Notas sobre el teorema minimax

Antonio Martinón
Abril de 2012

1 Teoremas minimax

Sean X e Y dos conjuntos no vacíos y consideremos una función

$$f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R} .$$

Se verifica

$$\sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} f(x,y) \leq \inf_{y\in Y} \sup_{x\in X} f(x,y) \ ; \tag{1}$$

efectivamente, dado $x \in X$ resulta claro que

$$\inf_{y\in Y} f(x,y) \leq \inf_{y\in Y} \sup_{x\in X} f(x,y) \ ,$$

de donde se obtiene inmediatamente la desigualdad (1).

En general no vale la igualdad en (1), como queda claro si se toma $X = Y = \{0,1\}$ y $f(x,y) = 0$ si $x \neq y$, $f(x,y) = 1$ si $x = y$, pues se obtiene

$$\sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} f(x,y) = 0 < 1 = \inf_{y\in Y} \sup_{x\in X} f(x,y) \ .$$

Los llamados *teoremas minimax* contemplan condiciones suficientes para que se verifique la igualdad en (1); es decir, para que se cumpla la *igualdad minimax*:

$$\sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} f(x,y) = \inf_{y\in Y} \sup_{x\in X} f(x,y) \ . \tag{2}$$

Se enuncia a continuación la versión de Maurice Sion (1958).

Teorema 1 *Sean E y F espacios vectoriales topológicos de Hausdorff; $X \subset E$ e $Y \subset F$ conjuntos convexos, compactos y no vacíos; $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ una función sup-semicontinua y casi-cóncava sobre X e inf-semicontinua y casi-convexa sobre Y. Entonces se verifica la igualdad minimax (2).*

Las nociones sobre continuidad y convexidad que figuran en el enunciado se introducen al final de estas notas.

2 Aplicación a la teoría de juegos

Consideremos un juego de suma cero en el que intervienen dos jugadores, que denotaremos por A y B.

El jugador A tiene el conjunto $\{a_1, ..., a_m\}$ de *estrategias puras* o *acciones* y, análogamente, el jugador B posee las del conjunto $\{b_1, ..., b_n\}$.

Para cada par de acciones (a_i, b_j) hay una *utilidad* (ganancia o pérdida) $A(a_i, b_j)$ para el jugador A y otra $B(a_i, b_j)$ para el jugador B. Que se trata de un juego de suma cero significa que las ganancias de A son las pérdidas de B, y recíprocamente; es decir, se verifica

$$A(a_i, b_j) + B(a_i, b_j) = 0 \quad (1 \le i \le m; 1 \le j \le n) .$$

Ahora suponemos que el jugador A ejecutará la estrategia a_i con probabilidad x_i y que B realizará b_j con probabilidad y_j. Cada distribiución de probabilidad $x = (x_1, ..., x_m)$ es una *estrategia mixta* o *estrategia aleatoria* para A y, análogamente, cada distribución $y = (y_1, ..., y_n)$ lo es para B. Se verifica

$$x_i \ge 0 \ (1 \le i \le m) \quad , \quad y_j \ge 0 \ (1 \le j \le n) \quad , \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 .$$

Para cada par de estrategias mixtas (x, y) se tiene la *función de pagos* de A:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} A(a_i, b_j) x_i y_j ,$$

que es bilineal en x_i, y_j. Análogamente, la *función de pagos* de B viene dada por

$$g(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} B(a_i, b_j) x_i y_j .$$

Se verifica

$$f(x, y) + g(x, y) = 0 \quad (\text{para todo } x, y) .$$

Tenemos, por tanto la siguiente situación:

- X e Y son los simplex

  $$X = \left\{ x = (x_1, ..., x_m) : x_i \ge 0 \ (1 \le i \le m) \ , \ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\} ,$$

  $$Y = \left\{ y = (y_1, ..., y_n) : y_j \ge 0 \ (1 \le j \le n) \ , \ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \right\} ,$$

  así que X e Y son convexos, compactos y no vacíos.

- La función de pagos $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, así que es continua sobre X y sobre Y. Además es bilineal, luego es lineal sobre X y sobre Y, por tanto es cóncava sobre X y convexa sobre Y.

- Se aplica el teorema de Sion y se obtiene la igualdad minimax (2), pero ahora es seguro que se alcanzan los supremos e ínfimos, y se escribe, por tanto, con máximos y mínimos:

  $$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y) . \qquad (3)$$

La igualdad minimax en este contexto significa que las estrategias que hacen que A maximice sus ganancias mínimas son las mismas que hacen que B minimice sus pérdidas máximas.

Observemos que de la igualdad minimax (3) resulta

$$\max_{y\in Y}\min_{x\in X} g(x,y) = \max_{y\in Y}\Big(-\max_{x\in X}(-g(x,y))\Big) = -\min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y) =$$

$$= -\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) = \min_{x\in X}\Big(-\min_{y\in Y}(-g(x,y))\Big) = \min_{x\in X}\max_{y\in Y} g(x,y)\ ,$$

que puede interpretarse diciendo que las estrategias que hacen que A maximice sus ganancias mínimas y B minimice sus pérdidas máximas son las mismas que hacen que A minimice sus pérdidas máximas y B maximice sus ganancias mínimas.

