - $\dim E = n < \infty$ impar $\Rightarrow T$ tiene valores propios y, por tanto, subespacios invariantes
  - $\dim E = 2$, rotaciones sin subespacios invariantes.
  - $2 < \dim E < \infty$ par, $T_{\mathbb{C}}$ tiene vector propio no nulo:
    $Tx_0 + \imath Ty_0 = \lambda(x_0 + \imath y_0) \Rightarrow F := [x_0, y_0] \subset E$ T-invariante.

Complexificación de E Banach real

- $E_{\mathbb{C}} = E \times E$ Banach complejo con:
  - $x + \imath y := (x, y)$, $r(x + \imath y) := rx + \imath ry)$, $i(x + \imath y) := -y + \imath x$
  - $\|x + \imath y\| := \max_{\vartheta \in \mathbb{R}} \|x \cos(\vartheta) + y \operatorname{sen}(\vartheta)\|_E$.
  - $T_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$ tal que $T_{\mathbb{C}}(x + \imath y) := Tx + \imath Ty$
  - $(ST)_{\mathbb{C}} = S_{\mathbb{C}} T_{\mathbb{C}}$ y $\|T_{\mathbb{C}}\| = \|T\|$.

complexificacion

- E real de dimensión finita:
  - $\dim E = n < \infty$ impar $\Rightarrow T$ tiene valores propios y, por tanto, subespacios invariantes
  - $\dim E = 2$, rotaciones sin subespacios invariantes.
  - $2 < \dim E < \infty$ par, $T_{\mathbb{C}}$ tiene vector propio no nulo: $Tx_0 + \imath Ty_0 = \lambda(x_0 + \imath y_0) \Rightarrow F := [x_0, y_0] \subset E$ T-invariante.

Complexificación de E Banach real

- $E_{\mathbb{C}} = E \times E$ Banach complejo con:
  - $x + \imath y := (x, y)$, $r(x + \imath y) := rx + \imath ry)$, $i(x + \imath y) := -y + \imath x$
  - $\|x + \imath y\| := \max_{\vartheta \in \mathbb{R}} \|x \cos(\vartheta) + y \operatorname{sen}(\vartheta)\|_E$.
  - $T_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$ tal que $T_{\mathbb{C}}(x + \imath y) := Tx + \imath Ty$
  - $(ST)_{\mathbb{C}} = S_{\mathbb{C}} T_{\mathbb{C}}$ y $\|T_{\mathbb{C}}\| = \|T\|$.

◂ complexificacion

- E real de dimensión finita:
  - $\dim E = n < \infty$ impar $\Rightarrow T$ tiene valores propios y, por tanto, subespacios invariantes
  - $\dim E = 2$, rotaciones sin subespacios invariantes.
  - $2 < \dim E < \infty$ par, $T_{\mathbb{C}}$ tiene vector propio no nulo: $Tx_0 + \imath Ty_0 = \lambda(x_0 + \imath y_0) \Rightarrow F := [x_0, y_0] \subset E$ T-invariante.

Complexificación de E Banach real

- $E_{\mathbb{C}} = E \times E$ Banach complejo con:
  - $x + \imath y := (x, y)$, $r(x + \imath y) := rx + \imath ry)$, $i(x + \imath y) := -y + \imath x$
  - $\|x + \imath y\| := \max_{\vartheta \in \mathbb{R}} \|x \cos(\vartheta) + y \operatorname{sen}(\vartheta)\|_E$.
  - $T_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$ tal que $T_{\mathbb{C}}(x + \imath y) := Tx + \imath Ty$
  - $(ST)_{\mathbb{C}} = S_{\mathbb{C}} T_{\mathbb{C}}$ y $\|T_{\mathbb{C}}\| = \|T\|$.

◂ complexificacion

- E real de dimensión finita:
  - $\dim E = n < \infty$ impar $\Rightarrow T$ tiene valores propios y, por tanto, subespacios invariantes
  - $\dim E = 2$, rotaciones sin subespacios invariantes.
  - $2 < \dim E < \infty$ par, $T_{\mathbb{C}}$ tiene vector propio no nulo: $Tx_0 + \imath Ty_0 = \lambda(x_0 + \imath y_0) \Rightarrow F := [x_0, y_0] \subset E$ T-invariante.

Complexificación de E Banach real

- $E_{\mathbb{C}} = E \times E$ Banach complejo con:
  - $x + \imath y := (x, y)$, $r(x + \imath y) := rx + \imath ry)$, $i(x + \imath y) := -y + \imath x$
  - $\|x + \imath y\| := \max_{\vartheta \in \mathbb{R}} \|x \cos(\vartheta) + y \operatorname{sen}(\vartheta)\|_E$.
  - $T_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$ tal que $T_{\mathbb{C}}(x + \imath y) := Tx + \imath Ty$
  - $(ST)_{\mathbb{C}} = S_{\mathbb{C}} T_{\mathbb{C}}$ y $\|T_{\mathbb{C}}\| = \|T\|$.

complexificacion

- E real de dimensión finita:
  - $\dim E = n < \infty$ impar $\Rightarrow T$ tiene valores propios y, por tanto, subespacios invariantes
  - $\dim E = 2$, rotaciones sin subespacios invariantes.
  - $2 < \dim E < \infty$ par, $T_{\mathbb{C}}$ tiene vector propio no nulo: $Tx_0 + \imath Ty_0 = \lambda(x_0 + \imath y_0) \Rightarrow F := [x_0, y_0] \subset E$ T-invariante.

Dimensión infinita$\rightarrow$ Teoria espectral de operadores compactos para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

TEORIA ESPECTRAL

Espectro $\sigma(T)$ de $T \in \mathcal{L}(E)$; $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$$\sigma(T) = \{\lambda;\, T - \lambda I \notin \mathcal{L}^{-1}(E)\} \supset \sigma_p(T) = \{\lambda;\ \mathrm{Nuc}\,(T - \lambda I) \neq \{0\}\}$$

- $\sigma(T)$ contenido en el disco $\{\lambda;\, |\lambda| \leq \|T\|\}$: $|\lambda| > \|T\| \Rightarrow Tx - \lambda x = y$ tiene solución única x, pues $F(x) := \lambda^{-1}(Tx - y)$ contractiva en E.
- $\sigma(T)$ cerrado: Si $\lambda_0 \notin \sigma(T)$ y $|\lambda - \lambda_0| \|(T - \lambda_0 I)^{-1}\| < 1$, la ecuación $Tx - \lambda x = y$ equivale a $(T - \lambda_0 I)^{-1}(y + (\lambda - \lambda_0)x) = x$ y tiene solución única x, pues $F(x) := (T - \lambda_0 I)^{-1}(y + (\lambda - \lambda_0)x)$ es contractiva en E.
- Fórmula de Taylor (1938) - Gelfand (1941) para $r := \sup\{|\lambda|;\, \lambda \in \sigma(T)\}$:

$$r = \lim_n \|T^n\|^{1/n} = \inf_n \|T^n\|^{1/n} (\leq \|T\|)!!$$

Basada en propiedades de la función holomorfa vectorial $R : \mathbb{C} \setminus \sigma(T) \to \mathcal{L}(E)$,

$$R(\lambda) := (T - \lambda I)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{I - T/\lambda} \in \mathcal{L}(E).$$

Espectro $\sigma(T)$ de $T \in \mathcal{L}(E)$; $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$$\sigma(T) = \{\lambda;\, T - \lambda I \notin \mathcal{L}^{-1}(E)\} \supset \sigma_p(T) = \{\lambda;\ \mathrm{Nuc}\,(T - \lambda I) \neq \{0\}\}$$

- $\sigma(T)$ contenido en el disco $\{\lambda;\, |\lambda| \leq \|T\|\}$: $|\lambda| > \|T\| \Rightarrow Tx - \lambda x = y$ tiene solución única x, pues $F(x) := \lambda^{-1}(Tx - y)$ contractiva en E.
- $\sigma(T)$ cerrado: Si $\lambda_0 \notin \sigma(T)$ y $|\lambda - \lambda_0|\|(T - \lambda_0 I)^{-1}\| < 1$, la ecuación $Tx - \lambda x = y$ equivale a $(T - \lambda_0 I)^{-1}(y + (\lambda - \lambda_0)x) = x$ y tiene solución única x, pues $F(x) := (T - \lambda_0 I)^{-1}(y + (\lambda - \lambda_0)x)$ es contractiva en E.
- Fórmula de Taylor (1938) - Gelfand (1941) para $r := \sup\{|\lambda|;\, \lambda \in \sigma(T)\}$:

$$r = \lim_n \|T^n\|^{1/n} = \inf_n \|T^n\|^{1/n} (\leq \|T\|)!!$$

Basada en propiedades de la función holomorfa vectorial $R : \mathbb{C} \setminus \sigma(T) \to \mathcal{L}(E)$,

$$R(\lambda) := (T - \lambda I)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{I - T/\lambda} \in \mathcal{L}(E).$$

Espectro $\sigma(T)$ de $T \in \mathcal{L}(E)$; $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$$\sigma(T) = \{\lambda;\ T - \lambda I \notin \mathcal{L}^{-1}(E)\} \supset \sigma_p(T) = \{\lambda;\ \mathrm{Nuc}\,(T - \lambda I) \neq \{0\}\}$$

- $\sigma(T)$ contenido en el disco $\{\lambda;\ |\lambda| \leq \|T\|\}$: $|\lambda| > \|T\| \Rightarrow Tx - \lambda x = y$ tiene solución única x, pues $F(x) := \lambda^{-1}(Tx - y)$ contractiva en E.
- $\sigma(T)$ cerrado: Si $\lambda_0 \notin \sigma(T)$ y $|\lambda - \lambda_0| \|(T - \lambda_0 I)^{-1}\| < 1$, la ecuación $Tx - \lambda x = y$ equivale a $(T - \lambda_0 I)^{-1}(y + (\lambda - \lambda_0)x) = x$ y tiene solución única x, pues $F(x) := (T - \lambda_0 I)^{-1}(y + (\lambda - \lambda_0)x)$ es contractiva en E.
- Fórmula de Taylor (1938) - Gelfand (1941) para $r := \sup\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(T)\}$:

$$r = \lim_n \|T^n\|^{1/n} = \inf_n \|T^n\|^{1/n} (\leq \|T\|)!!$$

Basada en propiedades de la función holomorfa vectorial $R : \mathbb{C} \setminus \sigma(T) \to \mathcal{L}(E)$,

$$R(\lambda) := (T - \lambda I)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{I - T/\lambda} \in \mathcal{L}(E).$$

Espectro $\sigma(T)$ de $T \in \mathcal{L}(E)$; $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$$\sigma(T) = \{\lambda;\ T - \lambda I \notin \mathcal{L}^{-1}(E)\} \supset \sigma_p(T) = \{\lambda;\ \mathrm{Nuc}\,(T - \lambda I) \neq \{0\}\}$$

