LÍMITES EN ESPACIOS DE BANACH

JESÚS M. F. CASTILLO

Lo que aquí teneis es un mapa. Que, por tanto refiere a un territorio. Que es muy grande y tiene muchos recovecos, pasajes escondidos y, en algún caso, peligros. Lo único que uno debe hacer es elegir un camino y recorrerlo disfrutando de lo que allí se encuentre. Aquí y allá he dado indicaciones. Y luego están los dos artéculos de apoyo que, como su nombre indica, son de apoyo.

1. Sucesiones en espacios de Banach y sus límites

Es un viejo deseo que toda sucesión acotada tenga límite (ver artículo "Ultrafilters" introducción a Sección 5). Por ejemplo, la sucesión $1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, ...$

Area de descanso 1. Breve discusión acerca de cuál es el límite de esa sucesión.

Por desgracia, desde el día que aparecieron Cauchy y sus epsilones, las cosas no son como bien podrían ser. Muchas cosas se inventaron para que así fuera: métodos de sumabilidad, convergencia de Césaro, etc. Pero lo que es difícil en análisis clásico puede no serlo en análisis funcional. En la teoría de espacios de Banach, el teorema de Hahn-Banach (ver Apéndice) resuelve fácilmente el problema: si ℓ_∞ es el espacio de Banach de las sucesiones acotadas dotado de la norma del supremo y c representa el subespacio de las sucesiones que tienen límite, eligiendo el funcional $\lim : c \to \mathbb{R}$ –que lleva cada sucesión con límite a su límite– y extendiéndolo a todo ℓ_∞ via Hahn-Banach, obtenemos una aplicación lineal y continua $L : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ que nos da lo que vamos a llamar un límite generalizado de cada sucesión acotada. Lo que no está claro es qué hace exactamente L. Ni siquiera podemos saber si el límite de la sucesión $1 - 0$ anterior debe ser $0, 1$ o, como yo creo, $\frac{1}{2}$. Hay dos cosas que los límites clásicos hacen y que parece razonable pedir a los límites generalizados: si $x = (x_n)_n$ es una sucesión acotada,

(1) $L(x) \in \overline{\{x_n\}}$
(2) $L(x_1, x_2, x_3, \dots) = L(x_2, x_3, x_4, \dots)$

El primer problema es que no pueden ser las dos cosas a la vez.

Cruzar el puente. No pueden ser las dos cosas a la vez

Y ya que los límites generalizados que buscamos son elementos de la bola unidad del dual de ℓ_∞, traducimos las condiciones (1) y (2) a $\ell_\infty^* = \ell_1^{**}$.

2. Límites que cumplen (1): ultrafiltros

Llamamos $\mathcal{U}$ al conjunto de todos los $L \in \ell_\infty^*$ con $\|L\| = 1$ que cumplen (1) $\forall x \in \ell_\infty \;\; L(x) \in \overline{\{x_n\}}$.

Detenerse a oler las rosas. Si e_n es la base canónica de ℓ_1, entonces $\mathcal{U} = \overline{\{e_n\}}^*$. El asterisco representa la topología débil* en ℓ_∞^*.

Ahora bien, la bola unidad del bidual es en la topología débil* un compacto (teorema de Banach-Alaoglu, ver Apéndice) y por tanto también $\overline{\{e_n\}}^*$ es un compacto. Si recordamos que dado un espacio topológico $\mathcal{T}$, una compactificacińn $K(\mathcal{T})$ es un espacio compacto para el que hay una aplicación continua e inyectiva $\delta : \mathcal{T} \to K(\mathcal{T})$ cuya imagen es densa, entonces

Seguir la desviación hacia el reino de la topología. $\overline{\{e_n\}}^*$ es una compactificación de $\mathbb{N}$.

Pero no va a ser una compactificación cualquiera de $\mathbb{N}$, es la de Stone-Cech (ver Apéndice):

Subir la montaña, hay hielo en la cima. $\beta\mathbb{N} = \mathcal{U}$.

Un filtro sobre un conjunto I es una familia de subconjuntos de I con determinadas propiedades (ver artículo "Ultrafilters" Sección 2). Estableciendo el order parcial "estar contenido en", se denomina ultrafiltro a un filtro maximal (que existen por el lema de Zorn).