3 Puntos silla

Consideremos conjuntos no vacíos X e Y y una función

$$f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}\ .$$

Se dice que $(x', y') \in X \times Y$ es un *punto silla* de f si

$$\sup_{y\in Y} f(x',y) = f(x',y') = \inf_{x\in X} f(x,y')\ ;$$

observemos que es equivalente a

$$\sup_{y\in Y} f(x',y) = \inf_{x\in X} f(x,y')$$

y que realmente puede escribirse

$$\max_{y\in Y} f(x',y) = f(x',y') = \min_{x\in X} f(x,y')\ .$$

En otras palabras, $(x', y') \in X \times Y$ es un punto silla de f si se cumple

$$f(x',y) \le f(x',y') \le f(x,y') \quad (x \in X, y \in Y)\ .$$

Algunos ejemplos y propiedades:

- *Ejemplo.* Dada la función $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = -2x^2 + y^2 - y + 2$, se tiene que el punto $(0, 1/2)$ es un punto silla de f.

- *Proposición.* Si f tiene un punto silla entonces se verifica la igualdad minimax (2), realmente la igualdad (3). *Demostración.* Sea (x', y') punto silla de f. Entonces

$$\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x,y) \le \sup_{x\in X} f(x,y') \le f(x',y') \le$$

$$\inf_{y\in Y} f(x',y) \le \sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} f(x,y) \le \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x,y)\ .$$

- *Ejemplo.* Puede ocurrir que (2) sea cierta y no haya punto silla, como en el siguiente ejemplo: $f : \{1\}\times]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x,y) = y$, no tiene punto silla, aunque sí verifica la igualdad minimax (2).

- *Proposición.* Si se verifica la igualdad minimax (3), entonces hay punto silla. *Demostración.* Suponemos
$$\alpha := \max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) = \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y) \ .$$
Sea $x' \in X$ tal que
$$\alpha = \min_{y\in Y} f(x',y) \ .$$
Existe $y' \in Y$ que verifica
$$\alpha = \min_{y\in Y} f(x',y) = f(x',y') \leq f(x',y) \quad (y \in Y) \ . \tag{4}$$
Sea $y'' \in Y$ tal que
$$\alpha = \max_{x\in X} f(x,y'') \geq f(x,y'') \quad (x \in X) \ . \tag{5}$$
Luego $f(x',y'') \leq \alpha \leq f(x',y'')$, es decir $\alpha = f(x',y'')$. El punto (x',y'') es un punto silla ya que, por (4) y (5), se tiene
$$f(x,y'') \leq f(x',y'') = \alpha \leq f(x',y) \quad (x \in X, y \in Y) \ .$$

En un juego de suma cero con dos jugadores se dice que el par de estrategias mixtas (x',y') es un *punto de equilibrio* si es un punto silla para la función de pagos:
$$f(x,y') \leq f(x',y') \leq f(x',y) \quad (x \in X, y \in Y) \ .$$
Si se producen cambios en el punto de equilibrio alguno de los jugadores pierde.

4 Continuidad

Sea T un espacio topológico y consideremos la función
$$f : T \longrightarrow \mathbb{R} \ .$$
Usaremos la siguiente notación:
$$\{f \leq \lambda\} := \{t \in T : f(t) \leq \lambda\} \ ;$$
análogos significados para $\{f < \lambda\}$, $\{f = \lambda\}$...

Asociados a f se definen los conjuntos
$$\text{epi } f := \{(t,\alpha) : t \in T, \alpha \in \mathbb{R}, f(t) \leq \alpha\} \quad \text{(epigrafo de } f) \ .$$
$$\text{hipo } f := \{(t,\alpha) : t \in T, \alpha \in \mathbb{R}, f(t) \geq \alpha\} \quad \text{(hipografo de } f) \ .$$

Se dice que f es *sup-semicontinua* si se verifica cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes entre sí:

- Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{f < \lambda\}$ es subconjunto abierto de T
- Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{f \geq \lambda\}$ es subconjunto cerrado de T
- hipo f es subconjunto cerrado de $X \times \mathbb{R}$
- Si $(t_i)_{i\in I}$ es una red en T que converge a t, entonces

$$\limsup_i f(t_i) := \inf_i \sup_{j\geq i} f(t_j) \leq f(t) \ .$$

Análogamente, se dice que f es *inf-semicontinua* si se verifican las siguientes condiciones equivalen-tes:

- Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{f > \lambda\}$ es subconjunto abierto de T
- Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{f \leq \lambda\}$ es subconjunto cerrado de T
- epi f es subconjunto cerrado de $X \times \mathbb{R}$
- Si $(t_i)_{i\in I}$ es una red en T que converge a t, entonces

$$\liminf_i f(t_i) := \sup_i \inf_{j\geq i} f(t_j) \geq f(t) \ .$$

Se verifica:

- f es sup-semicontinua $\Longleftrightarrow -f$ es inf-semicontinua.
- f es continua $\Longleftrightarrow f$ es inf-semicontinua y sup-semicontinua.

5 Convexidad

Sean V un espacio vectorial real, $C \subset V$ y la función

$$f : C \longrightarrow \mathbb{R} \ .$$

Diremos que f es *casi-convexa* si se cumplen las siguientes condiciones equivalentes entre sí:

- Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{f < \lambda\}$ es subconjunto convexo de V
- Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{f \leq \lambda\}$ es subconjunto convexo de V
- Para todo $x, y \in C$ y todo $\lambda \in [0,1]$, se tiene $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$

Diremos que f es *casi-cóncava* si se verifican las condiciones equivalentes:

- Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{f > \lambda\}$ es subconjunto convexo de V
- Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{f \geq \lambda\}$ es subconjunto convexo de V
- Para todo $x, y \in C$ y todo $\lambda \in [0,1]$, se tiene $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{f(x), f(y)\}$

Se verifica:

- f es casi-convexa $\Longleftrightarrow -f$ es casi-cóncava .
- f es lineal $\Longrightarrow f$ es convexa $\Longrightarrow f$ es casi-convexa .
- f es lineal $\Longrightarrow f$ es cóncava $\Longrightarrow f$ es casi-cóncava .