- $\sigma(T)$ contenido en el disco $\{\lambda;\ |\lambda| \leq \|T\|\}$: $|\lambda| > \|T\| \Rightarrow Tx - \lambda x = y$ tiene solución única x, pues $F(x) := \lambda^{-1}(Tx - y)$ contractiva en E.
- $\sigma(T)$ cerrado: Si $\lambda_0 \notin \sigma(T)$ y $|\lambda - \lambda_0| \|(T - \lambda_0 I)^{-1}\| < 1$, la ecuación $Tx - \lambda x = y$ equivale a $(T - \lambda_0 I)^{-1}(y + (\lambda - \lambda_0)x) = x$ y tiene solución única x, pues $F(x) := (T - \lambda_0 I)^{-1}(y + (\lambda - \lambda_0)x)$ es contractiva en E.
- Fórmula de Taylor (1938) - Gelfand (1941) para $r := \sup\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(T)\}$:

$$r = \lim_n \|T^n\|^{1/n} = \inf_n \|T^n\|^{1/n} (\leq \|T\|)!!$$

Basada en propiedades de la función holomorfa vectorial $R : \mathbb{C} \setminus \sigma(T) \to \mathcal{L}(E)$,

$$R(\lambda) := (T - \lambda I)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{I - T/\lambda} \in \mathcal{L}(E).$$

Espectro $\sigma(T)$ de $T \in \mathcal{L}(E)$; $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$$\sigma(T) = \{\lambda;\ T - \lambda I \notin \mathcal{L}^{-1}(E)\} \supset \sigma_p(T) = \{\lambda;\ \mathrm{Nuc}\,(T - \lambda I) \neq \{0\}\}$$

- $\sigma(T)$ contenido en el disco $\{\lambda;\ |\lambda| \leq \|T\|\}$: $|\lambda| > \|T\| \Rightarrow Tx - \lambda x = y$ tiene solución única x, pues $F(x) := \lambda^{-1}(Tx - y)$ contractiva en E.
- $\sigma(T)$ cerrado: Si $\lambda_0 \notin \sigma(T)$ y $|\lambda - \lambda_0| \|(T - \lambda_0 I)^{-1}\| < 1$, la ecuación $Tx - \lambda x = y$ equivale a $(T - \lambda_0 I)^{-1}(y + (\lambda - \lambda_0)x) = x$ y tiene solución única x, pues $F(x) := (T - \lambda_0 I)^{-1}(y + (\lambda - \lambda_0)x)$ es contractiva en E.
- Fórmula de Taylor (1938) - Gelfand (1941) para $r := \sup\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(T)\}$:

$$r = \lim_n \|T^n\|^{1/n} = \inf_n \|T^n\|^{1/n} (\leq \|T\|)!!$$

Basada en propiedades de la función holomorfa vectorial $R : \mathbb{C} \setminus \sigma(T) \to \mathcal{L}(E)$,

$$R(\lambda) := (T - \lambda I)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{I - T/\lambda} \in \mathcal{L}(E).$$

Espectro $\sigma(T)$ de $T \in \mathcal{L}(E)$; $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$$\sigma(T) = \{\lambda;\ T - \lambda I \notin \mathcal{L}^{-1}(E)\} \supset \sigma_p(T) = \{\lambda;\ \mathrm{Nuc}\,(T - \lambda I) \neq \{0\}\}$$

- $\sigma(T)$ contenido en el disco $\{\lambda;\ |\lambda| \leq \|T\|\}$: $|\lambda| > \|T\| \Rightarrow Tx - \lambda x = y$ tiene solución única x, pues $F(x) := \lambda^{-1}(Tx - y)$ contractiva en E.
- $\sigma(T)$ cerrado: Si $\lambda_0 \notin \sigma(T)$ y $|\lambda - \lambda_0| \|(T - \lambda_0 I)^{-1}\| < 1$, la ecuación $Tx - \lambda x = y$ equivale a $(T - \lambda_0 I)^{-1}(y + (\lambda - \lambda_0)x) = x$ y tiene solución única x, pues $F(x) := (T - \lambda_0 I)^{-1}(y + (\lambda - \lambda_0)x)$ es contractiva en E.
- Fórmula de Taylor (1938) - Gelfand (1941) para $r := \sup\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(T)\}$:

$$r = \lim_n \|T^n\|^{1/n} = \inf_n \|T^n\|^{1/n} (\leq \|T\|)!!$$

Basada en propiedades de la función holomorfa vectorial $R : \mathbb{C} \setminus \sigma(T) \to \mathcal{L}(E)$,

$$R(\lambda) := (T - \lambda I)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{I - T/\lambda} \in \mathcal{L}(E).$$

Caso de $K \in \mathcal{L}(E)$ compacto

$K \in \mathcal{L}(E)$ compacto $\Leftrightarrow \overline{K(B_E)}$ compacto, o sea,

$$\|x_n\| \leq M \Rightarrow \exists\{x_{n_k}\} \text{ convergente}$$

Si $K = I \Rightarrow \dim E < \infty$ y $E \equiv \mathbb{K}^n$ (B_E compacta $\Rightarrow \dim E = n < \infty$ y $E \equiv \mathbb{K}^n$).

Teorema

Si $\lambda \neq 0$,

- $\dim \mathcal{N}(\lambda) < \infty$, *pues* $K = \lambda I$ *sobre* $\mathcal{N}(\lambda)$.
- $\mathcal{N}(\lambda) = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}\,(K - \lambda I) = E$. *Por tanto,* $\sigma_p(K) \setminus \{0\} = \sigma(K) \setminus \{0\}$ *!!.*

Corolario

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, K *compacto y* $r = \operatorname{ínf}_n \|K^n\|^{1/n} > 0$, *entonces*

$$r = \max\{|\lambda|;\, \lambda \in \sigma_p(K)\} = |\lambda_0| = \lim_n \|K^n\|^{1/n}.$$

Existe $\lambda_0 \in \sigma_p(K) \setminus \{0\}$ *y* $\dim \mathcal{N}(\lambda_0) < \infty$.

Caso de $K \in \mathcal{L}(E)$ compacto

$K \in \mathcal{L}(E)$ compacto $\Leftrightarrow \overline{K(B_E)}$ compacto, o sea,

$$\|x_n\| \leq M \Rightarrow \exists\{x_{n_k}\} \text{ convergente}$$

Si $K = I \Rightarrow \dim E < \infty$ y $E \equiv \mathbb{K}^n$ (B_E compacta $\Rightarrow \dim E = n < \infty$ y $E \equiv \mathbb{K}^n$).

Teorema

Si $\lambda \neq 0$,

- $\dim \mathcal{N}(\lambda) < \infty$, *pues* $K = \lambda I$ *sobre* $\mathcal{N}(\lambda)$.
- $\mathcal{N}(\lambda) = 0 \Rightarrow \operatorname{Im}(K - \lambda I) = E$. *Por tanto,* $\sigma_p(K) \setminus \{0\} = \sigma(K) \setminus \{0\}$ *!!.*

Corolario

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, K *compacto y* $r = \inf_n \|K^n\|^{1/n} > 0$, *entonces*

$$r = \max\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma_p(K)\} = |\lambda_0| = \lim_n \|K^n\|^{1/n}.$$

Existe $\lambda_0 \in \sigma_p(K) \setminus \{0\}$ *y* $\dim \mathcal{N}(\lambda_0) < \infty$.

Caso de $K \in \mathcal{L}(E)$ compacto

$K \in \mathcal{L}(E)$ compacto $\Leftrightarrow \overline{K(B_E)}$ compacto, o sea,

$$\|x_n\| \leq M \Rightarrow \exists \{x_{n_k}\} \text{ convergente}$$

Si $K = I \Rightarrow \dim E < \infty$ y $E \equiv \mathbb{K}^n$ (B_E compacta $\Rightarrow \dim E = n < \infty$ y $E \equiv \mathbb{K}^n$).

Teorema

Si $\lambda \neq 0$,

- $\dim \mathcal{N}(\lambda) < \infty$, *pues* $K = \lambda I$ *sobre* $\mathcal{N}(\lambda)$.
- $\mathcal{N}(\lambda) = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}\,(K - \lambda I) = E$. *Por tanto,* $\sigma_p(K) \setminus \{0\} = \sigma(K) \setminus \{0\}$ *!!.*

Corolario

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, K *compacto y* $r = \inf_n \|K^n\|^{1/n} > 0$, *entonces*

$$r = \max\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma_p(K)\} = |\lambda_0| = \lim_n \|K^n\|^{1/n}.$$

Existe $\lambda_0 \in \sigma_p(K) \setminus \{0\}$ *y* $\dim \mathcal{N}(\lambda_0) < \infty$.

Caso de $K \in \mathcal{L}(E)$ compacto

$K \in \mathcal{L}(E)$ compacto $\Leftrightarrow \overline{K(B_E)}$ compacto, o sea,

$$\|x_n\| \leq M \Rightarrow \exists \{x_{n_k}\} \text{ convergente}$$

Si $K = I \Rightarrow \dim E < \infty$ y $E \equiv \mathbb{K}^n$ (B_E compacta $\Rightarrow \dim E = n < \infty$ y $E \equiv \mathbb{K}^n$).

Teorema

Si $\lambda \neq 0$,

- $\dim \mathcal{N}(\lambda) < \infty$, *pues* $K = \lambda I$ *sobre* $\mathcal{N}(\lambda)$.
- $\mathcal{N}(\lambda) = 0 \Rightarrow \operatorname{Im}(K - \lambda I) = E$. *Por tanto,* $\sigma_p(K) \setminus \{0\} = \sigma(K) \setminus \{0\}$*!!.*

Corolario

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, K *compacto y* $r = \inf_n \|K^n\|^{1/n} > 0$, *entonces*

$$r = \max\{|\lambda|; \lambda \in \sigma_p(K)\} = |\lambda_0| = \lim_n \|K^n\|^{1/n}.$$

Existe $\lambda_0 \in \sigma_p(K) \setminus \{0\}$ *y* $\dim \mathcal{N}(\lambda_0) < \infty$.

Caso de $K \in \mathcal{L}(E)$ compacto

$K \in \mathcal{L}(E)$ compacto $\Leftrightarrow \overline{K(B_E)}$ compacto, o sea,

$$\|x_n\| \leq M \Rightarrow \exists\{x_{n_k}\} \text{ convergente}$$

Si $K = I \Rightarrow \dim E < \infty$ y $E \equiv \mathbb{K}^n$ (B_E compacta $\Rightarrow \dim E = n < \infty$ y $E \equiv \mathbb{K}^n$).

Teorema

Si $\lambda \neq 0$,

- $\dim \mathcal{N}(\lambda) < \infty$, *pues* $K = \lambda I$ *sobre* $\mathcal{N}(\lambda)$.
- $\mathcal{N}(\lambda) = 0 \Rightarrow \operatorname{Im}(K - \lambda I) = E$. *Por tanto,* $\sigma_p(K) \setminus \{0\} = \sigma(K) \setminus \{0\}$*!!.*

Corolario

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, K *compacto y* $r = \inf_n \|K^n\|^{1/n} > 0$, *entonces*

$$r = \max\{|\lambda|; \lambda \in \sigma_p(K)\} = |\lambda_0| = \lim_n \|K^n\|^{1/n}.$$

Existe $\lambda_0 \in \sigma_p(K) \setminus \{0\}$ *y* $\dim \mathcal{N}(\lambda_0) < \infty$.

