Desigualdad isoperimétrica
y
Desigualdad de Brunn-Minkowski

II Escuela de Análisis Funcional
La Manga del Mar Menor

16 de Abril de 2012

Problema de Dido (en “La Eneida”, Virgilio)

- Dido fue una princesa fenicia, hija del rey de Tiro, que fue reina al morir su padre y se casó con Sicarbas, sacerdote de Melqart. Pero el hermano de la reina, Pigmalión, asesinó a Sicarbas y tomó el poder.
- Dido huyó en barco de Tiro con sus seguidores más fieles y llegaron hasta las costas del norte de Africa, donde Dido intentó comprar algo de tierra al jefe indígena para que ella y su gente pudieran establecerse.
- Finalmente, después de mucho negociar, cerraron el trato acordando que Dido ocuparía sólo aquel trozo de tierra que pudiera abarcar con la piel de un buey.

- Dido se aprovechó de la situación. En primer lugar, interpretó la palabra abarcar en su sentido más amplio. A continuación cortó la piel en tiras muy finas y las ató, formando una cuerda cerrada de gran longitud. Finalmente, extendió la cuerda sobre el suelo de forma que encerrara en su interior la mayor superficie posible.
- De esta manera Dido consiguió espacio suficiente sobre el que fundó una ciudad a la que llamó Qart Hadast, que significa Ciudad Nueva (Cartago).

De los griegos a Weierstarss, pasando por Steiner

De todos los subconjuntos del plano los que tienen menor perímetro para un área dada son los círculos

La longitud L del contorno de un dominio plano de área A verifica

$$L \geq 2\sqrt{\pi A}$$

dándose la igualdad precisamente cuando el dominio es un círculo

Desigualdad de Wirtinger

Sea $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, periódica de clase C^1, y $\int_0^{2\pi} f = 0$, entonces

$$\int_0^{2\pi} |f|^2 \leq \int_0^{2\pi} |f'|^2$$

Demostración:$f \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{ikt}$, $\hat{f}(0) = 0$ y $f' \sim \sum_{k\in\mathbb{Z},k\neq 0} ik\hat{f}(k)e^{ikt}$. Consideradas f y f' en $L_2[0, 2\pi]$ y entonces $\sim$ como una igualdad con la $\|.\|_2$-convergencia, la igualdad de Parseval implica

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z},k\neq 0} |\hat{f}(k)|^2$$

$$\leq \sum_{k\in\mathbb{Z},k\neq 0} k^2|\hat{f}(k)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'|^2$$

Nota. Si $f : [0, L] \to \mathbb{C}$ con las mismas hipótesis, entonces

$$\int_0^{L} |f|^2 \leq \frac{L^2}{4\pi^2}\int_0^{L} |f'|^2$$

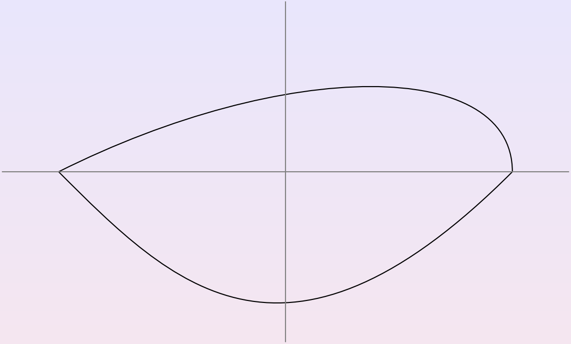
Teorema (según Hurwitz y Lebesgue)

Sea A un boreliano en $\mathbb{R}^2$, cuya frontera se pueda parametrizar $C^{(1}$ por el parámetro arco. Sea L la longitud del mismo y $S = |A|$ (área encerrada), entonces

$$L^2 \geq 4\pi S$$

Nota Ver para qué funciones se podía demostrar este resultado, dicen que fue uno de los motivos que tuvo H. Lebesgue para definir su integral

Demostración:



Sea $x = x(s), y = y(s)$, con $s \in [0, L]$, podemos suponer (después de una traslación) que

$$\int_0^L x(s)ds = \int_0^L y(s) = 0$$

Según la fórmula de Riemann-Green

$$S = \int\int_A dxdy = \frac{1}{2}\int_\gamma -ydx + xdy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L (-y(s)x'(s) + x(s)y'(s))ds$$

$$(Cau. - Sch.) \leq \frac{1}{2}\left(\int_0^L (x^2(s) + y^2(s))ds\right)^{1/2}\left(\int_0^L (x'^2(s) + y'^2(s))ds\right)^{1/2}$$

Entonces

$$S \leq \frac{1}{2} L^{1/2} \left(\int_0^L (x^2(s) + y^2(s)) ds \right)^{1/2}$$

$$\left(\frac{2S}{\sqrt{L}} \right)^2 \leq \int_0^L (x^2(s) + y^2(s)) ds$$

$$(Wirtinger) \leq \frac{L^2}{(2\pi)^2} \int_0^L (x'^2(s) + y'^2(s)) ds = \frac{L^3}{4\pi^2}$$

lo que implica

$$L^2 \geq 4\pi S$$

La igualdad, por Cauchy-Schwarz implica que

$$(-y(s), x(s)) \parallel (x'(s), y'(s)) \Leftrightarrow (x(s), y(s)) \perp (x'(s), y'(s))$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)'(s) = 0,$$

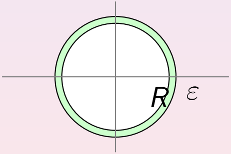
para todo $s \in [0, L]$. Luego ∂A es una circunferencia

Desigualdad isoperimétrica en $\mathbb{R}^n$

Para un volumen dado los conjuntos con menor superficie son las bolas

La bola euclídea de radio 1, B_2^n, $|B_2^n|_n = \omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}$
Una bola $B_R = B_R^n$ que tenga radio R tiene un volumen $|B_R|_n = R^n\omega_n$. Su frontera tiene una superficie, medida $(n-1)$-dimensional, dada por

$$|\partial B_R|_{n-1} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{|B_{R+\varepsilon}|_n - |B_R|_n}{\varepsilon} = n\omega_n R^{n-1}$$



Sea V un boreliano acotado en $\mathbb{R}^n$ y B_2^n la bola euclídea unidad. Se define

$$|\partial V|_{n-1} := \liminf_{\varepsilon \to 0^+} \frac{|V + \varepsilon B_2^n|_n - |V|_n}{\varepsilon}$$

Fijado su volumen $|V|_n$, la bola con ese volumen tiene radio y superficie

$$R = \left(\frac{|V|_n}{\omega_n}\right)^{1/n} \qquad |\partial V|_{n-1} \geq n|V|_n^{(n-1)/n} \omega_n^{1/n}$$

La desigualdad isoperimétrica dice que

$$\frac{|\partial V|_{n-1}^{1/(n-1)}}{|V|_n^{1/n}} \geq \frac{(n\omega_n)^{1/(n-1)}}{\omega_n^{1/n}} = \frac{|S^{n-1}|_{n-1}^{1/(n-1)}}{|B_2^n|_n^{1/n}}$$

S^{n-1} es la esfera n-dimensional, frontera de la bola euclídea

Desigualdad de Brunn-Minkowski

Sean A y B dos borelianos acotados en $\mathbb{R}^n$ entonces

$$|A+B|^{1/n} \geq |A|^{1/n} + |B|^{1/n}$$

donde $A + B = suma\ \ de\ \ Minkowski = \{x + y; x \in A, y \in B\}$

Demostración. Basada en la Desigualdad de Prekopa-Leindler

Proposición. Desigualdad de Prekopa-Leindler

Sean f, g y h tres funciones medibles de $\mathbb{R}^n$ en $[0, \infty]$ tales que para algún $0 < \lambda < 1$ y para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ cumplen

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda}$$

entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)^\lambda \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)^{1-\lambda}$$