Coge la vieja barca para cruzar el río. Un filtro $\mathfrak{U}$ es maximal si y sólo si tiene la propiedad de que dado cualquier subconjunto $A \subset \mathbb{N}$ o bien $A \in \mathfrak{U}$ o bien $\mathbb{N} \setminus A \in \mathfrak{U}$.

Para poder identificar los ultrafiltros con los elementos de $\mathcal{U}$ la pregunta es: si $\mathfrak{U}$ es un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$ y x una sucesión acotada, Qué debería ser $\mathfrak{U}(x)$? (ver [2, Sección 5]). Pongámoslo fácil:

Déjate llevar por la corriente. Si 1_A es una sucesión de 0's y 1's (la función característica de un cierto subconjunto $A \subset \mathbb{N}$, Qué debería ser $\mathfrak{U}(1_A)$?

Y ya sabiendo que las funciones características de los subconjuntos de $\mathbb{N}$ generan un subespacio denso de ℓ_∞, debería ser factible decidir qué es $\mathfrak{U}(x)$. Podemos también echar la vista atrás y ver de nuevo cómo el espacio de ultrafiltros es la compactificación de Stone-Cech de $\mathbb{N}$: Exáctamente igual que cada subconjunto de $\mathbb{N}$ es un elemento de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, un ultrafiltro es un elemento de $\{0,1\}^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$. Llamemos $\mathbb{U}$ al subconjunto de $\{0,1\}^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$ de los ultrafiltros dotado de la topología producto.

Desembarcando en la playa de la combinatoria. $\beta\mathbb{N} = \mathcal{U} = \mathbb{U}$.

En todo caso, hace ya mucho que sabemos

Vuelve a casa, y descansa. $\ell_\infty = C(\beta\mathbb{N})$.

3. Límites que cumplen (2): límites de Banach

Pensemos ahora en los elementos de la interesección de las clausura débil* de las "colas" de las envolventes convexas de los e_n; es decir, $C = \bigcap_n \overline{conv\{e_j\ : j \geq n\}}^{w^*}$, que no es vacío.

Area de descanso 2. No, no es vacío (por el teorema de Banach-Alaoglu, ver Apéndice).

Los L que cumplén (2) están ahí (ver [1, Lemma 1]). Para encontrarlos, si $I : \ell_\infty \to \ell_\infty$ representa la aplicación "moverse a la izquierda" $-I(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$, enonces lo que buscamos son funcionales L tales que $LIx = Lx$. O, lo que es igual, puntos fijos de $I^* : \ell_\infty^* \to \ell_\infty^*$. El teorema de punto fijo (ver Apéndice) los encuentra. Pero también lo hace el teorema de Hahn-Banach: llamando E al subespacio de ℓ_∞ siguiente $E = \{x - Ix : x \in \ell_\infty$, L es un funcional de norma 1 que separa E de 1.

Pasar por el desfiladero. E es un espacio vectorial, cerrado y $1 \notin E$; y aplicar Hahn-Banach.

Los elementos que cumplen (2) se llaman, a veces, límites de Banach o, en general, medias invariantes. La razón, pero esta podemos verla una vez cruzado el desfiladero pero no podemos llegar hasta allí: y es que el contexto adecuado para trabajar es tener un grupo G y buscar un elemento $m \in \ell_\infty(G)$ tal que cualquiera que sea el elemento $g_0 \in G$ se tenga

$$m((x_g)_{g\in G}) = m((x_{gg_0})_{g\in G}).$$

Es posible mostrar que los grupos G commutativos, o dotados de una topología que los vuelve compactos, admiten medias invariantes. Mientras que el grupo libre con dos elementos no lo hace.

4. Cómo se usan ultrafiltros y límites de Banach

Los ultrafiltros se usan para "pegar" cosas. Porque al otro lado del río que cruzamos con la vieja barca, hay una escalera tallada en piedra:

Subir por la escalera. Si I es un conjunto (no sólo $\mathbb{N}$), $(x_i)_{i\in I}$ es una familia de elementos de un compacto K (no sólo una sucesión acotada de números reales), entonces un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre I permite obtener un $\lim_{\mathcal{U}} x_n$ (con la misma definición que encontramos siguiendo la corriente abajo (ver [2, Sec. 5]). Y aquí va un ejemplo:

Adentrarse en el bosque, cuidado con el lobo. Cojamos un espacio de Banach X de dimensión infinita y otro espacio Y^* (un dual). Imaginemos que para cada subespacio de dimensión finita $F \subset X$ tenemos una aplicación lineal $L_F : F \to Y^*$ de norma 1. Automáticamente es posible "pegar" todos los pedazos y definir una aplicación lineal y continua $L : X \to Y^*$ que de alguna forma "pega" las L_F: la bola unidad de Y^* en la topología débil* es una compacto, el conjunto $\mathcal{F}$ de subespacios de dimensión finita de X tiene un orden natural, por lo que un filtro es fácil de definir. Y un ultrafiltro que lo refina $\mathcal{U}$ por tanto. Ya que cada elemento $x \in X$, en términos de orden, está en casi todos los elementos de $\mathcal{F}$, definir $L(x) = * - \lim_{\mathcal{U}} L_F(x)$ tiene sentido.

Los límites de Banach, sin embargo, lo que hacen es, partiendo de un grupo G, un espacio de Banach X y una "medida" $m_g : X \to \mathbb{R}$ para cada $g \in G$, obtener el "promedio" de las m_g cuando g recorre G. Y aquí va un ejemplo:

Siguiendo el camino que no entra en el bosque, encontraremos una fuente... Cojamos un espacio de Banach F de dimensión finita. Pongamos que $iso(X)$ es el (grupo) de las isometrías de F. Que si bien no es commutativo, es compacto (están todos sus elementos en la bola unidad de un espacio de dimensión finita, no?), por lo que admite una media invariante m. Y, como todo espacio de dimensión finita, admite un producto escalar $(\cdot,\cdot)$ equivalente a la la norma. Haciendo "girar" ese producto escalar con todas las isometrías de F obtenemos otro producto escalar:

$$< x, y >= m\left((gx, gy)_g \in iso(F)\right)$$

equivalente a la norma, claro, y que va a respetar las isometrías de F; es decir, $< x, y >=< gx, gy >$ para cada $g \in iso(F)$. Y de ahí va un paso a que si F tiene la propiedad de que dados dos elementos cualquiera x, y has una isometría g que lleva uno en otro, entonces ya la norma de F proviene del producto escalar que hemos definido: porque basta encontrar un punto x donde $\|x\| =< x, x >^{1/2}$ (y alguno habrá), para que lo mismo les ocurra a todos: si $\|y\| = 1$ y $gx = y$ entonces

$$\|y\| = \|g^{-1}y\| = \|x\| =< x, x >^{1/2}=< gx, gx >^{1/2}=< y, y >^{1/2} .$$

5. Apéndice

5.1. Teorema de Hahn-Banach.

(Extensión) Dado un subespacio cerrado Y de un espacio de Banach X y un funcional lineal y continuo $f : Y \to \mathbb{R}$, hay un funcional lineal $F : X \to \mathbb{R}$ con $\|F\| = \|f\|$ y tal que $F_{|Y} = f$.

(Separación) Dados un conjunto cerrado y convexo A de un espacio de Banach X y un convexo compacto B disjunto con A, hay un funcional lineal y continuo $f : X \to \mathbb{R}$ que separa estrictamente a A y B; es decir: $\sup\{f(a) : a \in A\} < \inf\{f(b) : b \in B\}$.

5.2. Compactificación de Stone-Cech. Dado un espacio topológico $\mathcal{T}$ su compactificación de Stone-Cech $\beta\mathcal{T}$ es aquella con la propiedad extra siguiente: toda función continua y acotada $f : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ se extiende a una función continua $f^\beta : \beta\mathcal{T} \to \mathbb{R}$ a través de δ.

Area de descanso 3. Quien guste de la teoría de categorías, aquí tiene en qué pensar.

5.3. Teorema de Banach-Alaoglu. La bola unidad del bidual de un espacio de Banach en la topología débil* es un compacto.

5.4. Teorema de punto fijo. Una aplicación lineal y continua de un conjunto convexo compacto en sí mismo tiene un punto fijo.

References

[1] J. Appell, E. de Pascale, P.P. Zabrejco, Some remarks on Banach limits Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 42 (1994) 273-278.
[2] P. Komjath and V. Totij, Ultrafilters, Amer. Math. Monthly, 115 (2008) 33-43.

Departamento de Matemáticas, Universidad de Extremadura, Avda de elvas s/n, 06071 Badajoz, España