Caso de $K \in \mathcal{L}(E)$ compacto

$K \in \mathcal{L}(E)$ compacto $\Leftrightarrow \overline{K(B_E)}$ compacto, o sea,

$$\|x_n\| \leq M \Rightarrow \exists \{x_{n_k}\} \text{ convergente}$$

Si $K = I \Rightarrow \dim E < \infty$ y $E \equiv \mathbb{K}^n$ (B_E compacta $\Rightarrow \dim E = n < \infty$ y $E \equiv \mathbb{K}^n$).

Teorema

Si $\lambda \neq 0$,

- $\dim \mathcal{N}(\lambda) < \infty$, *pues* $K = \lambda I$ *sobre* $\mathcal{N}(\lambda)$.
- $\mathcal{N}(\lambda) = 0 \Rightarrow \operatorname{Im}(K - \lambda I) = E$. *Por tanto,* $\sigma_p(K) \setminus \{0\} = \sigma(K) \setminus \{0\}$*!!.*

Corolario

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, K *compacto y* $r = \inf_n \|K^n\|^{1/n} > 0$, *entonces*

$$r = \max\{|\lambda|; \lambda \in \sigma_p(K)\} = |\lambda_0| = \lim_n \|K^n\|^{1/n}.$$

Existe $\lambda_0 \in \sigma_p(K) \setminus \{0\}$ *y* $\dim \mathcal{N}(\lambda_0) < \infty$.

Caso de $K \in \mathcal{L}(E)$ compacto

$K \in \mathcal{L}(E)$ compacto $\Leftrightarrow \overline{K(B_E)}$ compacto, o sea,

$$\|x_n\| \leq M \Rightarrow \exists \{x_{n_k}\} \text{ convergente}$$

Si $K = I \Rightarrow \dim E < \infty$ y $E \equiv \mathbb{K}^n$ (B_E compacta $\Rightarrow \dim E = n < \infty$ y $E \equiv \mathbb{K}^n$).

Teorema

Si $\lambda \neq 0$,

- $\dim \mathcal{N}(\lambda) < \infty$, *pues* $K = \lambda I$ *sobre* $\mathcal{N}(\lambda)$.
- $\mathcal{N}(\lambda) = 0 \Rightarrow \operatorname{Im}(K - \lambda I) = E$. *Por tanto,* $\sigma_p(K) \setminus \{0\} = \sigma(K) \setminus \{0\}$*!!*.

Corolario

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, K *compacto y* $r = \inf_n \|K^n\|^{1/n} > 0$, *entonces*

$$r = \max\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma_p(K)\} = |\lambda_0| = \lim_n \|K^n\|^{1/n}.$$

Existe $\lambda_0 \in \sigma_p(K) \setminus \{0\}$ *y* $\dim \mathcal{N}(\lambda_0) < \infty$.

LOMONOSOV

Subespacios T-hiperinvariantes

Si $\dim E = \infty$ y $\lambda \in \sigma_p(T)$, valor propio de T, $\mathcal{N}(\lambda) := \mathrm{Nuc}\,(T - \lambda I)$ subespacio T-invariante; sobre él, $T = \lambda I$.

- $\mathcal{N}(\lambda)$ también es A-invariante para todo $A \in \mathcal{L}(E)$ tal que $AT = TA$.
- Se dice que F es hiperinvariante para T si es A-invariante para todo $A \in \mathcal{L}(E)$ tal que $AT = TA$.
- Notación: $\{T\}' := \{A;\ AT = TA\}$, y F hiperinvariante significa que es $\{T\}'$−invariante.
- Hay subespacio hiperinvariante F si y sólo si

$$\overline{\{T\}'(x)} = \overline{\{Ax;\ AT = TA\}} \neq E$$

para algún $x \neq 0$ ($F = \overline{\{T\}'(x)}$):

- Si $F := \overline{\{T\}'(x)}$ y $A \in \{T\}'$, para todo Sx con $S \in \{T\}'$ se tiene $ASx \in F$ ya que $AS \in \{T\}'$.
- $F := \overline{\{T\}'(x)} \neq E$ con $x \neq 0$, se tiene $x \in F$ y F es no trivial. Inversamente,
- F $\{T\}'$−invariante y $0 \neq x \in F \Rightarrow \overline{\{T\}'(x)} \subset F$ no trivial.

Subespacios T-hiperinvariantes

Si $\dim E = \infty$ y $\lambda \in \sigma_p(T)$, valor propio de T, $\mathcal{N}(\lambda) := \mathrm{Nuc}\,(T - \lambda I)$ subespacio T-invariante; sobre él, $T = \lambda I$.

- $\mathcal{N}(\lambda)$ también es A-invariante para todo $A \in \mathcal{L}(E)$ tal que $AT = TA$.
- Se dice que F es hiperinvariante para T si es A-invariante para todo $A \in \mathcal{L}(E)$ tal que $AT = TA$.
- Notación: $\{T\}' := \{A;\ AT = TA\}$, y F hiperinvariante significa que es $\{T\}'-$invariante.
- Hay subespacio hiperinvariante F si y sólo si

$$\overline{\{T\}'(x)} = \overline{\{Ax;\ AT = TA\}} \neq E$$

para algún $x \neq 0$ ($F = \overline{\{T\}'(x)}$):

- Si $F = \overline{\{T\}'(x)}$ y $A \in \{T\}'$, para todo Sx con $S \in \{T\}'$ se tiene $ASx \in F$ ya que $AS \in \{T\}'$.
- $F = \overline{\{T\}'(x)} \neq E$ con $x \neq 0$, se tiene $x \in F$ y F es no trivial. Inversamente,
- F $\{T\}'-$invariante y $0 \neq x \in F \to \overline{\{T\}'(x)} \subset F$ no trivial.

Subespacios T-hiperinvariantes

Si $\dim E = \infty$ y $\lambda \in \sigma_p(T)$, valor propio de T, $\mathcal{N}(\lambda) := \mathrm{Nuc}\,(T - \lambda I)$ subespacio T-invariante; sobre él, $T = \lambda I$.

- $\mathcal{N}(\lambda)$ también es A-invariante para todo $A \in \mathcal{L}(E)$ tal que $AT = TA$.
- Se dice que F es hiperinvariante para T si es A-invariante para todo $A \in \mathcal{L}(E)$ tal que $AT = TA$.
- Notación: $\{T\}' := \{A;\ AT = TA\}$, y F hiperinvariante significa que es $\{T\}'$−invariante.
- Hay subespacio hiperinvariante F si y sólo si

$$\overline{\{T\}'(x)} = \overline{\{Ax;\ AT = TA\}} \neq E$$

para algún $x \neq 0$ $(F = \overline{\{T\}'(x)})$:

- Si $F = \overline{\{T\}'(x)}$ y $A \in \{T\}'$, para todo Sx con $S \in \{T\}'$ se tiene $ASx \in F$ ya que $AS \in \{T\}'$.
- $F = \overline{\{T\}'(x)} \neq E$ con $x \neq 0$, se tiene $x \in F$ y F es no trivial. Inversamente,
- F $\{T\}'$−invariante y $0 \neq x \in F \Rightarrow \overline{\{T\}'(x)} \subset F$ no trivial.

Subespacios T-hiperinvariantes

Si $\dim E = \infty$ y $\lambda \in \sigma_p(T)$, valor propio de T, $\mathcal{N}(\lambda) := \operatorname{Nuc}(T - \lambda I)$ subespacio T-invariante; sobre él, $T = \lambda I$.

- $\mathcal{N}(\lambda)$ también es A-invariante para todo $A \in \mathcal{L}(E)$ tal que $AT = TA$.
- Se dice que F es hiperinvariante para T si es A-invariante para todo $A \in \mathcal{L}(E)$ tal que $AT = TA$.
- Notación: $\{T\}' := \{A;\ AT = TA\}$, y F hiperinvariante significa que es $\{T\}'$−invariante.
- Hay subespacio hiperinvariante F si y sólo si

$$\overline{\{T\}'(x)} = \overline{\{Ax;\ AT = TA\}} \neq E$$

para algún $x \neq 0$ ($F = \overline{\{T\}'(x)}$):

- Si $F = \overline{\{T\}'(x)}$ y $A \in \{T\}'$, para todo Sx con $S \in \{T\}'$ se tiene $ASx \in F$ ya que $AS \in \{T\}'$.
- $F = \overline{\{T\}'(x)} \neq E$ con $x \neq 0$, se tiene $x \in F$ y F es no trivial. Inversamente,
- F $\{T\}'$−invariante y $0 \neq x \in F \Rightarrow \overline{\{T\}'(x)} \subset F$ no trivial.

Subespacios T-hiperinvariantes

Si $\dim E = \infty$ y $\lambda \in \sigma_p(T)$, valor propio de T, $\mathcal{N}(\lambda) := \operatorname{Nuc}(T - \lambda I)$ subespacio T-invariante; sobre él, $T = \lambda I$.

- $\mathcal{N}(\lambda)$ también es A-invariante para todo $A \in \mathcal{L}(E)$ tal que $AT = TA$.
- Se dice que F es hiperinvariante para T si es A-invariante para todo $A \in \mathcal{L}(E)$ tal que $AT = TA$.
- Notación: $\{T\}' := \{A;\ AT = TA\}$, y F hiperinvariante significa que es $\{T\}'-$invariante.

Subespacios T-hiperinvariantes

Si $\dim E = \infty$ y $\lambda \in \sigma_p(T)$, valor propio de T, $\mathcal{N}(\lambda) := \mathrm{Nuc}\,(T - \lambda I)$ subespacio T-invariante; sobre él, $T = \lambda I$.

- $\mathcal{N}(\lambda)$ también es A-invariante para todo $A \in \mathcal{L}(E)$ tal que $AT = TA$.
- Se dice que F es hiperinvariante para T si es A-invariante para todo $A \in \mathcal{L}(E)$ tal que $AT = TA$.
- Notación: $\{T\}' := \{A;\ AT = TA\}$, y F hiperinvariante significa que es $\{T\}'-$invariante.
- Hay subespacio hiperinvariante F si y sólo si

$$\overline{\{T\}'(x)} = \overline{\{Ax;\ AT = TA\}} \neq E$$

para algún $x \neq 0$ ($F = \overline{\{T\}'(x)}$):

◂ hiperinvariante

- Si $F := \overline{\{T\}'(x)}$ y $A \in \{T\}'$, para todo Sx con $S \in \{T\}'$ se tiene $ASx \in F$ ya que $AS \in \{T\}'$.
- $F := \overline{\{T\}'(x)} \neq E$ con $x \neq 0$, se tiene $x \in F$ y F es no trivial. Inversamente,
- F $\{T\}'-$invariante y $0 \neq x \in F \Rightarrow \overline{\{T\}'(x)} \subset F$ no trivial.

Subespacios T-hiperinvariantes

Si $\dim E = \infty$ y $\lambda \in \sigma_p(T)$, valor propio de T, $\mathcal{N}(\lambda) := \operatorname{Nuc}(T - \lambda I)$ subespacio T-invariante; sobre él, $T = \lambda I$.