Deducción de la desigualdad isoperimétrica de la de Brunn-Minkowski

Sea V un boreliano de volumen $|V|_n$ y B_2^n la bola euclídea unidad

$$|\partial V|_{n-1} = \liminf_{\varepsilon\to 0^+} \frac{|V+\varepsilon B_2^n|_n - |V|_n}{\varepsilon}$$

$$\geq \liminf_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\left(|V|_n^{1/n} + \varepsilon |B_2^n|_n^{1/n}\right)^n - |V|_n}{\varepsilon}$$

$$= \liminf_{\varepsilon\to 0^+} \frac{n\varepsilon |V|_n^{(n-1)/n}|B_2^n|_n^{1/n} + \varepsilon^2 \dots}{\varepsilon}$$

$$= n|V|_n^{(n-1)/n}|B_2^n|_n^{1/n}$$

Luego

$$\frac{|\partial V|_{n-1}}{|V|_n^{(n-1)/n}} \geq n|B_2^n|_n^{1/n} = \frac{|\partial B_2^n|_{n-1}}{|B_2^n|_n^{(n-1)/n}}$$

Demostración de Brunn-Minkowski

Tomemos cualquier $\lambda \in (0,1)$, $h = 1_{\lambda A + (1-\lambda)B}$, $f = 1_A$, $g = 1_B$ es claro que $h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda}$ y, por tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)^\lambda \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)^{1-\lambda} \Rightarrow |\lambda A + (1-\lambda)B|_n \geq |A|_n^\lambda |B|_n^{1-\lambda}$$

elegimos $A' = \frac{A}{|A|_n^{1/n}}$ $B' = \frac{B}{|B|_n^{1/n}}$

$$\lambda = \frac{|A|_n^{1/n}}{|A|_n^{1/n} + |B|_n^{1/n}} \quad 1 - \lambda = \frac{|B|_n^{1/n}}{|A|_n^{1/n} + |B|_n^{1/n}}$$

y obtenemos

$$\left| \frac{A}{|A|_n^{1/n} + |B|_n^{1/n}} + \frac{B}{|A|_n^{1/n} + |B|_n^{1/n}} \right|_n \geq 1$$

Desigualdad isoperimétrica en S^{n-1}

Sea $A \subseteq S^{n-1}$ un conjunto de Borel y $0 < \varepsilon < 1$, denotamos por

$$A_\varepsilon = \{y \in S^{n-1}; \exists x \in A, |x - y| \leq \varepsilon\}$$

Los casquetes tienen las dilataciones mínimas, es decir, si μ denota la medida normalizada en S^{n-1}, la esfera unidad de $\mathbb{R}^n$ y si $\mu(A) = \mu(B(x_0, r))$, entonces

$$\mu(A_\varepsilon) \geq \mu(B(x_0, r)_\varepsilon),$$

para todo $0 < \varepsilon < 1$.

Además si $\mu(A) \geq 1/2$, se tiene

$$\mu(A_\varepsilon) \geq 1 - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon^2(n-1)\right)$$

Demostración según Arias de Reyna, Ball y Villa

Lema

Sea ν la probabilidad uniforme en B_2^n, $\nu(A) = |A|/\omega_n$. Si A, B borelianos en B_2^n

$$\min\{\nu(A), \nu(B)\} \leq \exp\left(-\frac{d(A,B)^2 n}{8}\right)$$

Demostración según Arias de Reyna, Ball y Villa

Lema

Sea ν la probabilidad uniforme en B_2^n, $\nu(A) = |A|/\omega_n$. Si A, B borelianos en B_2^n

$$\min\{\nu(A), \nu(B)\} \leq \exp\left(-\frac{d(A,B)^2 n}{8}\right)$$

Si dos conjuntos están separados, los dos no pueden tener medida grande

La demostración es consecuencia de Brunn-Minkowski: A, B Borelianos en $\mathbb{R}^n$

$$|A+B|^{1/n} \geq |A|^{1/n} + |B|^{1/n}$$

Demostración del Lema

Suponemos A, B cerrados. $\alpha = \text{mín}\{\nu(A), \nu(B)\}$, $\rho = d(A, B)$

$$\left|\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right|^{1/n} \underset{BM}{\geq} \frac{1}{2}|A|^{1/n} + \frac{1}{2}|B|^{1/n} \Longrightarrow \nu\left(\frac{A+B}{2}\right) \geq \alpha$$