- $\mathcal{N}(\lambda)$ también es A-invariante para todo $A \in \mathcal{L}(E)$ tal que $AT = TA$.
- Se dice que F es hiperinvariante para T si es A-invariante para todo $A \in \mathcal{L}(E)$ tal que $AT = TA$.
- Notación: $\{T\}' := \{A;\ AT = TA\}$, y F hiperinvariante significa que es $\{T\}'-$invariante.
- Hay subespacio hiperinvariante F si y sólo si

$$\overline{\{T\}'(x)} = \overline{\{Ax;\ AT = TA\}} \neq E$$

para algún $x \neq 0$ ($F = \overline{\{T\}'(x)}$):

hiperinvariante

- Si $F := \overline{\{T\}'(x)}$ y $A \in \{T\}'$, para todo Sx con $S \in \{T\}'$ se tiene $ASx \in F$ ya que $AS \in \{T\}'$.
- $F := \overline{\{T\}'(x)} \neq E$ con $x \neq 0$, se tiene $x \in F$ y F es no trivial. Inversamente,
- F $\{T\}'-$invariante y $0 \neq x \in F \Rightarrow \overline{\{T\}'(x)} \subset F$ no trivial.

Subespacios T-hiperinvariantes

Si $\dim E = \infty$ y $\lambda \in \sigma_p(T)$, valor propio de T, $\mathcal{N}(\lambda) := \operatorname{Nuc}(T - \lambda I)$ subespacio T-invariante; sobre él, $T = \lambda I$.

- $\mathcal{N}(\lambda)$ también es A-invariante para todo $A \in \mathcal{L}(E)$ tal que $AT = TA$.
- Se dice que F es hiperinvariante para T si es A-invariante para todo $A \in \mathcal{L}(E)$ tal que $AT = TA$.
- Notación: $\{T\}' := \{A;\ AT = TA\}$, y F hiperinvariante significa que es $\{T\}'-$invariante.
- Hay subespacio hiperinvariante F si y sólo si

$$\overline{\{T\}'(x)} = \overline{\{Ax;\ AT = TA\}} \neq E$$

para algún $x \neq 0$ ($F = \overline{\{T\}'(x)}$):

hiperinvariante

  - Si $F := \overline{\{T\}'(x)}$ y $A \in \{T\}'$, para todo Sx con $S \in \{T\}'$ se tiene $ASx \in F$ ya que $AS \in \{T\}'$.
  - $F := \overline{\{T\}'(x)} \neq E$ con $x \neq 0$, se tiene $x \in F$ y F es no trivial. Inversamente,
  - F $\{T\}'-$invariante y $0 \neq x \in F \Rightarrow \overline{\{T\}'(x)} \subset F$ no trivial.

Subespacios T-hiperinvariantes

Si $\dim E = \infty$ y $\lambda \in \sigma_p(T)$, valor propio de T, $\mathcal{N}(\lambda) := \mathrm{Nuc}\,(T - \lambda I)$ subespacio T-invariante; sobre él, $T = \lambda I$.

- $\mathcal{N}(\lambda)$ también es A-invariante para todo $A \in \mathcal{L}(E)$ tal que $AT = TA$.
- Se dice que F es hiperinvariante para T si es A-invariante para todo $A \in \mathcal{L}(E)$ tal que $AT = TA$.
- Notación: $\{T\}' := \{A;\ AT = TA\}$, y F hiperinvariante significa que es $\{T\}'-$invariante.
- Hay subespacio hiperinvariante F si y sólo si

$$\overline{\{T\}'(x)} = \overline{\{Ax;\ AT = TA\}} \neq E$$

para algún $x \neq 0$ ($F = \overline{\{T\}'(x)}$):

hiperinvariante

  - Si $F := \overline{\{T\}'(x)}$ y $A \in \{T\}'$, para todo Sx con $S \in \{T\}'$ se tiene $ASx \in F$ ya que $AS \in \{T\}'$.
  - $F := \overline{\{T\}'(x)} \neq E$ con $x \neq 0$, se tiene $x \in F$ y F es no trivial. Inversamente,
  - F $\{T\}'-$invariante y $0 \neq x \in F \Rightarrow \overline{\{T\}'(x)} \subset F$ no trivial.

Subespacios T-hiperinvariantes

Si $\dim E = \infty$ y $\lambda \in \sigma_p(T)$, valor propio de T, $\mathcal{N}(\lambda) := \operatorname{Nuc}(T - \lambda I)$ subespacio T-invariante; sobre él, $T = \lambda I$.

- $\mathcal{N}(\lambda)$ también es A-invariante para todo $A \in \mathcal{L}(E)$ tal que $AT = TA$.
- Se dice que F es hiperinvariante para T si es A-invariante para todo $A \in \mathcal{L}(E)$ tal que $AT = TA$.
- Notación: $\{T\}' := \{A;\ AT = TA\}$, y F hiperinvariante significa que es $\{T\}'-$invariante.
- Hay subespacio hiperinvariante F si y sólo si

$$\overline{\{T\}'(x)} = \overline{\{Ax;\ AT = TA\}} \neq E$$

para algún $x \neq 0$ ($F = \overline{\{T\}'(x)}$):

hiperinvariante

  - Si $F := \overline{\{T\}'(x)}$ y $A \in \{T\}'$, para todo Sx con $S \in \{T\}'$ se tiene $ASx \in F$ ya que $AS \in \{T\}'$.
  - $F := \overline{\{T\}'(x)} \neq E$ con $x \neq 0$, se tiene $x \in F$ y F es no trivial. Inversamente,
  - F $\{T\}'-$invariante y $0 \neq x \in F \Rightarrow \overline{\{T\}'(x)} \subset F$ no trivial.

Viktor Lomonosov

- Viktor Lomonosov (1973): todo T que conmuta con algún operador compacto no nulo tiene subespacio invariante (usando el teorema del punto fijo).
- Prueba simple sin usar punto fijo (Hilden).
- El método de Lomonosov se aplica a más operadores: si E complejo, existe subespacio hiperinvariante para todo T que conmuta con un operador no escalar ($\neq \lambda I$) que conmuta con un operador compacto (T de Lomonosov).
- El caso real es especial.

Viktor Lomonosov

- Viktor Lomonosov (1973): todo T que conmuta con algún operador compacto no nulo tiene subespacio invariante (usando el teorema del punto fijo).
- Prueba simple sin usar punto fijo (Hilden).
- El método de Lomonosov se aplica a más operadores: si E complejo, existe subespacio hiperinvariante para todo T que conmuta con un operador no escalar ($\neq \lambda I$) que conmuta con un operador compacto (T de Lomonosov).
- El caso real es especial.

Viktor Lomonosov

- Viktor Lomonosov (1973): todo T que conmuta con algún operador compacto no nulo tiene subespacio invariante (usando el teorema del punto fijo).
- Prueba simple sin usar punto fijo (Hilden).
- El método de Lomonosov se aplica a más operadores: si E complejo, existe subespacio hiperinvariante para todo T que conmuta con un operador no escalar ($\neq \lambda I$) que conmuta con un operador compacto (T de Lomonosov).
- El caso real es especial.

Viktor Lomonosov

- Viktor Lomonosov (1973): todo T que conmuta con algún operador compacto no nulo tiene subespacio invariante (usando el teorema del punto fijo).
- Prueba simple sin usar punto fijo (Hilden).
- El método de Lomonosov se aplica a más operadores: si E complejo, existe subespacio hiperinvariante para todo T que conmuta con un operador no escalar ($\neq \lambda I$) que conmuta con un operador compacto (T de Lomonosov).
- El caso real es especial.

Viktor Lomonosov

- Viktor Lomonosov (1973): todo T que conmuta con algún operador compacto no nulo tiene subespacio invariante (usando el teorema del punto fijo).
- Prueba simple sin usar punto fijo (Hilden).
- El método de Lomonosov se aplica a más operadores: si E complejo, existe subespacio hiperinvariante para todo T que conmuta con un operador no escalar ($\neq \lambda I$) que conmuta con un operador compacto (T de Lomonosov).
- El caso real es especial.

Von Neumann-Aronszajn-Smith-Lomonosov (E real o complejo)

Teorema

Todo $K \in \mathcal{L}(E)$ compacto no nulo tiene subespacio hiperinvariante.

Caso $\lim_{n\to\infty} \|K^n\|^{1/n} = \inf_n \|K^n\|^{1/n} > 0$.

- E complejo: existe $0 \neq \lambda \in \sigma(K)$ $(r > 0) \Rightarrow \lambda$ valor propio y $\mathcal{N}(\lambda)$ es hiperinvariante (de dimensión finita).
- E real:
  $K_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$ es compacto y $\inf_n \|K_{\mathbb{C}}^n\|^{1/n} = \inf_n \|K^n\|^{1/n} > 0 \Rightarrow$
  $\exists \mathcal{N}_{K_{\mathbb{C}}}(\lambda) = [x_1 + \imath y_1, \ldots, x_n + \imath y_n]$ hiperinvariante, con $A_{\mathbb{C}} K_{\mathbb{C}} = K_{\mathbb{C}} A_{\mathbb{C}}$
  si $A \in \{K\}' \Rightarrow F := [x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n] \subset E$ es $\{K\}'$-invariante.

Von Neumann-Aronszajn-Smith-Lomonosov (E real o complejo)

Teorema

Todo $K \in \mathcal{L}(E)$ compacto no nulo tiene subespacio hiperinvariante.

Caso $\lim_{n\to\infty} \|K^n\|^{1/n} = \inf_n \|K^n\|^{1/n} > 0$.

- E complejo: existe $0 \neq \lambda \in \sigma(K)$ $(r > 0) \Rightarrow \lambda$ valor propio y $\mathcal{N}(\lambda)$ es hiperinvariante (de dimensión finita).
- E real:
  $K_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$ es compacto y $\inf_n \|K_{\mathbb{C}}^n\|^{1/n} = \inf_n \|K^n\|^{1/n} > 0 \Rightarrow$ $\exists \mathcal{N}_{K_C}(\lambda) = [x_1 + \imath y_1, \ldots, x_n + \imath y_n]$ hiperinvariante, con $A_{\mathbb{C}} K_{\mathbb{C}} = K_{\mathbb{C}} A_{\mathbb{C}}$ si $A \in \{K\}' \Rightarrow F := [x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n] \subset E$ es $\{K\}'$-invariante.

Von Neumann-Aronszajn-Smith-Lomonosov (E real o complejo)

Teorema

Todo $K \in \mathcal{L}(E)$ compacto no nulo tiene subespacio hiperinvariante.

Caso $\lim_{n\to\infty} \|K^n\|^{1/n} = \inf_n \|K^n\|^{1/n} > 0$.

- E complejo: existe $0 \neq \lambda \in \sigma(K)$ $(r > 0) \Rightarrow \lambda$ valor propio y $\mathcal{N}(\lambda)$ es hiperinvariante (de dimensión finita).
- E real:
  $K_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$ es compacto y $\inf_n \|K_{\mathbb{C}}^n\|^{1/n} = \inf_n \|K^n\|^{1/n} > 0 \Rightarrow$
  $\exists \mathcal{N}_{K_C}(\lambda) = [x_1 + \imath y_1, \ldots, x_n + \imath y_n]$ hiperinvariante, con $A_{\mathbb{C}} K_{\mathbb{C}} = K_{\mathbb{C}} A_{\mathbb{C}}$
  si $A \in \{K\}' \Rightarrow F := [x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n] \subset E$ es $\{K\}'$-invariante.