Demostración del Lema

Suponemos A, B cerrados. $\alpha = \text{mín}\{\nu(A), \nu(B)\}$, $\rho = d(A, B)$

$$\left|\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right|^{1/n} \underset{BM}{\geq} \frac{1}{2}|A|^{1/n} + \frac{1}{2}|B|^{1/n} \Longrightarrow \nu\left(\frac{A+B}{2}\right) \geq \alpha$$

Si $a \in A$, $b \in B$, $\Longrightarrow |a+b|^2 = 2|a|^2 + 2|b|^2 - |a-b|^2 \leq 4 - \rho^2$.
Entonces

Demostración del Lema

Suponemos A, B cerrados. $\alpha = \text{mín}\{\nu(A), \nu(B)\}$, $\rho = d(A, B)$

$$\left|\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right|^{1/n} \underset{BM}{\geq} \frac{1}{2}|A|^{1/n} + \frac{1}{2}|B|^{1/n} \Longrightarrow \nu\left(\frac{A+B}{2}\right) \geq \alpha$$

Si $a \in A$, $b \in B$, $\Longrightarrow |a+b|^2 = 2|a|^2 + 2|b|^2 - |a-b|^2 \leq 4 - \rho^2$.
Entonces

$$\frac{A+B}{2} \subseteq \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4}} B_2^n$$

$$\alpha \leq \nu\left(\frac{A+B}{2}\right) = \left(1 - \frac{\rho^2}{4}\right)^{n/2} \leq \exp\left(-\frac{\rho^2 n}{8}\right)$$

Demostración de la desigualdad isoperimétrica

Sea μ la medida en S^{n-1} normalizada y $A \subseteq S^{n-1}$ con $\mu(A) \geq 1/2$. Sea $\varepsilon > 0$ y $B = A_\varepsilon^c$. Fijamos $0 < \lambda < 1$
$\bar{A} = \{ta \in \mathbb{R}^n; \lambda \leq t \leq 1, a \in A\}$, $\bar{B} = \{sb \in \mathbb{R}^n; \lambda \leq s \leq 1, b \in B\} \subseteq B_2^n$.
Si $a \in A, b \in B$, $|ta - sb| \geq |\lambda a - \lambda b| = \lambda |a - b| \geq \lambda\varepsilon$

$$\nu(\bar{A}) = \frac{1}{\omega_n}\Big(\int_\lambda^1 r^{n-1} dr\Big) n\mu(A) = (1 - \lambda^n)\mu(A)$$

$\nu(\bar{B}) = (1 - \lambda^n)\mu(B)$. Como $\mu(A) \geq 1/2 \Rightarrow \mu(B) \leq 1/2$, del lema tenemos
El lema implica que

$$\alpha = (1 - \lambda^n)\mu(B) \leq \exp\left(-\frac{n\lambda^2\varepsilon^2}{8}\right)$$

Luego tomando $\lambda = 2^{1/n}$, $\qquad \mu(A_\varepsilon^c) \leq 2\exp(-C\varepsilon^2 n)$

Bibliografía

- L. Alias, Formas óptimas: El problema de la reina Dido y otros problemas relacionados. http://edu.jccm.es/ies/4hellin/Matematicas/ProyectoForMate/ProyectoForMate0607/LuisJAlias2007.pdf
- I. Chavel, Isoperimetric inequalities. Cambridge University Press (2001)
- M. Ledoux, The Concentration of measure Phenomenon. American Mathematical Society. Math. Surv. and Monog. 89 (2001)
- G. Pisier, The volume of convex bodies. Cambridge University Press (1989)
- G. Talenti, The standard isoperimetric theorem. En Handbook of Convex Geometry vol. A, (1993), 73-124. North Holland.