Von Neumann-Aronszajn-Smith-Lomonosov (E real o complejo)

Teorema

Todo $K \in \mathcal{L}(E)$ compacto no nulo tiene subespacio hiperinvariante.

Caso $\lim_{n\to\infty} \|K^n\|^{1/n} = \inf_n \|K^n\|^{1/n} > 0$.

- E complejo: existe $0 \neq \lambda \in \sigma(K)$ $(r > 0) \Rightarrow \lambda$ valor propio y $\mathcal{N}(\lambda)$ es hiperinvariante (de dimensión finita).
- E real:
  $K_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$ es compacto y $\inf_n \|K_{\mathbb{C}}^n\|^{1/n} = \inf_n \|K^n\|^{1/n} > 0 \Rightarrow$
  $\exists \mathcal{N}_{K_C}(\lambda) = [x_1 + \imath y_1, \ldots, x_n + \imath y_n]$ hiperinvariante, con $A_{\mathbb{C}} K_{\mathbb{C}} = K_{\mathbb{C}} A_{\mathbb{C}}$
  si $A \in \{K\}' \Rightarrow F := [x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n] \subset E$ es $\{K\}'$-invariante.

Von Neumann-Aronszajn-Smith-Lomonosov (E real o complejo)

Teorema

Todo $K \in \mathcal{L}(E)$ compacto no nulo tiene subespacio hiperinvariante.

Caso $\lim_{n\to\infty} \|K^n\|^{1/n} = \inf_n \|K^n\|^{1/n} > 0$.

- E complejo: existe $0 \neq \lambda \in \sigma(K)$ $(r > 0) \Rightarrow \lambda$ valor propio y $\mathcal{N}(\lambda)$ es hiperinvariante (de dimensión finita).
- E real:
  $K_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$ es compacto y $\inf_n \|K_{\mathbb{C}}^n\|^{1/n} = \inf_n \|K^n\|^{1/n} > 0 \Rightarrow$
  $\exists \mathcal{N}_{K_C}(\lambda) = [x_1 + \imath y_1, \ldots, x_n + \imath y_n]$ hiperinvariante, con $A_{\mathbb{C}} K_{\mathbb{C}} = K_{\mathbb{C}} A_{\mathbb{C}}$
  si $A \in \{K\}' \Rightarrow F := [x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n] \subset E$ es $\{K\}'$-invariante.

Von Neumann-Aronszajn-Smith-Lomonosov (caso $r = 0$)

Teorema

Todo $K \in \mathcal{L}(E)$ compacto o nulo tiene subespacio hiperinvariante.

Caso $\lim_{n\to\infty} \|K^n\|^{1/n} = \inf_n \|K^n\|^{1/n} = 0$.

- Se puede suponer $\|K\| = 1$
- Ad abs. suponer $\overline{\{K\}'(x)} = E$ para todo $x \neq 0$
- $\exists \|x_0\| > 1$ con $\|Kx_0\| > 1$ $(\|K\| = 1) \Rightarrow 0 \notin B(x_0) = \{x; \|x - x_0\| \leq 1\}$ y $0 \notin \overline{K(B(x_0))}$.
- $\overline{\{K\}'(x)} = E \Rightarrow \exists A \in \{K\}'$ t.q. $\|Ax - x_0\| < 1$.
- $\overline{K(B(x_0))} \subset E \setminus \{0\} \subset \bigcup_{A \in \{K\}'} \{x \in E; \|Ax - x_0\| < 1\}$, con $\overline{K(B(x_0))}$ compacto.

hiperinvariante1

Von Neumann-Aronszajn-Smith-Lomonosov (caso $r = 0$)

Teorema

Todo $K \in \mathcal{L}(E)$ compacto o nulo tiene subespacio hiperinvariante.

Caso $\lim_{n\to\infty} \|K^n\|^{1/n} = \inf_n \|K^n\|^{1/n} = 0$.

- Se puede suponer $\|K\| = 1$
- Ad abs. suponer $\overline{\{K\}'(x)} = E$ para todo $x \neq 0$
- $\exists \|x_0\| > 1$ con $\|Kx_0\| > 1$ ($\|K\| = 1$) $\Rightarrow 0 \notin B(x_0) = \{x; \|x - x_0\| \leq 1\}$ y $0 \notin \overline{K(B(x_0))}$.
- $\overline{\{K\}'(x)} = E \Rightarrow \exists A \in \{K\}'$ t.q. $\|Ax - x_0\| < 1$.
- $\overline{K(B(x_0))} \subset E \setminus \{0\} \subset \bigcup_{A\in\{K\}'} \{x \in E; \|Ax - x_0\| < 1\}$, con $\overline{K(B(x_0))}$ compacto.

hiperinvariante1

Von Neumann-Aronszajn-Smith-Lomonosov (caso $r = 0$)

Teorema

Todo $K \in \mathcal{L}(E)$ compacto o nulo tiene subespacio hiperinvariante.

Caso $\lim_{n\to\infty} \|K^n\|^{1/n} = \inf_n \|K^n\|^{1/n} = 0$.

- Se puede suponer $\|K\| = 1$
- Ad abs. suponer $\overline{\{K\}'(x)} = E$ para todo $x \neq 0$
- $\exists \|x_0\| > 1$ con $\|Kx_0\| > 1$ ($\|K\| = 1$) $\Rightarrow 0 \notin B(x_0) = \{x; \|x - x_0\| \leq 1\}$ y $0 \notin \overline{K(B(x_0))}$.
- $\overline{\{K\}'(x)} = E \Rightarrow \exists A \in \{K\}'$ t.q. $\|Ax - x_0\| < 1$.
- $\overline{K(B(x_0))} \subset E \setminus \{0\} \subset \bigcup_{A\in\{K\}'} \{x \in E; \|Ax - x_0\| < 1\}$, con $\overline{K(B(x_0))}$ compacto.

hiperinvariante1

Teorema

Todo $K \in \mathcal{L}(E)$ compacto o nulo tiene subespacio hiperinvariante.

Caso $\lim_{n\to\infty} \|K^n\|^{1/n} = \inf_n \|K^n\|^{1/n} = 0$.

- Se puede suponer $\|K\| = 1$
- Ad abs. suponer $\overline{\{K\}'(x)} = E$ para todo $x \neq 0$
- $\exists \|x_0\| > 1$ con $\|Kx_0\| > 1$ ($\|K\| = 1$) $\Rightarrow 0 \notin B(x_0) = \{x;\ \|x - x_0\| \leq 1\}$ y $0 \notin \overline{K(B(x_0))}$.
- $\overline{\{K\}'(x)} = E \Rightarrow \exists A \in \{K\}'$ t.q. $\|Ax - x_0\| < 1$.
- $\overline{K(B(x_0))} \subset E \setminus \{0\} \subset \bigcup_{A\in\{K\}'} \{x \in E;\ \|Ax - x_0\| < 1\}$, con $\overline{K(B(x_0))}$ compacto.

hiperinvariante1

Von Neumann-Aronszajn-Smith-Lomonosov (caso $r = 0$)

Teorema

Todo $K \in \mathcal{L}(E)$ compacto o nulo tiene subespacio hiperinvariante.

Caso $\lim_{n\to\infty} \|K^n\|^{1/n} = \inf_n \|K^n\|^{1/n} = 0$.

- Se puede suponer $\|K\| = 1$
- Ad abs. suponer $\overline{\{K\}'(x)} = E$ para todo $x \neq 0$
- $\exists \|x_0\| > 1$ con $\|Kx_0\| > 1$ $(\|K\| = 1) \Rightarrow 0 \notin B(x_0) = \{x; \|x - x_0\| \leq 1\}$ y $0 \notin \overline{K(B(x_0))}$.
- $\overline{\{K\}'(x)} = E \Rightarrow \exists A \in \{K\}'$ t.q. $\|Ax - x_0\| < 1$.
- $\overline{K(B(x_0))} \subset E \setminus \{0\} \subset \bigcup_{A \in \{K\}'} \{x \in E; \|Ax - x_0\| < 1\}$, con $\overline{K(B(x_0))}$ compacto.

hiperinvariante1

Von Neumann-Aronszajn-Smith-Lomonosov (caso $r = 0$)

Teorema

Todo $K \in \mathcal{L}(E)$ compacto o nulo tiene subespacio hiperinvariante.

Caso $\lim_{n\to\infty} \|K^n\|^{1/n} = \inf_n \|K^n\|^{1/n} = 0$.

- Se puede suponer $\|K\| = 1$
- Ad abs. suponer $\overline{\{K\}'(x)} = E$ para todo $x \neq 0$
- $\exists \|x_0\| > 1$ con $\|Kx_0\| > 1$ ($\|K\| = 1$) $\Rightarrow 0 \notin B(x_0) = \{x; \|x - x_0\| \leq 1\}$ y $0 \notin \overline{K(B(x_0))}$.
- $\overline{\{K\}'(x)} = E \Rightarrow \exists A \in \{K\}'$ t.q. $\|Ax - x_0\| < 1$.
- $\overline{K(B(x_0))} \subset E \setminus \{0\} \subset \bigcup_{A\in\{K\}'} \{x \in E; \|Ax - x_0\| < 1\}$, con $\overline{K(B(x_0))}$ compacto.

▸ hiperinvariante1

Continuación

- $\overline{K(B(x_0))} \subset \bigcup_{n=1}^{N} \{x;\ \|A_n x - x_0\| < 1\}$, $c := \max_{1\le n\le N} \|A_n\|$
- $Kx_0 \in K(B(x_0)) \Rightarrow Kx_0 \in \{x;\ \|A_{n_1}x - x_0\| < 1\}$
- $x_1 := A_{n_1}Kx_0 \in B(x_0) \Rightarrow x_2 := A_{n_2}Kx_1 \in B(x_0) \ldots$
- $x_{k+1} := A_{n_{k+1}}Kx_k \in B(x_0)$ y $A_nK = KA_n$.
- $x_{k+1} = A_{n_{k+1}} \cdots A_{n_1} K^{k+1} x_0 = (c^{-1}A_{n_{k+1}}) \cdots (c^{-1}A_{n_1})(cK)^{k+1} x_0$
- $\|K^n\|^{1/n} \to 0 \Rightarrow \|(cK)^n x_0\|^{1/n} \to 0$ con $\|c^{-1}A_n\| \le 1 \Rightarrow$ $B(x_0) \ni x_k \to 0$ con $B(x_0)$ cerrado, pero $0 \notin B(x_0)$??

$\exists \overline{\{K\}'(x)} \neq E$ con $x \neq 0$, hiperinvariante. □

Continuación

- $\overline{K(B(x_0))} \subset \bigcup_{n=1}^{N} \{x;\ \|A_n x - x_0\| < 1\}$, $c := \max_{1\leq n\leq N} \|A_n\|$
- $Kx_0 \in K(B(x_0)) \Rightarrow Kx_0 \in \{x;\ \|A_{n_1}x - x_0\| < 1\}$
- $x_1 := A_{n_1}Kx_0 \in B(x_0) \Rightarrow x_2 := A_{n_2}Kx_1 \in B(x_0) \ldots$
- $x_{k+1} := A_{n_{k+1}}Kx_k \in B(x_0)$ y $A_nK = KA_n$.
- $x_{k+1} = A_{n_{k+1}} \cdots A_{n_1}K^{k+1}x_0 = (c^{-1}A_{n_{k+1}}) \cdots (c^{-1}A_{n_1})(cK)^{k+1}x_0$
- $\|K^n\|^{1/n} \to 0 \Rightarrow \|(cK)^n x_0\|^{1/n} \to 0$ con $\|c^{-1}A_n\| \leq 1 \Rightarrow$ $B(x_0) \ni x_k \to 0$ con $B(x_0)$ cerrado, pero $0 \notin B(x_0)$??

$\exists\overline{\{K\}'(x)} \neq E$ con $x \neq 0$, hiperinvariante. $\square$

Continuación

- $\overline{K(B(x_0))} \subset \bigcup_{n=1}^{N} \{x;\ \|A_n x - x_0\| < 1\}$, $c := \max_{1\leq n\leq N} \|A_n\|$
- $Kx_0 \in K(B(x_0)) \Rightarrow Kx_0 \in \{x;\ \|A_{n_1}x - x_0\| < 1\}$
- $x_1 := A_{n_1}Kx_0 \in B(x_0) \Rightarrow x_2 := A_{n_2}Kx_1 \in B(x_0)\ \ldots$
- $x_{k+1} := A_{n_{k+1}}Kx_k \in B(x_0)$ y $A_nK = KA_n$.
- $x_{k+1} = A_{n_{k+1}} \cdots A_{n_1}K^{k+1}x_0 = (c^{-1}A_{n_{k+1}}) \cdots (c^{-1}A_{n_1})(cK)^{k+1}x_0$
- $\|K^n\|^{1/n} \to 0 \Rightarrow \|(cK)^n x_0\|^{1/n} \to 0$ con $\|c^{-1}A_n\| \leq 1 \Rightarrow$ $B(x_0) \ni x_k \to 0$ con $B(x_0)$ cerrado, pero $0 \notin B(x_0)$??

$\exists \overline{\{K\}'(x)} \neq E$ con $x \neq 0$, hiperinvariante. $\square$

Continuación

- $\overline{K(B(x_0))} \subset \bigcup_{n=1}^{N} \{x;\ \|A_n x - x_0\| < 1\}$, $c := \max_{1\leq n\leq N} \|A_n\|$
- $Kx_0 \in K(B(x_0)) \Rightarrow Kx_0 \in \{x;\ \|A_{n_1} x - x_0\| < 1\}$
- $x_1 := A_{n_1} K x_0 \in B(x_0) \Rightarrow x_2 := A_{n_2} K x_1 \in B(x_0)\ \ldots$
- $x_{k+1} := A_{n_{k+1}} K x_k \in B(x_0)$ y $A_n K = K A_n$.
- $x_{k+1} = A_{n_{k+1}} \cdots A_{n_1} K^{k+1} x_0 = (c^{-1} A_{n_{k+1}}) \cdots (c^{-1} A_{n_1}) (cK)^{k+1} x_0$
- $\|K^n\|^{1/n} \to 0 \Rightarrow \|(cK)^n x_0\|^{1/n} \to 0$ con $\|c^{-1} A_n\| \leq 1 \Rightarrow$ $B(x_0) \ni x_k \to 0$ con $B(x_0)$ cerrado, pero $0 \notin B(x_0)$??

$\exists \overline{\{K\}'(x)} \neq E$ con $x \neq 0$, hiperinvariante. $\square$

Continuación

- $\overline{K(B(x_0))} \subset \bigcup_{n=1}^{N} \{x;\ \|A_n x - x_0\| < 1\}$, $c := \text{máx}_{1 \le n \le N} \|A_n\|$
- $Kx_0 \in K(B(x_0)) \Rightarrow Kx_0 \in \{x;\ \|A_{n_1} x - x_0\| < 1\}$
- $x_1 := A_{n_1} K x_0 \in B(x_0) \Rightarrow x_2 := A_{n_2} K x_1 \in B(x_0)\ \ldots$
- $x_{k+1} := A_{n_{k+1}} K x_k \in B(x_0)$ y $A_n K = K A_n$.
- $x_{k+1} = A_{n_{k+1}} \cdots A_{n_1} K^{k+1} x_0 = (c^{-1} A_{n_{k+1}}) \cdots (c^{-1} A_{n_1})(cK)^{k+1} x_0$
- $\|K^n\|^{1/n} \to 0 \Rightarrow \|(cK)^n x_0\|^{1/n} \to 0$ con $\|c^{-1} A_n\| \le 1 \Rightarrow$ $B(x_0) \ni x_k \to 0$ con $B(x_0)$ cerrado, pero $0 \notin B(x_0)$??

$\exists \overline{\{K\}'(x)} \neq E$ con $x \neq 0$, hiperinvariante. $\square$

Continuación

- $\overline{K(B(x_0))} \subset \bigcup_{n=1}^{N} \{x;\ \|A_n x - x_0\| < 1\}$, $c := \max_{1 \le n \le N} \|A_n\|$
- $Kx_0 \in K(B(x_0)) \Rightarrow Kx_0 \in \{x;\ \|A_{n_1} x - x_0\| < 1\}$
- $x_1 := A_{n_1} K x_0 \in B(x_0) \Rightarrow x_2 := A_{n_2} K x_1 \in B(x_0) \ \ldots$
- $x_{k+1} := A_{n_{k+1}} K x_k \in B(x_0)$ y $A_n K = K A_n$.
- $x_{k+1} = A_{n_{k+1}} \cdots A_{n_1} K^{k+1} x_0 = (c^{-1} A_{n_{k+1}}) \cdots (c^{-1} A_{n_1}) (cK)^{k+1} x_0$
- $\|K^n\|^{1/n} \to 0 \Rightarrow \|(cK)^n x_0\|^{1/n} \to 0$ con $\|c^{-1} A_n\| \le 1 \Rightarrow$
  $B(x_0) \ni x_k \to 0$ con $B(x_0)$ cerrado, pero $0 \notin B(x_0)$??

$\exists \overline{\{K\}'(x)} \neq E$ con $x \neq 0$, hiperinvariante. $\square$

Continuación

- $\overline{K(B(x_0))} \subset \bigcup_{n=1}^{N} \{x;\ \|A_n x - x_0\| < 1\}$, $c := \max_{1 \le n \le N} \|A_n\|$
- $Kx_0 \in K(B(x_0)) \Rightarrow Kx_0 \in \{x;\ \|A_{n_1} x - x_0\| < 1\}$
- $x_1 := A_{n_1} K x_0 \in B(x_0) \Rightarrow x_2 := A_{n_2} K x_1 \in B(x_0)\ \ldots$
- $x_{k+1} := A_{n_{k+1}} K x_k \in B(x_0)$ y $A_n K = K A_n$.
- $x_{k+1} = A_{n_{k+1}} \cdots A_{n_1} K^{k+1} x_0 = (c^{-1} A_{n_{k+1}}) \cdots (c^{-1} A_{n_1})(cK)^{k+1} x_0$
- $\|K^n\|^{1/n} \to 0 \Rightarrow \|(cK)^n x_0\|^{1/n} \to 0$ con $\|c^{-1} A_n\| \le 1 \Rightarrow$ $B(x_0) \ni x_k \to 0$ con $B(x_0)$ cerrado, pero $0 \notin B(x_0)$??

$\exists \overline{\{K\}'(x)} \neq E$ con $x \neq 0$, hiperinvariante. $\square$

Continuación

- $\overline{K(B(x_0))} \subset \bigcup_{n=1}^{N} \{x;\ \|A_n x - x_0\| < 1\}$, $c := \text{máx}_{1\leq n\leq N} \|A_n\|$
- $Kx_0 \in K(B(x_0)) \Rightarrow Kx_0 \in \{x;\ \|A_{n_1}x - x_0\| < 1\}$
- $x_1 := A_{n_1}Kx_0 \in B(x_0) \Rightarrow x_2 := A_{n_2}Kx_1 \in B(x_0)\ \ldots$
- $x_{k+1} := A_{n_{k+1}}Kx_k \in B(x_0)$ y $A_nK = KA_n$.
- $x_{k+1} = A_{n_{k+1}} \cdots A_{n_1} K^{k+1} x_0 = (c^{-1}A_{n_{k+1}}) \cdots (c^{-1}A_{n_1})(cK)^{k+1}x_0$
- $\|K^n\|^{1/n} \to 0 \Rightarrow \|(cK)^n x_0\|^{1/n} \to 0$ con $\|c^{-1}A_n\| \leq 1 \Rightarrow$ $B(x_0) \ni x_k \to 0$ con $B(x_0)$ cerrado, pero $0 \notin B(x_0)$??

$\exists \overline{\{K\}'(x)} \neq E$ con $x \neq 0$, hiperinvariante. $\square$

MINIMAX

Minimax para una función de pagos $K : X \times Y \to \mathbb{R}$

Siempre

$$\sup_{y\in Y} \inf_{x\in X} K(x,y) \leq \inf_{x\in X} \sup_{y\in Y} K(x,y) :$$

- Fijados $\bar{y}$ y x, $K(x,\bar{y}) \leq \sup_{y\in Y} K(x,y)$
- $\inf_{x\in X} K(x,\bar{y}) \leq \inf_{x\in X} \sup_{y\in Y} K(x,y)$
- Así $\sup_{y\in Y} \inf_{x\in X} K(x,y) \leq \inf_{x\in X} \sup_{y\in Y} K(x,y)$.

Contraejemplo a la desigualdad inversa:

$$X = Y = [0,1], \quad K(x,x) = 1, \quad K(x,y) = 0 \quad \text{si } x \neq y$$

Teoremas minimax: Condiciones para que se cumpla la igualdad.

Minimax para una función de pagos $K : X \times Y \to \mathbb{R}$

Siempre

$$\sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} K(x,y) \leq \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} K(x,y) :$$

- Fijados $\bar{y}$ y x, $K(x,\bar{y}) \leq \sup_{y \in Y} K(x,y)$
- $\inf_{x \in X} K(x,\bar{y}) \leq \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} K(x,y)$
- Así $\sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} K(x,y) \leq \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} K(x,y)$.

Contraejemplo a la desigualdad inversa:

$$X = Y = [0,1], \quad K(x,x) = 1, \quad K(x,y) = 0 \quad \text{si } x \neq y$$

Teoremas minimax: Condiciones para que se cumpla la igualdad.

Minimax para una función de pagos $K : X \times Y \to \mathbb{R}$

Siempre

$$\sup_{y\in Y} \inf_{x\in X} K(x,y) \leq \inf_{x\in X} \sup_{y\in Y} K(x,y) :$$

- Fijados $\bar{y}$ y x, $K(x,\bar{y}) \leq \sup_{y\in Y} K(x,y)$
- $\inf_{x\in X} K(x,\bar{y}) \leq \inf_{x\in X} \sup_{y\in Y} K(x,y)$
- Así $\sup_{y\in Y} \inf_{x\in X} K(x,y) \leq \inf_{x\in X} \sup_{y\in Y} K(x,y)$.

Contraejemplo a la desigualdad inversa:

$$X = Y = [0,1], \quad K(x,x) = 1, \quad K(x,y) = 0 \quad \text{si } x \neq y$$

Teoremas minimax: Condiciones para que se cumpla la igualdad.

Minimax para una función de pagos $K : X \times Y \to \mathbb{R}$

Siempre

$$\sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} K(x,y) \leq \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} K(x,y) :$$

- Fijados $\bar{y}$ y x, $K(x,\bar{y}) \leq \sup_{y \in Y} K(x,y)$
- $\inf_{x \in X} K(x,\bar{y}) \leq \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} K(x,y)$
- Así $\sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} K(x,y) \leq \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} K(x,y)$.

Contraejemplo a la desigualdad inversa:

$$X = Y = [0,1], \quad K(x,x) = 1, \quad K(x,y) = 0 \quad \text{si } x \neq y$$

Teoremas minimax: Condiciones para que se cumpla la igualdad.

Minimax para una función de pagos $K : X \times Y \to \mathbb{R}$

Siempre

$$\sup_{y\in Y} \inf_{x\in X} K(x,y) \leq \inf_{x\in X} \sup_{y\in Y} K(x,y):$$

- Fijados $\bar{y}$ y x, $K(x,\bar{y}) \leq \sup_{y\in Y} K(x,y)$
- $\inf_{x\in X} K(x,\bar{y}) \leq \inf_{x\in X} \sup_{y\in Y} K(x,y)$
- Así $\sup_{y\in Y} \inf_{x\in X} K(x,y) \leq \inf_{x\in X} \sup_{y\in Y} K(x,y)$.

Contraejemplo a la desigualdad inversa:

$$X = Y = [0,1], \quad K(x,x) = 1, \quad K(x,y) = 0 \quad \text{si } x \neq y$$

Teoremas minimax: Condiciones para que se cumpla la igualdad.

Minimax para una función de pagos $K : X \times Y \to \mathbb{R}$

Siempre

$$\sup_{y\in Y} \inf_{x\in X} K(x,y) \leq \inf_{x\in X} \sup_{y\in Y} K(x,y) :$$

- Fijados $\bar{y}$ y x, $K(x,\bar{y}) \leq \sup_{y\in Y} K(x,y)$
- $\inf_{x\in X} K(x,\bar{y}) \leq \inf_{x\in X} \sup_{y\in Y} K(x,y)$
- Así $\sup_{y\in Y} \inf_{x\in X} K(x,y) \leq \inf_{x\in X} \sup_{y\in Y} K(x,y)$.

Contraejemplo a la desigualdad inversa:

$$X = Y = [0,1], \quad K(x,x) = 1, \quad K(x,y) = 0 \quad \text{si } x \neq y$$

Teoremas minimax: Condiciones para que se cumpla la igualdad.

Minimax para una función de pagos $K : X \times Y \to \mathbb{R}$

Siempre

$$\sup_{y\in Y} \inf_{x\in X} K(x,y) \leq \inf_{x\in X} \sup_{y\in Y} K(x,y) :$$

- Fijados $\bar{y}$ y x, $K(x,\bar{y}) \leq \sup_{y\in Y} K(x,y)$
- $\inf_{x\in X} K(x,\bar{y}) \leq \inf_{x\in X} \sup_{y\in Y} K(x,y)$
- Así $\sup_{y\in Y} \inf_{x\in X} K(x,y) \leq \inf_{x\in X} \sup_{y\in Y} K(x,y)$.

Contraejemplo a la desigualdad inversa:

$$X = Y = [0,1], \quad K(x,x) = 1, \quad K(x,y) = 0 \quad \text{si } x \neq y$$

Teoremas minimax: Condiciones para que se cumpla la igualdad.

El teorema minimax de von Neumann

- X, Y compactos convexos de $\mathbb{R}^n$ y $K(x, y)$ continua.
- $K(\cdot, y)$ concava para todo $y \in Y$.
- $K(x, \cdot,)$ convexa para todo $x \in X$.

Entonces $\sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} K(x, y) = \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} K(x, y)$.

- 1928 J. von Neumann para el caso de símplex de $\mathbb{R}^n$ y luego (1935/36) mas general.
- Usaba una reducción al caso $n = 1$.

En teoría de juegos de dos jugadores A y B, en un juego de suma cero, se dan dos funciones de pagos bilineales, K y H, tales que $K(x, y) + H(x, y) \equiv 0$.

La igualdad minimax significa que las estrategias que maximizan las ganancias mínimas de A, minimizan las pérdidas máximas de B.

El teorema minimax de von Neumann

- X, Y compactos convexos de $\mathbb{R}^n$ y $K(x, y)$ continua.
- $K(\cdot, y)$ concava para todo $y \in Y$.
- $K(x, \cdot,)$ convexa para todo $x \in X$.

Entonces $\sup_{y \in Y} \text{ínf}_{x \in X} K(x, y) = \text{ínf}_{x \in X} \sup_{y \in Y} K(x, y)$.

- 1928 J. von Neumann para el caso de símplex de $\mathbb{R}^n$ y luego (1935/36) mas general.
- Usaba una reducción al caso $n = 1$.

En teoría de juegos de dos jugadores A y B, en un juego de suma cero, se dan dos funciones de pagos bilineales, K y H, tales que $K(x, y) + H(x, y) \equiv 0$.

La igualdad minimax significa que las estrategias que maximizan las ganancias mínimas de A, minimizan las pérdidas máximas de B.

El teorema minimax de von Neumann

- X, Y compactos convexos de $\mathbb{R}^n$ y $K(x, y)$ continua.
- $K(\cdot, y)$ concava para todo $y \in Y$.
- $K(x, \cdot,)$ convexa para todo $x \in X$.

Entonces $\sup_{y \in Y} \text{ínf}_{x \in X} K(x, y) = \text{ínf}_{x \in X} \sup_{y \in Y} K(x, y)$.

- 1928 J. von Neumann para el caso de símplex de $\mathbb{R}^n$ y luego (1935/36) mas general.
- Usaba una reducción al caso $n = 1$.

En teoría de juegos de dos jugadores A y B, en un juego de suma cero, se dan dos funciones de pagos bilineales, K y H, tales que $K(x, y) + H(x, y) \equiv 0$.

La igualdad minimax significa que las estrategias que maximizan las ganancias mínimas de A, minimizan las pérdidas máximas de B.

El teorema minimax de von Neumann

- X, Y compactos convexos de $\mathbb{R}^n$ y $K(x, y)$ continua.
- $K(\cdot, y)$ concava para todo $y \in Y$.
- $K(x, \cdot,)$ convexa para todo $x \in X$.

Entonces $\sup_{y \in Y} \text{ínf}_{x \in X} K(x, y) = \text{ínf}_{x \in X} \sup_{y \in Y} K(x, y)$.

- 1928 J. von Neumann para el caso de símplex de $\mathbb{R}^n$ y luego (1935/36) mas general.
- Usaba una reducción al caso $n = 1$.

En teoría de juegos de dos jugadores A y B, en un juego de suma cero, se dan dos funciones de pagos bilineales, K y H, tales que $K(x, y) + H(x, y) \equiv 0$.

La igualdad minimax significa que las estrategias que maximizan las ganancias mínimas de A, minimizan las pérdidas máximas de B.

El teorema minimax de von Neumann

- X, Y compactos convexos de $\mathbb{R}^n$ y $K(x,y)$ continua.
- $K(\cdot,y)$ concava para todo $y \in Y$.
- $K(x,\cdot,)$ convexa para todo $x \in X$.

Entonces $\sup_{y\in Y} \text{ínf}_{x\in X} K(x,y) = \text{ínf}_{x\in X} \sup_{y\in Y} K(x,y)$.

- 1928 J. von Neumann para el caso de símplex de $\mathbb{R}^n$ y luego (1935/36) mas general.
- Usaba una reducción al caso $n = 1$.

En teoría de juegos de dos jugadores A y B, en un juego de suma cero, se dan dos funciones de pagos bilineales, K y H, tales que $K(x,y) + H(x,y) \equiv 0$.

La igualdad minimax significa que las estrategias que maximizan las ganancias mínimas de A, minimizan las pérdidas máximas de B.

El teorema minimax de von Neumann

- X, Y compactos convexos de $\mathbb{R}^n$ y $K(x,y)$ continua.
- $K(\cdot, y)$ concava para todo $y \in Y$.
- $K(x, \cdot,)$ convexa para todo $x \in X$.

Entonces $\sup_{y\in Y} \text{ínf}_{x\in X} K(x,y) = \text{ínf}_{x\in X} \sup_{y\in Y} K(x,y)$.

- 1928 J. von Neumann para el caso de símplex de $\mathbb{R}^n$ y luego (1935/36) mas general.
- Usaba una reducción al caso $n = 1$.

En teoría de juegos de dos jugadores A y B, en un juego de suma cero, se dan dos funciones de pagos bilineales, K y H, tales que $K(x,y) + H(x,y) \equiv 0$.

La igualdad minimax significa que las estrategias que maximizan las ganancias mínimas de A, minimizan las pérdidas máximas de B.

Extensión del teorema de von Neumann

- X e Y compactos convexos de espacios de Banach.
- $K(\cdot, y)$ es cuasi-cóncava $\forall y$ si $\{K(\cdot, y) \geq \lambda\}$ son convexos de X.
  Así $U(\lambda) := \bigcap_{y \in Y} \{K(\cdot, y) \geq \lambda\}$ son convexos.
- $K(x, \cdot)$ es cuasi-convexa si $\{K(x, \cdot) \leq \lambda\}$ son convexos de Y $\forall x$.
  Así $L(\lambda) := \bigcap_{x \in X} \{K(x, \cdot) \leq \lambda\}$ son convexos.

Teorema

Si $K(\cdot, y)$ es continua y cuasi-cóncava para todo $y \in Y$ y $K(x, \cdot)$ es continua y cuasi-convexa para todo $x \in X$, entonces

$$\sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} K(x, y) = \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} K(x, y).$$

$U(\lambda)$ y $L(\lambda)$ son convexos y cerrados. Por compacidad,

$$\lambda_0 := \sup_{U(\lambda) \neq \emptyset} \lambda < +\infty, \quad U(\lambda_0) \neq \emptyset$$

y

$$\mu_0 := \inf_{L(\mu) \neq \emptyset} \lambda > -\infty, \quad L(\mu_0) \neq \emptyset.$$

Para cada $(x^0, y^0) \in U(\lambda_0) \times L(\mu_0)$, se tiene $\lambda_0 \leq K(x^0, y^0) \leq \mu_0$.

Extensión del teorema de von Neumann

- X e Y compactos convexos de espacios de Banach.
- $K(\cdot, y)$ es cuasi-cóncava $\forall y$ si $\{K(\cdot, y) \geq \lambda\}$ son convexos de X.
  Así $U(\lambda) := \bigcap_{y \in Y} \{K(\cdot, y) \geq \lambda\}$ son convexos.
- $K(x, \cdot)$ es cuasi-convexa si $\{K(x, \cdot) \leq \lambda\}$ son convexos de Y $\forall x$.
  Así $L(\lambda) := \bigcap_{x \in X} \{K(x, \cdot) \leq \lambda\}$ son convexos.

Teorema

Si $K(\cdot, y)$ es continua y cuasi-cóncava para todo $y \in Y$ y $K(x, \cdot)$ es continua y cuasi-convexa para todo $x \in X$, entonces

$$\sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} K(x, y) = \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} K(x, y).$$

$U(\lambda)$ y $L(\lambda)$ son convexos y cerrados. Por compacidad,

$$\lambda_0 := \sup_{U(\lambda) \neq \emptyset} \lambda < +\infty, \quad U(\lambda_0) \neq \emptyset$$

y

$$\mu_0 := \inf_{L(\mu) \neq \emptyset} \lambda > -\infty, \quad L(\mu_0) \neq \emptyset.$$

Para cada $(x^0, y^0) \in U(\lambda_0) \times L(\mu_0)$, se tiene $\lambda_0 \leq K(x^0, y^0) \leq \mu_0$.

Extensión del teorema de von Neumann

- X e Y compactos convexos de espacios de Banach.
- $K(\cdot, y)$ es cuasi-cóncava $\forall y$ si $\{K(\cdot, y) \geq \lambda\}$ son convexos de X. Así $U(\lambda) := \bigcap_{y \in Y} \{K(\cdot, y) \geq \lambda\}$ son convexos.
- $K(x, \cdot)$ es cuasi-convexa si $\{K(x, \cdot) \leq \lambda\}$ son convexos de Y $\forall x$. Así $L(\lambda) := \bigcap_{x \in X} \{K(x, \cdot) \leq \lambda\}$ son convexos.

Teorema

Si $K(\cdot, y)$ es continua y cuasi-cóncava para todo $y \in Y$ y $K(x, \cdot)$ es continua y cuasi-convexa para todo $x \in X$, entonces

$$\sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} K(x, y) = \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} K(x, y).$$

$U(\lambda)$ y $L(\lambda)$ son convexos y cerrados. Por compacidad,

$$\lambda_0 := \sup_{U(\lambda) \neq \emptyset} \lambda < +\infty, \quad U(\lambda_0) \neq \emptyset$$

y

$$\mu_0 := \inf_{L(\mu) \neq \emptyset} \lambda > -\infty, \quad L(\mu_0) \neq \emptyset.$$

Para cada $(x^0, y^0) \in U(\lambda_0) \times L(\mu_0)$, se tiene $\lambda_0 \leq K(x^0, y^0) \leq \mu_0$.

Extensión del teorema de von Neumann

- X e Y compactos convexos de espacios de Banach.
- $K(\cdot, y)$ es cuasi-cóncava $\forall y$ si $\{K(\cdot, y) \geq \lambda\}$ son convexos de X. Así $U(\lambda) := \bigcap_{y \in Y} \{K(\cdot, y) \geq \lambda\}$ son convexos.
- $K(x, \cdot)$ es cuasi-convexa si $\{K(x, \cdot) \leq \lambda\}$ son convexos de Y $\forall x$. Así $L(\lambda) := \bigcap_{x \in X} \{K(x, \cdot) \leq \lambda\}$ son convexos.

Teorema

Si $K(\cdot, y)$ es continua y cuasi-cóncava para todo $y \in Y$ y $K(x, \cdot)$ es continua y cuasi-convexa para todo $x \in X$, entonces

$$\sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} K(x, y) = \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} K(x, y).$$

$U(\lambda)$ y $L(\lambda)$ son convexos y cerrados. Por compacidad,

$$\lambda_0 := \sup_{U(\lambda) \neq \emptyset} \lambda < +\infty, \quad U(\lambda_0) \neq \emptyset$$

y

$$\mu_0 := \inf_{L(\mu) \neq \emptyset} \lambda > -\infty, \quad L(\mu_0) \neq \emptyset.$$

Para cada $(x^0, y^0) \in U(\lambda_0) \times L(\mu_0)$, se tiene $\lambda_0 \leq K(x^0, y^0) \leq \mu_0$.

Extensión del teorema de von Neumann

- X e Y compactos convexos de espacios de Banach.
- $K(\cdot, y)$ es cuasi-cóncava $\forall y$ si $\{K(\cdot, y) \geq \lambda\}$ son convexos de X. Así $U(\lambda) := \bigcap_{y \in Y} \{K(\cdot, y) \geq \lambda\}$ son convexos.
- $K(x, \cdot)$ es cuasi-convexa si $\{K(x, \cdot) \leq \lambda\}$ son convexos de Y $\forall x$. Así $L(\lambda) := \bigcap_{x \in X} \{K(x, \cdot) \leq \lambda\}$ son convexos.

Teorema

Si $K(\cdot, y)$ es continua y cuasi-cóncava para todo $y \in Y$ y $K(x, \cdot)$ es continua y cuasi-convexa para todo $x \in X$, entonces

$$\sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} K(x, y) = \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} K(x, y).$$

$U(\lambda)$ y $L(\lambda)$ son convexos y cerrados. Por compacidad,

$$\lambda_0 := \sup_{U(\lambda) \neq \emptyset} \lambda < +\infty, \quad U(\lambda_0) \neq \emptyset$$

y

$$\mu_0 := \inf_{L(\mu) \neq \emptyset} \lambda > -\infty, \quad L(\mu_0) \neq \emptyset.$$

Para cada $(x^0, y^0) \in U(\lambda_0) \times L(\mu_0)$, se tiene $\lambda_0 \leq K(x^0, y^0) \leq \mu_0$.

Extensión del teorema de von Neumann

- X e Y compactos convexos de espacios de Banach.
- $K(\cdot, y)$ es cuasi-cóncava $\forall y$ si $\{K(\cdot, y) \geq \lambda\}$ son convexos de X. Así $U(\lambda) := \bigcap_{y \in Y} \{K(\cdot, y) \geq \lambda\}$ son convexos.
- $K(x, \cdot)$ es cuasi-convexa si $\{K(x, \cdot) \leq \lambda\}$ son convexos de Y $\forall x$. Así $L(\lambda) := \bigcap_{x \in X} \{K(x, \cdot) \leq \lambda\}$ son convexos.

Teorema

Si $K(\cdot, y)$ es continua y cuasi-cóncava para todo $y \in Y$ y $K(x, \cdot)$ es continua y cuasi-convexa para todo $x \in X$, entonces

$$\sup_{y \in Y} \operatorname{\acute{i}nf}_{x \in X} K(x, y) = \operatorname{\acute{i}nf}_{x \in X} \sup_{y \in Y} K(x, y).$$

$U(\lambda)$ y $L(\lambda)$ son convexos y cerrados. Por compacidad,

$$\lambda_0 := \sup_{U(\lambda) \neq \emptyset} \lambda < +\infty, \quad U(\lambda_0) \neq \emptyset$$

y

$$\mu_0 := \operatorname{\acute{i}nf}_{L(\mu) \neq \emptyset} \lambda > -\infty, \quad L(\mu_0) \neq \emptyset.$$

Para cada $(x^0, y^0) \in U(\lambda_0) \times L(\mu_0)$, se tiene $\lambda_0 \leq K(x^0, y^0) \leq \mu_0$.

Una reducción

Recordemos: $U(\lambda) := \bigcap_{y \in Y} \{K(\cdot, y) \geq \lambda\}$ y $L(\lambda) := \bigcap_{x \in X} \{K(x, \cdot) \leq \lambda\}$.

Supongamos $\lambda_0 = \sup_{U(\lambda) \neq \emptyset} \lambda$ y $\mu_0 = \text{ínf}_{L(\mu) \neq \emptyset} \mu$ satisfacen $\mu_0 = \lambda_0$. O sea,

$$K(x^0, y) \geq \lambda_0 = K(x^0, y^0) = \mu_0 \geq K(x, y^0) \qquad (x \in X,\, y \in Y).$$

Resulta

$$\max_x \min_y K(x, y) \geq \min_y K(x^0, y) = K(x^0, y^0)$$

y

$$K(x^0, y^0) = \max_x K(x, y^0) \geq \min_y \max_x K(x, y).$$

Con ello $\max_x \min_y K(x, y) \geq \min_y \max_x K(x, y)$.

Demostración de $\mu_0 = \lambda_0$

$U(\lambda_0+\varepsilon)=\emptyset$ y $L(\mu_0-\varepsilon)=\emptyset$ implican que para cada $x \in X$ y cada $y \in Y$ existen $\bar{y} \in Y$ y $\bar{x} \in X$ tales que

$$\bar{\lambda} := \lambda_0 + \varepsilon > K(x, \bar{y}), \quad \bar{\mu} := \mu_0 - \varepsilon < K(\bar{x}, y).$$

Con los abiertos

$$A_y := \{x \in X;\ K(x,y) < \bar{\lambda}\} \qquad (y \in Y)$$

$$B_x := \{y \in X;\ K(x,y) > \bar{\mu}\} \qquad (x \in X)$$

formamos recubrimientos finitos

$$X \subset \bigcup_{j=1}^{N} A_{y_j}, \quad Y \subset \bigcup_{k=1}^{M} B_{x_k},$$

con lo que

$$\min_j K(x, y_j) < \bar{\lambda} \quad (\forall x \in X), \qquad \max_k K(x_k, y) > \bar{\mu} \quad (\forall y \in Y).$$

Continuación: una función con punto fijo

$$\varphi_k(y) := \max(K(x_k, y) - \bar{\mu}, 0), \qquad \psi_j(x) := \max(\bar{\lambda} - K(x, y_j), 0).$$

Por las últimas desigualdades,

$$\sum_k \varphi_k(y) > 0, \quad \sum_j \psi_j(x) > 0$$

y

$$F(x,y) := \Big(\frac{\sum_k \varphi_k(y) x_k}{\sum_k \varphi_k(y)}, \frac{\sum_j \psi_j(x) y_j}{\sum_j \psi_j(x)} \Big)$$

define una función continua

$$F : X \times Y \to X \times Y$$

tal que $F(\operatorname{co}\{x_k\}_{k=1}^M \times \operatorname{co}\{y_j\}_{j=1}^N) \subset \operatorname{co}\{x_k\}_{k=1}^M \times \operatorname{co}\{y_j\}_{j=1}^N$.

$$C := \operatorname{co}\{x_k\} \times \operatorname{co}\{y_j\} \subset [x_k;\, k = 1, \dots M] \times [y_j;\, j = 1, \dots N] \subset E \times F$$

es compacto convexo. F tiene punto fijo, $(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \in C$

Final de la demostración

$$\widetilde{x} = \frac{\sum_k \varphi_k(\widetilde{y}) x_k}{\sum_k \varphi_k(\widetilde{y})}, \quad \widetilde{y} = \frac{\sum_j \psi_j(\widetilde{x}) y_j}{\sum_j \psi_j(\widetilde{x})}.$$

Por ser K cuasi-cóncava en x,

$$\varphi_k(\widetilde{y}) = \max(K(x_k, \widetilde{y}) - \bar{\mu}, 0) \geq 0 \Rightarrow K(x_k, \widetilde{y}) \geq \bar{\mu} \Rightarrow K(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \geq \bar{\mu}.$$

Por ser K cuasi-convexa en y,

$$K(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \leq \bar{\lambda}.$$

Así $\bar{\mu} \leq \bar{\lambda}$ o, equivalentemente, $\mu_0 \leq \lambda_0 + 2\varepsilon$, y ya sabemos que $\lambda_0 \leq \mu_0$; o sea $\mu_0 = \lambda_0$. $\square$